图的伴随多项式的两个因式分解定理及其应用*

张 秉 儒
(青海师范大学数学系，青海 西宁 810008)

摘 要：设 G 是 m 阶连通图，P_m 是 m 个顶点的路. 令 $S_{km+1}^{G(i)}$ 表示把 kG 的每一个分支的第 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 个顶点依次与星图 S_{k+1} 的 k 个1度顶点重迭后得到的图；令 $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$ 表示 q 阶图 G 的顶点 V_{i_1} 与 $S_{km+1}^{k(1)}$ 的 k 度顶点重迭后得到的图. 我们给出并证明了图 $S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1$ 与 $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$ 的伴随多项式的因式分解定理，并且得到了它们的补图的色等价图的结构性质.

关键词：色多项式；伴随多项式；因式分解；色等价性；色唯一性.
分类号：AMS(2000) 05C15/CLC number：O157.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0355-07

1 引 言

这里仅考虑简单图. 若图 G 与 H 无公共顶点，其并图记为 $G\cup H$，k 个图 G 的点不重并图记为 kG. 未加说明的术语和记号均来自文[1]. 由文[2]知图 G 的伴随多项式 $h(G,x)$ 都是首1的整系数多项式，其因式分解式是图的色性分析的主要理论依据，但整系数多项式却没有一般的因式分解方法，因此有必要从图自身的结构特征入手，去进行分门别类的研究，以建立图论观点下的因式分解的方法论.

本文给出了并证明图 $S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1$ 和图 $S_{i_1}^{S^*}(q,km)$ 的伴随多项式的因式分解定理，据此给出了图论观点下的两种新的因式分解方法，即挖顶补点法和断路补圈法，这两种方法直观性强且操作简便，较好地解决了上述两类图簇的伴随多项式的因式分解问题.

2 预备知识

设 $P(G,\lambda)$ 是图 G 的色多项式. 若 $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$，则称图 G 与 H 是色等价的；若能从 $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$ 可以推出图 H 与 G 同构，则称图 G 是色唯一的. 若图 G 的生成子图 M 的

* 收稿日期：2000-12-04
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10061003).
作者简介：张秉儒(1949-)，男，副教授.

每个分支都是完全图，则称 M 是 G 的理想子图，用 $N(G,k)$ 表示图 G 的具有 k 个分支的理想子图的个数，则有[2]

$$P(G,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)(\lambda)_k,\quad n=|V(G)|,\tag{1}$$

这里 $\overline{G}$ 是 G 的补图，$(\lambda)_k=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-k+1)$.

图 G 的伴随多项式定义为

$$h(G,x)=\sum_{k=1}^{n}N(G,k)x_k,\quad n=|V(G)|.\tag{2}$$

若 $h(H,x)=h(G,x)$，则称图 G 与 H 是伴随等价的；若从 $h(H,x)=h(G,x)$ 推出 $H\cong G$，则称图 G 是伴随唯一的.

比较(1)和(2)两式可推知如下的

引理 1 图 G 与 H 是伴随等价的当且仅当其补图 $\overline{G}$ 与 $\overline{H}$ 是色等价的；图 G 是伴随唯一的当且仅当其补图 $\overline{G}$ 是色唯一的.

引理 2[2] 设 u 和 v 是图 G 的两个相邻接的顶点，边 uv 不属于图 G 的任何三角形，则

$$h(G,x)=h(G-uv,x)+xh(G-\{u,v\},x).$$

引理 3[2] 设图 G 有 k 个分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，则

$$h(G,x)=h(G_1,x)h(G_2,x)\cdots h(G_k,x).$$

引理 4[2] P_n 和 C_n 分别是 n 个顶点的路和圈，则

(i) $h(P_n,x)=\sum\limits_{k\leqslant n}\binom{k}{n-k}x^k$； (ii) $h(C_n,x)=\sum\limits_{k\leqslant n}\frac{n}{k}\binom{k}{n-k}x^k,\quad n\geqslant 4$.

引理 5[3] (i) $h(P_n,x)=x[h(P_{n-1},x)+h(P_{n-2},x)]$；

(ii) $h(C_n,x)=x[h(P_{n-1},x)+2h(P_{n-2},x)],\quad n\geqslant 4$.

以下所用的图 G，我们总是假定 $h(G,x)$ 与 $h(G-v,x)$ $(v\in V(G))$ 由(2)式求出，$h(G,x)$ 简记为 $h(G)$，并不再重复说明.

