第23卷第2期 数学研究与评论 Vol.23 No.2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

一类二阶渐近周期 Hamilton 系统同宿轨道*

王为民[1,2]， 吴绍平[1]

(1. 浙江大学应用数学系，浙江 杭州 310027；2. 浙江工业大学应用数学系，浙江 杭州 310014)

摘　要：运用变分方法讨论二阶渐近周期 Hamilton 系统

$$-\ddot{u}+L(t)u=(1+g(t))V'(t,u)$$

的 Lagrange 泛函在流形上的极小问题，进而证明该系统存在非平凡同宿轨道，其中 L,V 关于 t 是周期的，$g(t)\to 0(|t|\to\infty)$.

关键词：Hamilton 系统；同宿轨道；集中紧性；临界点.

分类号：AMS(2000) 34C25/CLC number：O175.12

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0313-07

本文主要研究二阶渐近周期 Hamilton 系统

$$-\ddot{u}+L(t)u=(1+g(t))V'(t,u) \tag{HS}$$

的非平凡同宿轨道，即系统(HS)满足：$u(t)\to 0,\dot{u}(t)\to 0(|t|\to\infty)$ 的非零解的存在性. 假设 V,L,g 满足条件：

(V_1) $L\in C(R,R^N\times R^N)$ 是 $T-$ 周期对称正定矩阵；

(V_2) $V\in C^2(R\times R^N,R)$ 关于 t 是 $T-$ 周期函数，且 $V(t,0)=0$, $V'(t,u)=o(|u|)(|u|\to 0)$ 关于 t 一致成立；

(V_3) 存在 $p>2$ 使得 $\forall\, t\in R$, $\forall\, u\in R^N\setminus\{0\}$, $V'(t,u)u\geqslant pV(t,u)>0$；

(V_4) $\forall\, t\in R,\forall\, u\in R^N\setminus\{0\}$, $\frac{1}{s}V'(t,su)u$ 是 $s(s>0)$ 的严格增函数；

(V_5) $g\in C^1(R,R)$, $\lim\limits_{|t|\to\infty}g(t)=0, 1+g(t)>0,\forall\, t\in R$.

设 $E=W^{1,2}(R,R^N)$, $N\geqslant 1$. $\forall\, u,v\in E$,

$$(u,v)=\int_R(\dot{u}\cdot\dot{v}+L(t)u\cdot v)\mathrm{d}t,\quad \|u\|=\sqrt{(u,u)},$$

则 $\|\cdot\|$ 与 E 的通常范数等价. 定义泛函 $I,I_\infty:E\to R$ 如下：

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_R(1+g(t))V(t,u)\mathrm{d}t,\quad I_\infty(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_R V(t,u)\mathrm{d}t.$$

众所周知，$I,I_\infty\in C^1(E,R)$，I 的临界点就是系统(HS)的同宿轨道.

令

* 收稿日期：2000-11-10

作者简介：王为民(1960-)，男，博士.

$$\varphi = \{u \in E \mid I'(u)u = 0, u \neq 0\}, \quad c = \inf_{\varphi} I,$$

$$\varphi_\infty = \{u \in E \mid I'_\infty(u)u = 0, u \neq 0\}, \quad c_\infty = \inf_{\varphi_\infty} I_\infty,$$

则 c, c_∞ 分别是 I 和 I_∞ 在 E 上的极小极大值且 $c > 0, c_\infty > 0$(文[1],[2]).令

$$K_\infty = \{u \in E \mid I'_\infty(u) = 0\}, \quad K_\infty(c_\infty) = K_\infty \cap \{I_\infty = c_\infty\},$$

则 $K_\infty(c_\infty) \neq \varnothing$.

最近,许多学者运用变分方法研究了二阶渐近周期 Hamilton 系统同宿轨道的存在性和多重性(参看文[3－7]).他们侧重讨论泛函 I 的(PS)序列的性质,并且利用了 I_∞ 的临界点集非退化条件(文[4],[5])和紧连通支条件(文[7]),I_∞ 的孤立临界值条件(文[7]).而文[3]讨论的系统与我们的系统(HS)有所不同,文[6]研究的是 Duffing 方程且 $N=1$.本文应用集中紧性方法和 Ekeland 变分原理把系统(HS)的同宿轨道的研究转化为泛函 I 在流形 φ 上的极小问题.通过极小化序列给出判别(HS)具有非平凡同宿轨道的条件.

