第 23 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 2
2003 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2003

正则 m 叉树 T 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数的递归公式*

杨利民[1]，　姚　红[2]

(1. 大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024；2. 解放军信息工程大学理学院，河南 郑州 450000)

摘　要：在正则 m 叉树 T 中，删除 K_2 及端点关联边，通过所得子正则 m 叉树中分枝点、叶数和 m 之间内在联系，本文导出正则 m 叉树 T 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数递归公式. 特别当 $m=2$ 时，正则 2 叉树递归公式为：$A_t=A_{t/2}^2+2A_{t/4}^2A_{t/2}$，$t$ 为正则 2 叉树 T 的叶数.

关键词：正则 m 叉树；分支；因子；完全图；分枝点；叶数.

分类号：AMS(2000) 05C/CLC number：O157.5

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0362-05

1　引　言

定义 1　设 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$，$n\geqslant 1$，其中 K_i 为 i 个顶点完全图，若 M 是图 G 的子图，且 M 的每一个分支都同构于 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 中的某一个元素，则 M 叫做 $S^{(n)}$-子图，若 M 为 G 的生成子图，则 M 叫做 G 的一个 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子.

记 $N(G,k)$ 为 G 的恰有 k 个分支 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数. $A(G)$ 是 G 的所有 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数，$A(G)=\sum_{k=1}^{n}N(G,k)$.

文[1]利用分拆对应关系得到完全图 K_n 恰有 k 个分支数计数公式，文[2]利用组合卷积公式推出 $A(K_n)$ 计数公式，文[3]利用覆盖法得到图 $0\odot Cn$ 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数计数公式. 通过正则 m 叉树 T 的子正则 m 叉树中分枝点、叶数和 m 之间的关系，本文将导出正则 m 叉树 T 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数递归公式. 正则 2 叉树 T 在计算机及组合码中应用非常广泛，本文将得到 2 叉树 T 的递归公式及一些初值.

2　基本引理

引理 1[3]　任意 G，对 G 的给定点 P，若过 P 的一切完全图为 $K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_r},i_j\in[1,n]$，

* 收稿日期：2000-01-12
作者简介：杨利民(1965-)，男，博士生，副教授.

$1 \leqslant j \leqslant r$，$n$ 为图 G 的顶点数，则 G 的 $S^{(n)} = \{K_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$- 因子数

$$A(G) = \sum_{J=1}^{r} A(G - V(K_{i_j})),$$

其中 $G - V(K_{i_j})$，是指从 G 中去掉顶点 $V(K_{i_j})$ 和与 $V(K_{i_j})$ 相连接的边.

引理 2 若图 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 两两交集为空集，则

$$A(G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m) = A(G_1) \cdot A(G_2) \cdots A(G_m).$$

定义 2 在根树 T 中，若任何结点的出度最多为 m，则称 T 为 m 叉树；出度不为 0 的结点称为分枝点，每个分枝点的出度都等于 m，则称 T 为完全的 m 叉树；出度为零的点称为叶，若 T 的全部叶点位于同一层次，则称 T 为正则 m 叉树.

引理 3[4] 若 T 是正则 m 叉树，分枝点为 i，叶数为 t，则 $i(m-1) = t-1$.

引理 4 若 G 是星形图 $K_{1,m}$，则 $A(G) = m+1$. 证明略.

引理 5 若 G 是正则 m 叉树 T，分枝点数为 $m+1$，则

$$A(T) = (2m+1)(m+1)^{m-1}.$$

引理 6 设 T 是 m 叉正则树，有分枝点数为 i，叶数为 t，则删去含 0 点的一个 K_2，T 的子图 $T - V(K_2)$ 中有 $m-1$ 个分支，每个分支都是正则 m 叉树，分枝点为 $\frac{i-1}{m}$，叶数为 $\frac{t}{m}$，另外，有 m 个分支，每个分支都是正则 m 叉树，分枝点数为 $\frac{1}{m}(\frac{i-1}{m} - 1)$，叶数为 $\frac{t}{m^2}$.

证明略.