令 S_{n+1} 表示 $n+1$ 个顶点的星图，它具有度序列 $(n,1,1,\cdots,1)$，K_1 表示一个孤立点. 设 G 是任意的 $m(\geqslant 3)$ 阶连通图，把图 G 的第 i 个顶点 $v_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 与星图 S_{k+1} 的 k 度顶点粘接后得到的新图记作 $\Psi_G^{(i)}(m,k)$（如图 1 所示），把 $k(\geqslant 2)$ 个上述的图 G 中同一顶点 $v_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 分别与 S_{k+1} 的 k 个 1 度顶点粘接后得到的新图记作 $S_{km+1}^{G(i)}$，图 $S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1$（如图 2 所示）.

引理 6 设 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 1$，则有

(i) $h(\Psi_G^{(i)}(m,1))=x[h(G)+h(G-v_i,x)]$； (3)

(ii) $h(\Psi_G^{(i)}(m,k))=x^k[h(G)+kh(G-v_i,x)]$， (4)

这里 $v_i\in V(G)$，$1\leqslant i\leqslant m$.

证明 如图 1 所示，在图 $\Psi_G^{(i)}(m,k)$ 中取边 v_iu_k，则由引理 2 和引理 3 即得

$$h(\Psi_G^{(i)}(m,k))=xh(\Psi_G^{(i)}(m,k-1))+x^kh(G-v_i)\tag{5}$$

注意到图 $\Psi_G^{(i)}(m,0)$ 就是图 G，在(5)式中取 $k=1$ 可推知(3)式成立. 由(3)和(5)两式，对顶点数 k 作数学归纳法即可证明(4)式成立.

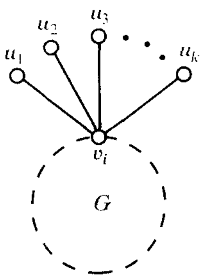

图 1　$\Psi_G^{(i)}(m,k)$

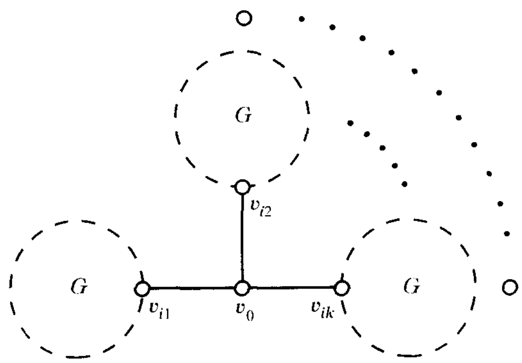

图 2　$S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1$

引理 7　设 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 2$，则有

(i) $h(S_{2m+1}^{G(i)})=xh(G)[h(G)+2h(G-v_i,x)]$；　(6)

(ii) $h(S_{km+1}^{G(i)})=xh^{k-1}(G)[h(G)+kh(G-v_i,x)]$，　(7)

这里 $v_i\in V(G)$，$1\leqslant i\leqslant m$.

证明　在图 2 中去掉 $k-1$ 个孤立点即得图 $S_{km+1}^{G(i)}$，其中取边 v_0v_{ik}，则由引理 2 和引理 3 得

$$h(S_{km+1}^{G(i)})=h(G)h(S_{(k-1)m+1}^{G(i)})+xh(G-v_i)h^{k-1}(G). \tag{8}$$

注意到图 $S_{m+1}^{G(i)}$ 就是图 $\Psi_G^{(i)}(m,1)$，在(8)式中取 $k=2$，则由引理 6(i)可推知(6)式成立；由(6)和(8)两式，对个数 k 作数学归纳法即可证明(7)式成立.

设 $V(P_m)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 及 $d(v_1)=1$，在图 1 和图 2 中均取 $G=P_m$，及 $v_i=v_1\in V(P_m)$，则由引理 6(ii)及引理 7 即得

引理 8　设 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 2$，则有

(i) $h(\Psi_P^{(1)}(m,k))=x^k[h(P_m)+kh(P_{m-1})]$；　(9)

(ii) $h(S_{km+1}^{P(1)})=xh^{k-1}(P_m)[h(P_m)+kh(P_{m-1})]$.　(10)

把 r 个圈 C_{m+1} 中每个 C_{m+1} 的一个顶点粘接在一起得到的图记作 ω_{rm+1}(如图 3 所示)，把图 $\omega_{(r-1)m+1}$ 的 $2(r-1)$ 度顶点与 P_{m+1} 的一个 1 度顶点粘接后得到的新图记作 φ_{rm+1}(如图 4 所示).