为了得到本文的主要结果,我们需要几个引理.除特别说明外,以下总假定系统(HS)满足条件$(V_1)-(V_5)$.

引理 1 设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是 E 中的有界点列,则 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 必存在子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$,使得下列情形之一成立:

(1^0) 紧性:存在 $\{t_k\} \subset R$,$\{t_k\}$ 有界,使得 $\liminf\limits_{k\to\infty} |u_{n_k}(t_k)| > 0$;

(2^0) 消失:$\limsup\limits_{k\to\infty} |u_{n_k}(t)| = 0$, a.e. $t \in R$;

(3^0) 非衰减:存在 $\{t_k\} \subset R$,$|t_k| \to \infty$,使得 $\liminf\limits_{k\to\infty} |u_{n_k}(t_k)| > 0$.

证明 由于 $\{u_n\}$ 是 E 中有界点列,故有弱收敛子列 $\{u_{n_k}\}$,即 $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0 \in E(k \to \infty)$.若 $u_0 \neq 0$,因 $u_{n_k} \to u_0 (L^\infty_{\mathrm{LOC}}(R, R^N))$,所以($1^0$)发生.若 $u_0 = 0$,(i) 当 $u_{n_k} \to 0 (L^\infty(R, R^N))$ 时,则(2^0)发生;(ii) 当 $u_{n_k} \nrightarrow 0 (L^\infty(R, R^N))$ 时,因 $u_{n_k} \to 0 (L^\infty_{\mathrm{LOC}}(R, R^N))$,所以($3^0$)必发生.

评注 1 引理 1 是一个集中紧性引理,质量的集中可由 δ 测度刻划.本文的基本想法源于引理 1.

引理 2 若 $A > 0$,则 $\varphi \cap \{u \in E \mid I(u) \leqslant A\}$ 是 E 中有界集.

证明参看文[7]引理 2.6.

引理 3 存在正数 r,使得 $\forall\, u \in \varphi$, $\|u\|_{L^\infty(R,R^N)} > r$.

证明 设 $\sup\limits_{t\in R}\{1 + g(t)\} = B$,则存在 $r > 0$ 使得 $|u| \leqslant r$ 时,有 $V'(t,u)u < \dfrac{|u|^2}{2B}$.假设 $\exists\, u \in \varphi$, $\|u\|_{L^\infty(R,R^N)} \leqslant r$,则

$$0 = I'(u)u = \|u\|^2 - \int_R (1 + g(t))V'(t,u)u\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_R |u|^2 \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 > 0.$$

矛盾!因此,$\|u\|_{L^\infty(R,R^N)} > r$.

引理 4 若 $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ 是 I 的 $(\mathrm{PS})_{\mathrm{C}}$ 序列且 $0 < c < 2c_\infty$,则或 c 是 I 的临界值,或存在 $\{w_k\}$ 的子列(不妨设为其自身),$\{q_k\}_{k=1}^\infty \subset Z$,$|q_k| \to \infty$ 及 $\overline{w} \in K_\infty \backslash \{0\}$ 使得

$$\|w_k(\cdot - q_k T) - \overline{w}\| \to 0 \quad (k \to \infty), \quad I_\infty(\overline{w}) = c.$$

引理 4 的证明类似于文[7] 命题 2.3,参看文[5],[8],[9].

设 $u \in E\backslash\{0\}$,定义 $\lambda(u)=s, s>0, su \in \varphi, N(u)=\lambda(u)u$,则 $\lambda(u), N(u)$ 关于 u 都是连续的(文[2]).类似地,对 φ_∞ 可定义 $\lambda_\infty(u)$ 和 $N_\infty(u)$.

现在,我们给出并证明本文的主要结果.

定理 1　c 是 I 的临界值的充分必要条件是存在 I 在 φ 上的极小化序列 $\{u_k\}$ 和有界数列 $\{t_k\} \subset R$,使得

$$\liminf_{k\to\infty} |u_k(t_k)| > 0. \tag{*}$$

证明　必要性显然成立,下证充分性.