3 主要结论

T 是正则 m 叉树，分枝点数为 i，叶数为 t，约定 A_t 记 T 的 $S^{(n)} = \{K_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$- 因子数所有个数.

定理 如果 T 是正则 m 叉树，分枝点数 i，叶数为 t(如图 1)，则 $A_t = A_{t/m}^{m} + mA_{t/m^2}^{m} A_{t/m}^{m-1}$，初值：$A_m = m+1$，$A_{m^2} = (2m+1)(m+1)^{m-1}$.

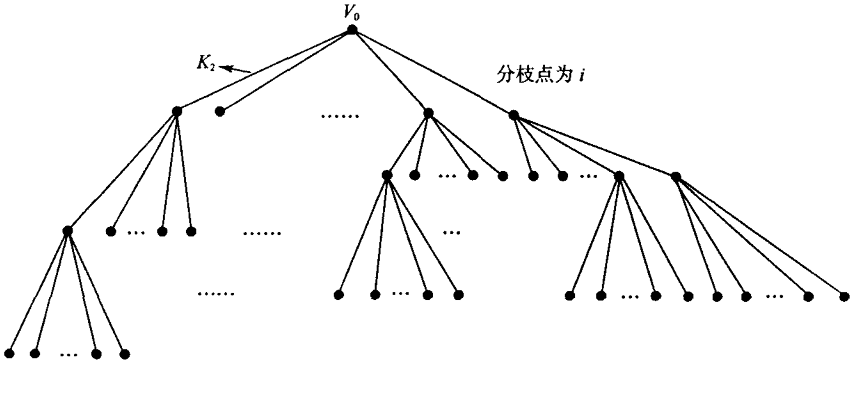

图 1 叶数为 t 的正则 m 叉树 T

证明　为了证明方便起见，约定如果T是正则m叉树，分枝点为i，叶数为t，则记T的$S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数所有个数为$A(T_{m,i,t})$. T是正则m叉树，类似引理5对给定点V_0作讨论，过V_0完全图只有K_1和K_2.

情况1　V_0作为K_1，则$S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数

$$A(T-V(K_1))=A^m(T_m,\frac{i-1}{m},\frac{t}{m}).$$

情况2　V_0含于K_2，共m个K_2，则$S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数为

$$mA(T-V(K_2))=mA^m(T_m,\frac{1}{m}(\frac{i-1}{m}-1),\frac{t}{m})\cdot A^{m-1}(T_m,\frac{i-1}{m},\frac{t}{m}).$$

综上所述，据引理1得到

$$A(T_{m,i,t})=\sum_{J=1}^{r}A(T-V(K_{ij}))=A^m(T_m,\frac{i-1}{m},\frac{t}{m})+$$
$$mA^m(T_m,\frac{1}{m}(\frac{i-1}{m}-1),\frac{t}{m^2})\cdot A^{m-1}(T_m,\frac{i-1}{m},\frac{t}{m}),$$

通过变化

$$\begin{aligned}A(T_{m,i,t})=&A^m(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m}-\frac{i-1}{m},\frac{t}{m})+\\&mA^m(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m^2}-\frac{1}{m-1},\frac{t}{m^2})\cdot A^{m-1}(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m}-\frac{i-1}{m},\frac{t}{m})\cdot\\&A(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot t-\frac{i-1}{m},t)\\=&A^m(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m}-\frac{i-1}{m},\frac{t}{m})+\\&mA^m(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m^2}-\frac{i-1}{m},\frac{t}{m^2})\cdot A^{m-1}(T_m,\frac{i-1}{m}\cdot\frac{t}{m}-\frac{i-1}{m},\frac{t}{m}).\end{aligned}$$

观察上述等式相当于某一个t的函数. 如果再约定正则m叉树T，分枝点数为i，叶数为t的$S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数所有个数为$A_t$，则$A_t=A_{t/m}^m+mA_{t/m^2}^m\cdot A_{t/m}^{m-1}$.

初值：正则m叉树T，叶数$t=m$，则$Am=m+1$，正则m叉树T，叶数$t=m^2$，则$Am^2=(2m+1)(m+1)^{m-1}$.