引理 9　设 $m\geqslant 3$，$r\geqslant 1$，则有

(i) $h(\omega_{m+1})=h(C_{m+1})=x[h(P_m)+2h(P_{m-1})]$；　(11)

(ii) $h(\omega_{rm+1})=xh^{r-1}(P_m)[h(P_m)+2rh(P_{m-1})]$；　(12)

(iii) $h(\varphi_{rm+1})=xh^{r-1}(P_m)[h(P_m)+(2r-1)h(P_{m-1})]$.　(13)

证明　(i) 注意到图 ω_{m+1} 就是图 C_{m+1}，则由引理 5(ii)可知(11)式成立.

(ii) 在图 3 和图 4 中均取边 v_0v_{r1}，则由引理 2 和引理 3 即得

$$h(\omega_{rm+1})=h(\varphi_{rm+1})+xh(P_{m-1})h^{r-1}(P_m); \tag{14}$$

$$h(\varphi_{rm+1})=h(P_m)h(\omega_{(r-1)m+1})+xh(P_{m-1})h^{r-1}(P_m). \tag{15}$$

由(14)和(15)两式立即得到

$$h(\omega_{rm+1})=h(P_m)h(\omega_{(r-1)m+1})+2xh(P_{m-1})h^{r-1}(P_m). \tag{16}$$

由(11)和(16)两式，对个数 r 作数学归纳法即可证明(12)式成立.

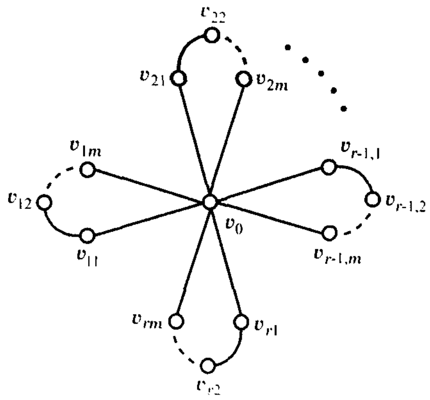

图 3　ω_{rm+1}

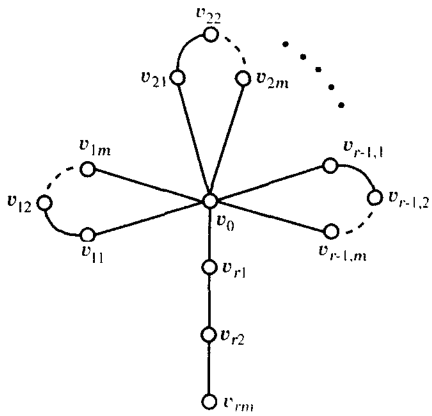

图 4　φ_{rm+1}

(iii) 由(12)和(15)两式可推知(13)式成立.

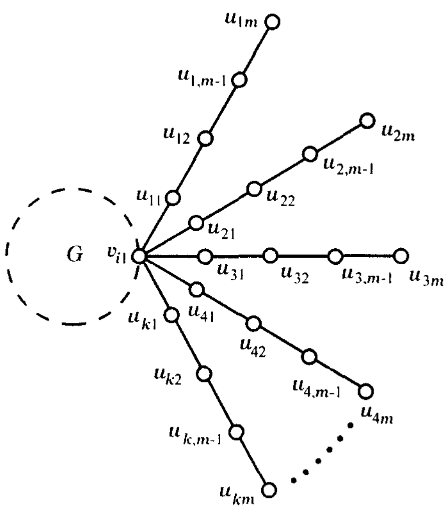

图 5　$G_{i_1}^{S^*}(q,km)$

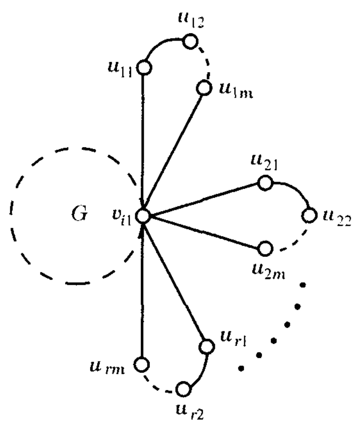

图 6　$G_{i_1}^{\omega}(q,rm)$

设 G 是 $q(\geqslant 3)$ 阶连通图，$v_{i1}\in V(G)$，把图 G 的顶点 v_{i1} 与图 $S_{km+1}^{P(1)}$ 的 k 度顶点粘接后所得到的图记作 $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$(如图 5 所示)；把图 G 的顶点 v_{i1} 与图 ω_{rm+1} 的 $2r$ 度顶点粘接后得到的图记作 $G_{i_1}^{\omega}(q,rm)$(如图 6 所示)；把图 G 的顶点 v_{i1} 与图 φ_{rm+1} 的 $2r-1$ 度顶点粘接后得到的图记作 $G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)$.

