第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

# 存贮问题的优化算法*

李　敏
(东北财经大学数经系，辽宁 大连 116025)

**摘　要**：本文根据经济模型的特殊结构，利用对偶线性规划的理论和其它技巧，简化求解过程，有利于模型的普及应用.

**关键词**：模型；对偶规划.
**分类号**：AMS(2000) 90C05/CLC number：O221.1
**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0367-04

## 1 引　言

随着现代科学技术的发展和应用，单纯从技术发明和改造中来提高生产效率，得到更大的利润难度较大；而改进流通管理，提高流通效率，则会提高利润收益.因此，挖掘流通领域中物流的潜力，便成了人们关注的热点.然而存贮问题是多阶段决策问题，常用动态规划方法求解.但动态规划解题有一个缺点，就是对实际问题根据贝尔曼最优性原理得出函数方程后，却没有一种统一处理方法，必须结合其它数学技巧求解，计算琐复不便.鉴于此，本文就存贮问题，采用线性规划方法，建立数学模型加以研究，以期对商业、企业提供一种初等简易的测算手段.

## 2 优化算法

常见存贮问题的数学模型：

$$\max f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(p_iy_i-b_ix_i),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{t=1}^{i}(x_t-y_t)\leqslant C-I, & i=1,2,\cdots,n\\ y_1\leqslant I, & \\ y_i-\sum\limits_{t=1}^{i-1}(x_t-y_t)\leqslant I, & i=2,3,\cdots,n\\ x_i\geqslant 0,y_i\geqslant 0, & i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1}$$

* 收稿日期：2000-11-06
作者简介：李　敏(1958- )，女，副教授.

其中，销售价为 $p_i$，采购价为 $b_i$，期初库存为 $I$，仓库的最高容量为 $C$，进货量为 $x_i$，销售量为 $y_i$.

首先，从约束条件可以看出系数均为 $-1,1$ 或 $0$. 设以 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 及 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 作为对偶问题的变量，则上述的原始问题(1)化为对偶问题

$$\min g(u,v) = E_1(C-I) + F_1 I, \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} E_i - F_{i+1} \geqslant -b_i, & i=1,2,\cdots,n-1 \\ E_n \geqslant -b_n \\ -E_i + F_i \geqslant p_i, & i=1,2,\cdots,n \\ F_i \geqslant F_{i+1}, E_i \geqslant E_{i+1}, & i=1,2,\cdots,n-1 \\ E_i \geqslant 0,\ F_i \geqslant 0, & i=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$E_i = \sum_{t=i}^{n} u_t,\ F_i = \sum_{t=i}^{n} v_t \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

由于(3)中每一个约束条件最多仅有二个变量；特别地，约束 $E_n \geqslant -b_n$ 仅有一个变量，故从它出发，再考虑到变量的非负性，若取

$$E_n = \max\{-b_n, 0\} = 0, \tag{5}$$

则它显然是满足约束(3)，且取值最小者. 据此，同理若取

$$F_n = \max\{E_n + p_n, 0\} = \max\{p_n, 0\} = p_n, \tag{6}$$

则它亦是满足约束(3)且取值最小者，获得 $E_n$ 和 $F_n$ 后，其它各 $E_i$ 及 $F_i$ 若由以下两式

$$E_i = \max\{F_{i+1} - b_i, E_{i+1}\} \tag{7}$$

$$F_i = \max\{E_i + p_i, F_{i+1}\} \tag{8}$$

依次求得，则它们亦有满足约束(3)且取值最小的特点，这样，最后求得的 $E_1, F_1$，必满足(2)，即它们使目标函数取得最小值，故为最优解(亦可用反证法证出上述求得 $E_i, F_i, i=1,2,\cdots n$ 是问题(2)—(3)的最优解). 另一方面，$E_1$ 及 $F_1$ 可用 $p_i$ 及 $b_i$ 的线性函数表示，由(5)—(8)式，故可设

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i p_i - \sum_{i=1}^{n} 1_i b_i, \quad F_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i - \sum_{i=1}^{n} s_i b_i, \tag{9}$$

式中的 $d_i, 1_i, r_i, s_i$ 均为系数，因对偶的目标函数值为

$$\begin{aligned} g(u^*, v^*) &= E_1(C-I) + F_1 I \\ &= (\sum_{i=1}^{n} d_i p_i - \sum_{i=1}^{n} 1_i b_i)(C-I) + (\sum_{i=1}^{n} r_i p_i - \sum_{i=1}^{n} s_i b_i) I \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(C-I)d_i + Ir_i] p_i - \sum_{i=1}^{n} [(C-I)l_i + IS_i] b_i. \end{aligned}$$

由对偶理论 $g(u^*, v^*) = f(x^*, y^*)$，即

$$\sum_{i=1}^{n} [(C-I)d_i + Ir_i] p_i - \sum_{i=1}^{n} [(C-I)1_i + IS_i] b_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^* p_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^* b_i.$$

式中的 $x_i^*$ 及 $y_i^*$ 表示最佳解时的进货量与销售量，令上式的对应系数相等，即

$$x_i^* = (C-I)1_i + Is_i, \quad y_i^* = (C-I)d_i + Ir_i \quad (i=1,2,\cdots n). \tag{10}$$

为了证明(10)即是原问题(1)的最优解，则根据以上的分析只需证明(1)的可行解，即证明

它满足(1)的约束条件，为此，我们先从分析 $E_i, F_i$ 的结构入手.