设 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ 是满足条件(*)的极小化序列,令

$$\Gamma=\{\gamma \in C([0,1],E) \mid \gamma(0)=0, I(\gamma(1))<0\}.$$

在 Γ 中取从原点出发过点 u_k 的直线段 γ_k,使得

$$I(u_k)=\max_{\theta\in[0,1]} I(\gamma_k(\theta)).$$

应用文[10] 推论 4.3 知,存在 $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset E$,使得 $I(v_k)\to c, I'(v_k)\to 0, \mathrm{dist}(v_k, \mathrm{range}\gamma_k)\to 0(k\to\infty)$.进而,有 $\theta_k \in [0,1]$,使得 $\|v_k-\gamma_k(\theta_k)\| \to 0(k\to\infty)$.假设 c 不是 I 的临界值,则由引理 4 可知,存在 $\{q_k\}\subset Z, |q_k|\to\infty$ 和 $\bar v \in K_\infty\backslash\{0\}$,使得 $\|v_k(\cdot-q_kT)-\bar v\|\to 0(k\to\infty)$.这样,$\|\gamma_k(\theta_k)(\cdot-q_kT)-\bar v\|\to 0(k\to\infty)$.由 γ_k 选取知 $\gamma_k(\theta_k)=\beta_k u_k, \beta_k\geqslant 0$.再由引理 2 和引理 3 得 $r_0\leqslant\|u_k\|\leqslant M$,$r_0$ 和 M 是与 k 无关的正数,

$$|\beta_k| r_0 \leqslant \|\gamma_k(\theta_k)\| = |\beta_k| \, \|u_k\| \leqslant |\beta_k| M.$$

而 $\|\gamma_k(\theta_k)\|=\|\gamma_k(\theta_k)(\cdot-q_kT)\|$, $\|u_k\|=\|u_k(\cdot-q_kT)\|$,故不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\beta>0$.于是

$$u_k(\cdot-q_kT)\to\frac{\bar v}{\beta}=\bar u\neq 0, \quad (k\to\infty).$$

即 $\|u_k-\bar u(\cdot+q_kT)\|\to 0(k\to\infty)$.因而 $|u_k(t_k)-\bar u(t_k+q_kT)|\to 0(k\to\infty)$.但 $\lim\limits_{k\to\infty}\bar u(t_k+q_kT)|=0$,故 0 是 $\{|u_k(t_k)|\}$ 的聚点.这与条件(*)矛盾!因此,c 是 I 的临界值.

评注 2　定理 1 表明:I 在 φ 上的极小点必是 I 的临界点.特别地,若 $V'(t,u)u=pV(t,u)>0, \forall\, t\in R, \forall\, u\in R^N\backslash\{0\}$,则 I 在 φ 上的极小点 u 满足 $\|u\|^2=\dfrac{2pc}{p-2}$.此时,I 在 φ 上的极小点在同一球面上.

评注 3　满足条件(*)的极小化序列 $\{u_k\}$ 可通过逼近方法得到.参看文[1] 定理 2.13 和文[11] 定理 1.1.

评注 4　从定理 1 的证明看出:I 在 φ 上的极小化序列 $\{u_k\}$ 满足条件(*)的充分必要条件是 $\{u_k\}$ 是相对紧的.

下面的定理 2 是 Lions 的结果在二阶 Hamilton 系统的推广(参看文[12]).

定理 2　若 $c<c_\infty$,则(HS)存在一条非平凡同宿轨道;而 $c<c_\infty$ 的充分必要条件是 I 在 φ 上的所有极小化序列都是相对紧的.

证明　若 $c<c_\infty$,则存在点列 $\{w_k\}\subset E$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty} I(w_k)=c<2c_\infty, \lim\limits_{k\to\infty} I'(w_k)=0$.进而,由引理 4 知,$c$ 必是 I 的临界值.

充分性.用反证法.设 $c=c_\infty, u\in K_\infty(c_\infty)$,则

$$
\begin{aligned}
c &\leqslant I(N(u(\cdot - q_kT))) \quad (|q_k| \to \infty) \\
&= I_\infty(N(u(\cdot - q_kT))) - \int_R g(t)\, V(t, N(u(t - q_kT)))\mathrm{d}t \\
&\leqslant c_\infty - \int_R g(t)\, V(t, N(u(t - q_kT)))\mathrm{d}t \\
&= c_\infty - \int_R g(t + q_kT)\, V(t, N(u(t)))\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

于是，$\{N(u(\cdot - q_kT))\}$ 是 I 在 φ 上的极小化序列. 因此，它是相对紧的. 进而$\{u(\cdot - q_kT)\}$ 是相对紧的. 矛盾！而 $c \leqslant c_\infty$ 是必然成立的，故只能有 $c < c_\infty$.