引理 10　设 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 2$，则有

(i) $h(G_{i_1}^{S^*}(q,2m))=h(P_m)[h(P_m)h(G)+2xh(P_{m-1})h(G-v_{i1})]$；　(17)

(ii) $h(G_{i_1}^{S^*}(q,km))=h^{k-1}(P_m)[h(P_m)h(G)+kxh(P_{m-1})h(G-v_{i1})]$.　(18)

证明 (i) 在图 5 中令 $k=1$,取边 $v_{i_1}u_{11}$,则由引理 2 和引理 3 即得

$$h(G_{i_1}^{S^*}(q,m)) = h(P_m)h(G) + xh(P_{m-1})h(G - v_{i1}). \tag{19}$$

在图 $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$ 中取边 $v_{i_1}u_{k1}$,同理可得

$$h(G_{i_1}^{S^*}(q,km)) = h(P_m)h(G_{i_1}^{S^*}(q,(k-1)m)) + xh(P_{m-1})h(G - v_{i1})h^{k-1}(P_m). \tag{20}$$

在(20)式中取 $k=2$,则由(19)式可推知(17)式成立.

(ii) 由(17)和(20)两式,对个数 k 作数学归纳法即可证明(18)式成立.

引理 11 设 $q\geqslant m\geqslant 3$, $r\geqslant 1$, 则有

(i) $h(G_{i_1}^{\omega}(q,rm))=h^{r-1}(P_m)[h(P_m)h(G)+2rxh(P_{m-1})h(G-v_{i1})]$; (21)

(ii) $h(G_{i_1}^{\varphi}(q,rm))=h^{r-1}(P_m)[h(P_m)h(G)+(2r-1)xh(P_{m-1})h(G-v_{i1})]$. (22)

证明 (i) 在图 6 中取 $r=1$,并取边 $v_{i_1}u_{1m}$,则由引理 2 和引理 3 及(19)式即得

$$\begin{aligned} h(G_{i_1}^{\omega}(q,m)) &= h(G_{i_1}^{S^*}(q,m)) + xh(P_{m-1})h(G - v_{i1}) \\ &= h(P_m)h(G) + 2xh(P_{m-1})h(G - v_{i1}). \end{aligned} \tag{23}$$

在图 6 中去掉边 $v_{i_1}u_{rm}$ 即得 $G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)$,在图 $G_{i_1}^{\omega}(q,rm)$ 与 $G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)$ 中同时取边 $v_{i_1}u_{r1}$,则由引理 2 和引理 3 分别得到

$$h(G_{i_1}^{\omega}(q,rm))= h(G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)) + xh(P_{m-1})h(G - v_{i1})h^{r-1}(P_m), \tag{24}$$

$$h(G_{i_1}^{\varphi}(q,rm))= h(P_m)h(G_{i_1}^{\omega}(q,(r-1)m)) + xh(P_m)h(G - v_{i1})h^{r-1}(P_m). \tag{25}$$

由(24)和(25)两式即得

$$h(G_{i_1}^{\omega}(q,rm)) = h(P_m)h(G_{i_1}^{\omega}(q,(r-1)m)) + 2xh(P_{m-1})h(G - v_{i1})h^{r-1}(P_m). \tag{26}$$

根据(23)和(26)两式,对个数作数学归纳法即可证明(21)式成立.

(ii) 由(25)和(21)两式可推知(22)式成立.

3 主要结果及证明

定理 1 设 $m\geqslant 3$, $k\geqslant 2$, 则有

$$h(S_{km+1}^{G(i)} \cup (k-1)K_1) = h^{k-1}(G)h(\Psi_G^{(i)}(m,k)). \tag{27}$$

证明 由引理 3,引理 7 和引理 6 即得

$$\begin{aligned} h(S_{km+1}^{G(i)} \cup (k-1)K_1) &= x^{k-1}h(S_{km+1}^{G(i)}) = x^{k-1} \cdot xh^{k-1}(G)[h(G) + kh(G - v_i)] \\ &= h^{k-1}(G)h(\Psi_G^{(i)}(m,k)), \end{aligned}$$

故(27)式成立.