推论　如果T是正则2叉树，分枝点数为i，叶数为t，则$A_t=A_{t/2}^2+2A_{t/4}^2A_{t/2}$，初值：$A_2=3$，$A_4=15$.

例　计算正则2叉树，它的叶数$t=8$，如图2，$A_8=?$

解　据推论有

$$A_8=A_{8/2}^2+2A_2^2A_4=A_4^2+2A_2^2A_4=15^2+2\times3^2\times15=495.$$

下面是正则2叉树T的一些初值表：

t	2	4	8	16	32
A_t	3	15	495	467775	44804658375

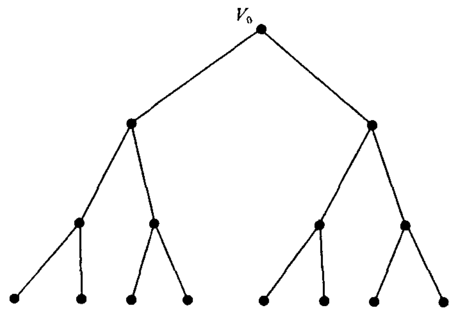

图 2　叶数 $t=8$ 的正则叉树

4　问题

正则 m 叉树 T 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子数所有个数 A_t 的递归公式是非线性的，它是高次递归关系，因此，利用组合数学和偏微分方程都十分困难导出 A_t 的计数公式，A_t 的渐近逼近也很难建立，这些问题有待解决. 当然对任何叶数有 A_t 的递归公式，可以建立算法利用计算机算出 A_t 的值.

参考文献：

[1] WANG Tian-ming, YANG Li-min. *Enumeration of Ideal Subgraphs* [C]. Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Edited by Yousel Alavi Fan R. K. Chung Rorald, L. Gradham D. Frank Hsu, ISBN-89871-2874, 539—545.

[2] 杨利民，王天明. 完全分支数 $N(K_n,k)$ 卷积公式及分拆和上界 [J]. 数学研究与评论，1999，**19**(3)：631—632.
YANG Li-min, WANG Tian-ming. *A convolution formula of $N(K_n,k)$ and upper bounds of fartition sums* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, **19**(3): 631—632. (in Chinese)

[3] 杨利民. $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数递归计数 [J]. 数学研究与评论，1991，**1**：78.
YANG Li-min. *A recurrence relation for the number of factors of $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1991, **1**: 78. (in Chinese)

[4] 张一立，唐常杰，等. 离散数学 [M]. 成都：四川大学出版社，1988.
ZHANG Yi-li, TANG Chang-jie, etc. *Discrete Mathematics* [M]. Chengdu: Sichuan Univ. Press, 1988. (in Chinese)

[5] 杨利民. 理想子图计数及应用 [J]. 大连理工大学学报，1989，**29**(5)：605—609.
YANG Li-min. *Enumeration of ideal graph with application* [J]. J. Dalian Univ. of Tech., 1989, **29** (5): 605—609. (in Chinese)

[6] HARARY F, PALMER E. *Graphical Enume Ration* [M]. New York/London, 1973.

[7] LARRY J. *Cummings, Combinatorics Words* [M]. Academic Press Canada, 1983.

[8] CHEN W K. *Applied Graph Theory* [M]. North-Holland, 1974.

[9] Bondy J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. The Macmil Press, LTD, 1976.
[10] AMAHASHI A, KANO M. *On Factors with given components* [J]. Discrete Math., 1982, **42**: 1—6.

A Recurrence Formula for the $S^{(n)}$-Factoring Number of a Regular m-furcating tree

YANG Li-min[1], YAO Hong[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;
2. PLA. Information Engeneering University, Zhengzhou 450000, China)

Abstract: For a regular m-furcating tree, the authors derive a recurrence formula of the number of its $S^{(n)}=\{K_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$-factor through analysing the relation among i, t and m of sub-furcating trees. Specially, $m=2$, the recurrence formula of a regular binary tree is as follows: $A_t=A_{t/4}^2+2A_{t/4}^2A_{t/2}$, with initial conditions: $A_2=3$, $A_4=15$.

Key words: regular m-furcating tree; component; factor; complete graph; brach's vertice; the number of leaves.