必要性. 设$\{u_k\}$ 是 I 在 φ 上的极小化序列，则从定理 1 的证明知，当 $c < c_\infty$ 时，$\{\gamma_k(\theta_k)\}$ 是相对紧的，从而$\{u_k\}$ 也是相对紧的. 这里利用了引理 4.

评注 5　由定理 1 和定理 2 可知，$c < c_\infty$ 的充分必要条件是 I 满足$(PS)_c$ 条件，从而说明：在我们的框架下，文[11] 和文[13] 所有的逼近方法是等价的.

定理 3　设(HS) 满足条件$(V_1) - (V_5)$，若 $\forall\, t \in R, g(t) \leqslant 0$，则 $c = c_\infty$. 若 $\forall\, t \in R, g(t) \leqslant 0, \mathrm{meas}\, g^{-1}(0) = 0$，则 c 不是 I 的临界值.

证明　设$\{u_k\}$ 是 I 在 φ 上的极小化序列，则

$$
I(u_k) \geqslant I(N_\infty(u_k)) = I_\infty(N_\infty(u_k)) - \int_R g(t)V(t, N_\infty(u_k))\mathrm{d}t \geqslant I_\infty(N_\infty(u_k)) \geqslant c_\infty.
$$

令 $k \to \infty$ 得 $c \geqslant c_\infty$. 于是，$c = c_\infty$.

假设 c 是 I 的临界值，则存在 $u_0 \in \varphi, I(u_0) = c$，即

$$
c = I_\infty(u_0) - \int g(t)V(t, u_0)\mathrm{d}t > I_\infty(N_\infty(u_0)) \geqslant c_\infty.
$$

矛盾！因此，c 不是 I 的临界值.

现将系统(HS) 中的 $g(t)$ 分别换成 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 得系统$(HS)_1$，$(HS)_2$. 类似地可定义泛函 I_i，流形 φ_i，下确界 c_i 和映射 $N_i (i = 1, 2)$. 此时，我们有如下结果：

定理 4　设系统$(HS)_i (i = 1, 2)$ 满足条件$(V_1) - (V_5)$ 且 $g_1(t) \leqslant g_2(t) (\forall\, t \in R)$. 若 c_1 是 I_1 的临界值，则 c_2 也是 I_2 的临界值.

证明　由定理 1 知，存在在 I_1 上 φ_1 的极小化序列$\{u_k\}$ 满足条件$(*)$. 进而

$$
I_1(u_k) \geqslant I_1(N_2(u_k)) = I_2(N_2(u_k)) - \int_R (g_1(t) - g_2(t))V(t, N(u_k))\mathrm{d}t \geqslant I_2(N_2(u_k)) \geqslant c_2.
$$

令 $k \to \infty$，得 $c_1 \geqslant c_2$. 若 $c_1 > c_2$，则 $c_2 < c_\infty$. 由定理 2 知，c_2 是 I_2 的临界值；若 $c_1 = c_2$，则$\{N_2(u_k)\}$ 是 I_2 在 φ_2 上的极小化序列. 由评注 4 知$\{u_k\}$ 是相对紧的，因而$\{N_2(u_k)\}$ 也是相对紧的，即$\{N_2(u_k)\}$ 满足条件$(*)$. 因此，再由定理 1 得，c_2 是 I_2 的临界值.

推论 1　若(HS) 满足条件$(V_1) - (V_5)$，而且 $\forall\, t \in R, g(t) \geqslant 0, g \neq 0$，则 c 是 I 的临界值. 进而，(HS) 存在非平凡同宿轨道.

评注 6　推论 1 改善了文[11] 的定理 1.1，该定理中的弱收敛序列实际上是强收敛的.

定理 5　设(HS)，$(HS)_m (m = 1, 2, \cdots)$ 满足条件$(V_1) - (V_5)$，$g_m \to g (L^\infty(R, R_+)) (m \to \infty)$，且 $\| g \|_{L^\infty} < 1$，则 $I_m \to I, c_m \to c (m \to \infty)$.

证明　$\forall\, u \in E\backslash\{0\}$，有

$$I_m(u)=I(u)-\int_R(g_m(t)-g(t))V(t,u)\mathrm{d}t\ ,$$

$$|I_m(u)-I(u)|\leqslant\|g_m-g\|_{L^\infty}\int_R V(t,u)\mathrm{d}t\ .$$

于是，$\forall\ u\in E, I_m(u)\to I(u)(m\to\infty)$.