定理 1 表明 $h(S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1)$ 在有理数域 Q 上是可约的,其因式可用挖顶补点法求得:

(1) 在图 $S_{km+1}^{G(i)}$ 中挖出原粘接顶点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}$ 将 S_{k+1} 完整地分离出,同时分离出 r 个图 G,每个图 G 被挖掉一个顶点.

(2) 把 S_{k+1} 的 k 度顶点补粘在一个图 G 被挖去的顶点处,得到图 $\Psi_G^{(i)}(m,k)$;把 $k-1$ 个孤

立点分别补粘在其余 $k-1$ 个图 G 中被挖去的顶点处,使图 G 保持原有的连通性.

(3) 图 $S_{km+1}^{G(i)}\cup(k-1)K_1$ 经挖和补两个步骤后,被分裂为 $k-1$ 个图 G 和一个图 $\Psi_G^{(i)}(m,k)$,则(27)式右端的因子随既确定.

定理 2 设 $m\geqslant3$, $k\geqslant2$, 则有

(i) $h(S_{(2r)m+1}^{P(1)})=h^r(P_m)h(\omega_{rm+1})$; (28)

$h(S_{(2r-1)m+1}^{P(1)})=h^{r-1}(P_m)h(\varphi_{rm+1})$. (29)

(ii) $h(G_{i_1}^{S^*}(q,2rm))=h^r(P_m)h(G_{i_1}^{\omega}(q,rm))$; (30)

$h(G_{i_1}^{S^*}(q,(2r-1)m))=h^{r-1}(P_m)h(G_{i_1}^{\varphi}(q,rm))$. (31)

证明 (i) 在引理 8(ii)中取 $k=2r,2r-1$,则由引理 9(i),(ii)分别得到(28)和(29)两式.

(ii) 在引理 10(ii)中取 $k=2r,2r-1$,则由引理 11 的(i)和(ii)分别得到(30)和(31)两式.

定理 2(i)给出了图 $S_{km+1}^{P(1)}$的伴随多项式的因式分解的另一种图论方法——割路补圈法:把图 $S_{km+1}^{P(1)}$的 k 度顶点和与其相邻的 k 个 2 度顶点分别记为 v_0 和 $v_{11},v_{21},\cdots,v_{k1}$,割开此图的边 v_0v_{i1}的与 v_{i1}关联的一端,分离出一条路 P_m;并把这一端与 1 度点 $v_{i+1,m}$关联,补成一个圈 $C_{m+1}(v_0\in C_{m+1})$.。$i=1,3,5,\cdots,[\frac{k}{2}]$,若 $k=2r$,则 $S_{2rm+1}^{P(1)}$分裂为 r 个路 P_m 和一个图 ω_{rm+1};若 $k=2r-1$,则 $S_{(2r-1)m+1}^{P(1)}$分裂为 $r-1$ 个路 P_m 和一个图 φ_{rm+1},这样(28)和(29)随既确定.

若图 G 的某一点幅射出 k 条长度为 $m(\geqslant3)$的路,由定理 2(ii)知,上述的割路补圈仍可进行.

设星图的 S_{t+1}的 t 个 1 度顶点为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_t}$,用 $S_{i_1i_2\cdots i_t}^{S^*}(t+1,t(km))$表示 S_{t+1}的每个 1 度顶点都幅射出 k 条长度为 $m(\geqslant3)$的路所成的图. 用 $\Psi_{S^*}^{(0)}(km+1,t)$表示 S_{t+1}的 t 度顶点与图 $S_{km+1}^{P(1)}$的 k 度顶点粘接后得到的图,$\Psi_{\omega}^{(0)}(rm+1,t)$和图 $\Psi_{\varphi}^{(0)}(rm+1,t)$分别表示 S_{t+1}的 t 度顶点依次与图 ω_{rm+1}和 φ_{rm+1}的最大度数的顶点粘接后得到的图.