由于 $0<c_m\leqslant c_\infty$，故 $\liminf\limits_{m\to\infty}c_m$ 和 $\limsup\limits_{m\to\infty}c_m$ 都存在.(1) 设 $\liminf\limits_{m\to\infty}c_m=c_*<c$，则存在子列 $\{c_{m_k}\}$ 使得 $c_{m_k}\to c_*, c_{m_k}<c$. 于是，由定理 2 知，$c_{m_k}$ 是 I_{m_k} 的临界值. 记 $c_k=c_{m_k}, I_k=I_{m_k}, u_k$ 是 I_k 在 φ_k 上的极小点，则有

$$I_k(u_k)\geqslant I_k(N(u_k))=I(N(u_k))-\int_R(g_k(t)-g(t))V(t,N(u_k))\mathrm{d}t$$

$$\geqslant c-\|g_k-g\|_{L_\infty}\int_R V(t,N(u_k))\mathrm{d}t\ .$$

若 $\{\int_R V(t,N(u_k))\mathrm{d}t\}$ 有有界子列，则 $c_*\geqslant c$. 矛盾！因为

$$\begin{aligned}I_k(u_k)&=I_k(u_k)-\frac{1}{p}I'_k(u_k)u_k\\&=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u_k\|^2-\int_R(1+g_k(t))[V(t,u_k)-\frac{1}{p}V'(t,u_k)u_k]\mathrm{d}t\\&\geqslant(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u_k\|^2,\end{aligned}$$

所以，$\{u_k\}$ 是有界的. 类似于引理 3 的证明可得，$\{u_k\}$ 有正下界. 而 $N(u_k)=\alpha_k u_k(\alpha_k\geqslant 0)$，故

$$\alpha_k^2\|u_k\|^2=\int_R(1+g_k(t))V'(t,\alpha_k u_k)\alpha_k u_k\mathrm{d}t.$$

若 $\{\alpha_k\}$ 有子列满足 $\alpha_k\leqslant 1$，则 $\{N(u_k)\}$ 有有界子列. 若 $\alpha_k>1$，且 $\inf\limits_k\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t>0$，则由($V_3$)得

$$\alpha_k^2\|u_k\|^2\geqslant p\alpha_k^p\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t,\quad \alpha_k^{p-2}\leqslant\frac{1}{p}(\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t)^{-1}\|u_k\|^2,$$

故 $\{\alpha_k\}$ 有有界子列，进而 $\{N(u_k)\}$ 有有界子列. 若 $\alpha_k>1$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t=0$，由于 $\forall\ v\in C_0^\infty(R,R^N), \|v\|=1$，有

$$I'_k(u_k)v=I'(u_k)v-\int_R(g_k(t)-g(t))V'(t,u_k)v\mathrm{d}t\ ,$$

故 $\{u_k\}$ 是 I 的 $(PS)_c$. 序列. 于是，由引理 4 知，或 $\{u_k\}$ 是相对紧的，或 $\{u_k(\cdot-q_kT)\}$ 是相对紧的 $(|q_k|\to\infty)$. 而

$$\int_R(1+g(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t=\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t+\int_R(g(t)-g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t\ ,$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\int_R(1+g(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t=0.$$

这样，应用 $\|g\|_{L^\infty}<1$，得

$$\lim_{k\to\infty}\int_R V(t,u_k)\mathrm{d}t=0,$$

矛盾！于是，必有$\inf\limits_k\int_R(1+g_k(t))V(t,u_k)\mathrm{d}t$大于0.因此$c_* \geqslant c$.

(2) 设$\limsup\limits_{m\to\infty} c_m = c^* > c$，则存在子列$\{c_{m_k}\}$，使得$c_{m_k}\to c^*$，$c_{m_k} > c$. 于是，$c$是$I$的临界值. 记$c_{m_k}=c_k, I_{m_k}=I_k, N_{m_k}=N_k$，则有$I$在$\varphi$上的极小点$u$，使得

$$c = I(u) \geqslant I(N_k(u)) \geqslant I_k(N_k(u)) - \|g-g_k\|_{L^\infty}\int_R V(t,N_k(u))\mathrm{d}t$$

$$\geqslant c_k - \|g-g_k\|_{L^\infty}\int_R V(t,N_k(u))\mathrm{d}t\ .$$

若$\{\int_R V(t,N_k(u))\mathrm{d}t\}$有有界子列，则$c \geqslant c^*$. 矛盾！与(1)类似只要证明：

(i) $\{N_k(u)\}$有界；

(ii) $\inf\limits_k\int_R(1+g_k(t))V(t,u)\mathrm{d}t > 0$.