定理 3 设 $m\geqslant3$, $r\geqslant1$, $1\leqslant t\leqslant m$ 则有

(i) $h(S_{i_1i_2\cdots i_t}^{S^*}(t+1,2rtm)\cup2r(t-1)K_1)$
$=[h(P_m)]^{(2r-1)(t-1)+r}\cdot h^{t-1}(\Psi_P^{(1)}(m,2r))\,h(\Psi_{\omega}^{(0)}(rm+1,t))$; (32)

(ii) $h(S_{i_1i_2\cdots i_t}^{S^*}(t+1,(2r-1)tm)\cup(2r-1)(t-1)K_1)$
$=[h(P_m)]^{(r-1)(2t-1)}\cdot h^{t-1}(\Psi_P^{(1)}(m,2r-1))\,h(\Psi_{\omega}^{(0)}(rm+1,t))$. (33)

证明 由挖顶补点法(即定理 1)得

$$h(S_{i_1i_2\cdots i_t}^{S^*}(t+1,t(km))\cup k(t-1)K_1)$$
$$=h^{t-1}(S_{km+1}^{P(1)}\cup(k-1)K_1)\,h(\Psi_{S^*}^{(0)}(km+1,t)). \quad (34)$$

由割路补圈法(即定理 2)得

$$h(\Psi_{S^*}^{(0)}(2rm+1,t))=h^r(P_m)\,h(\Psi_{\omega}^{(0)}(rm+1,t)), \quad (35)$$

$$h(\Psi_{S^*}^{(0)}((2r-1)m+1,t))=h^{r-1}(P_m)\,h(\Psi_{\varphi}^{(0)}(rm+1,t)). \quad (36)$$

由引理 3 和引理 8(或挖顶补点法)即得

$$h(S_{km+1}^{P(1)}\cup(k-1)K_1)=h^{k-1}(P_m)h(\Psi_P^{(0)}(m,k)). \quad (37)$$

令 $k=2r,2r-1$,则由上面的 4 个等式立即可推出(32)和(33)两式成立.

由定理 1 和定理 2(ii)及引理 3 得

$$h(S_{km+1}^{G(i)} \cup (k-1)K_1) = h((k-1)G \cup \Psi_G^{(i)}(m,k)), \tag{38}$$

$$h(G_{i_1}^{S^*}(q,2rm)) = h(rP_m \cup G_{i_1}^{\omega}(q,rm)), \tag{39}$$

$$h(G_{i_1}^{S^*}(q,(2r-1)m)) = h((r-1)P_m \cup G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)). \tag{40}$$

上述三个等式两边的图是伴随等价的,但它们不是伴随唯一的,故由引理 1 得到

定理 4 (i) 图 $S_{km+1}^{G(i)} \cup (k-1)K_1$ 与图 $(k-1)G \cup \Psi_G^{(i)}(m,k)$ 的补图是色等价的,但不是色唯一的.

(ii) 图 $G_{i_1}^{S^*}(q,2rm)$ 与图 $rP_m \cup G_{i_1}^{\omega}(q,rm)$ 的补图是色等价的,但均不是色唯一的;图 $G_{i_1}^{S^*}(q,(2r-1)m)$ 与图 $(r-1)P_m \cup G_{i_1}^{\varphi}(q,rm)$ 的补图是色等价的,但均不是色唯一的.

参考文献:

[1] BONDY J A. MUTRY U S R. *Graph Thoery with Application* [M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

[2] LIU Ru-ying. *Chromatic Uniqueness of $K_n - E(kP_s \cup rP_t)$* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1992, **12**: 207-214.

[3] ZHANG Bing-ru. *The method of determining irreducible path $P_n(n \geq 2)$* [J]. Acta Math. Scientia, 1997, **17**: 114-119.

Two Factorization Theorems of Adjoint Polynomials of Graphs with Application

ZHANG Bing-ru

(Dept. of Math., Qinghai Normal University, Xining 810008, China)

Abstract: Let G be a connected graph of order p and P_m be a path with m vertices. Let $S_{km+1}^{G(i)}$ denote the graph consisting of rG and the star S_{k+1} by coinciding the ith vertex of everyone of rG with $k-1$ vertices of degree 1 of S_{k+1}; let $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$ denote the graph obtained from a graph G of order 1 and $S_{km+1}^{P(1)}$ by coinciding the vertex v_{i1} of G with the vertex of degree k of $S_{km+1}^{P(1)}$. We give and prove that factorization theory of adjoint polynomials of graphs $S_{km+1}^{G(i)} \cup (k-1)K_1$ and $G_{i_1}^{S^*}(q,km)$, and we obtain some structure characteristics of the chromatically equivalent graphs of their complements.

Key words: chromatic polynomial; adjoint polynomial; factorization; chromatically equivalence; chromatically uniqueness.