因此，$c^* \leqslant c$. 这样，综合(1)和(2)，得$\lim\limits_{m\to\infty}\inf c_m = \lim\limits_{m\to\infty}\sup c_m = c$. 即$\lim\limits_{m\to\infty} c_m = c$.

推论2 设(HS)，$(\mathrm{HS})_m$满足定理5条件，u_m是I_m在φ_m上的极小点，且存在有界数列$\{t_m\}\subset R$使得$\lim\limits_{m\to\infty}\inf|u_m(t_m)| > 0$，则$c$是$I$的临界值.

证明 若$c < c_\infty$，则由定理2知c是I的临界值. 若$c = c_\infty$，则$\{u_m\}$满足$I_m(u_m)\to c$，$I'_m(u_m)=0$. 而$\{u_m\}$是有界的，故$I(u_m)\to c$，$I'(u_m)\to 0$. 即$\{u_m\}$是I的$(\mathrm{PS})_c$序列. 于是，由引理4知c是I的临界值.

评注7 在定理5和推论2中，我们可取g_m如下：$t\in[-(m-1)T,(m-1)T]$时，$g_m(t)=g(t)$；$t\in(-\infty,-mT]\cup[mT,+\infty)$时，$g_m(t)=0$；$t$取其它值时，$g_m(t)$连续可微，即$g_m$为$g$的截断函数. 这样就得到了一种寻找$I$在$\varphi$是的极小点的逼近方法.

参考文献：

[1] DING W Y, NI W M. *On the existence of positive entire solution of a semilinear elliptic equation* [J]. Arch. Rational Mech Anal., 1986, **91**(4): 283-308.

[2] RABINOWITZ P H. *On a class of nonlinear Schrodinger equations* [J]. Z. Angew Math. Phys., 1992, **43**(2): 270-291.

[3] RABINOWITZ P H, TANAKA K. *Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems* [J]. Math. Z., 1991, **206**(3): 473-499.

[4] MONTECCHIARI P. *Existence and multipticity of homoclinic orbits for a class of asymptotically periodic second order Hamiltonian systems* [J]. Ann. Mat. Pura Appl., 1995, **168**: 317-354.

[5] RABINOWITZ P H. *Multibump solutions of differential equations: an overview* [J]. Chinese J. Math., 1996, **24**: 1-36.

[6] ALESSIO F, CALDIROLI P, MONTECCHIARI P. *On the existence of homoclinic orbits for the asymptotically periodic Duffing equation* [J]. Topol. Methods, Nonlinear Anal., 1998, **12**: 275-292.

[7] SPRADLIN G S. *A perturbation of a periodic Hamiltonian system* [J]. Nonlinear Anal., 1999, **38**: 1003-1022.

[8] COTI Z V, RABINOWITZ P H. *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing*

superquadratic potentials [J]. J. Amer. Math. Soc., 1991, **4**: 693—727.
[9] ALAMA S, LI Y Y. *On multibump bound states for certain semilinear elliptic equations* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1992, **41**: 983—1026.
[10] MAWHIN J, WILLEM M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems* [M]. Springer Berlin, 1989.
[11] RABINOWITZ P H. *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems* [J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1990, **144**: 33—38.
[12] LIONS P L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the locally compact case* [J]. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Nonlineaire, 1984, **1**: 102—145, 223—283.
[13] CHEN C N, TZENG S Y. *Existence and multiplity results for homoclinic orbits of Hamiltonian systems* [J]. Electron, J. Differential, Equations, 1997, **7**: 19.

Homoclinic Orbits for a Class of Asymptotically Periodic Second Order Hamiltonian Systems

WANG Wei-min[1,2], WU Shao-ping[1]
(1. Dept. of Appl. Math., Zhejiang Univ., Hangzhou 310027, China;
2. Dept. of Appl. Math., Zhejiang Univ. of Tech., Hangzhou 310014, China)

Abstract: In this paper we study existence of homoclinic orbits of second order Hamiltonian system

$$-\ddot{u} + L(t)u = (1 + g(t))V'(t,u)$$

with variational methods, where L and V are periodic in t, $g(t) \to 0(|t| \to \infty)$.

Key words: Hamiltonian system; homoclinic orbits; concentration-compactness; critical points.