由(5)—(8)，知 $E_{n-1}, F_{n-1}$ 的表达式如下：

$$E_{n-1}=\begin{cases}p_n-b_{n-1}, & p_n>b_{n-1}\\ 0, & p_n\leqslant b_{n-1}\end{cases} \tag{11}$$

$$F_{n-1}=\begin{cases}E_{n-1}+p_{n-1}=\begin{cases}p_n-b_{n-1}+p_{n-1}, & p_n>b_{n-1},\ p_{n-1}>b_{n-1}\\ p_{n-1}, & p_n\leqslant b_{n-1}, p_{n-1}>p_n\end{cases}\\ p_n, p_{n-1}\leqslant p_n, p_{n-1}\leqslant b_{n-1}\end{cases} \tag{12}$$

进一步分析，得到下述结论.

**引理** $E_i, F_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是关于 $p_k, b_k(k=i,i+1,\cdots,n)$ 的线性函数，$p_k$ 的系数是 1 或 0，$b_k$ 的系数是 $-1$ 或 0，$E_i$ 的所有系数之和为 0，且 $F_i$ 的所有系数之和为 1，表达式若按 $b_k, p_k$ $(k=i,i+1,\cdots,n)$ 下标下降的顺序从左到右排列，当下标相同时 $b_k$ 排在前，$p_k$ 排其后，则非 0 系数恰好是正负相间的，且 $E_i$ 最左边的非 0 数(若存在)必为 $p_{j_1}(j_1\leqslant n)$，最右边的非 0 数(若存在)必为 $-b_{j_2}(j_2\geqslant i)$；$F_i$ 最左边的非 0 数必为 $p_{m_1}(m_1\leqslant n)$，最右边的非 0 数必为 $p_{m_2}(m_2\geqslant i)$.

**定理** 由(10)确定的 $x_i^*, y_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 是原问题(1)的最优解.

**证明** 首先，当 $n=1$ 时，则容易求得 $x_1^*=0, y_1^*=I$. 它显然满足问题(1)的约束.

现假定对规模为 $n-1$，即由

$$\min g(u,v)=E_2(C-I)+F_2I,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}E_i-F_{i+1}\geqslant -b_i, & i=2,3,\cdots,n-1\\ E_n\geqslant -b_n, & \\ -E_i+F_i\geqslant p_i, & i=2,3,\cdots,n\\ E_i\geqslant E_{i+1}, F_i\geqslant F_{i+1}, & i=2,3,\cdots,n-1\\ E_i\geqslant 0, F_i\geqslant 0, & i=2,3,\cdots,n\end{cases} \tag{13}$$

求得的最优解

$$E_2=\sum_{i=2}^{n}\bar d_i p_i-\sum_{i=2}^{n}\bar 1_i b_i,\quad F_2=\sum_{i=2}^{n}\bar r_i p_i-\sum_{i=2}^{n}\bar s_i b_i. \tag{14}$$

再经(10)，得到的 $\bar x_i^*, \bar y_i^*(i=2,\cdots,n)$，满足问题相应约束，往证对规模 $n$ 亦然. 由(6)，(7)知

$$E_1=\max\{F_2-b_1,E_2\}=\begin{cases}F_2-b_1, F_2-b_1>E_2\\ E_2, \quad F_2-b_1\leqslant E_2\end{cases}$$

$$F_1=\max\{E_1+p_1,F_2\}=\begin{cases}F_2-b_1+p_1, F_2-b_1>E_2, p_1>b_1\\ E_2+p_1, \quad F_2-b_1\leqslant E_2, E_2+p_1>F_2\\ F_2, \quad E_2+p_1>F_2, p_1\leqslant b_1\end{cases}$$

则 $E_1, F_1$ 的表达式有以下四种可能

(1) $\begin{cases}E_1=E_2\\ F_1=F_2\end{cases}$； (2) $\begin{cases}E_1=E_2\\ F_1=E_2+p_1\end{cases}$； (3) $\begin{cases}E_1=F_2-b_1\\ F_1=F_2-b_1+p_1\end{cases}$； (4) $\begin{cases}E_1=F_2-b_1\\ F_1=F_2\end{cases}$

可分别讨论之.

(1) 由(14)及(9)知，此时 $d_1=1_1=r_1=s_1=0, d_i=\bar d_i, 1_i=\bar 1_i, r_i=\bar r_i, s_i=\bar s_i(i=2,3,\cdots,n)$. 再代入(10)，有 $x_1^*=0, y_1^*=0, x_i^*=\bar x_i^*, y_i^*=\bar y_i^*(i=2,3,\cdots,n)$. 由归纳法假定易见 $x_i^*, y_i^*(i=1,$

$2,\cdots,n$)满足(1)的约束条件.

(2) 此时对目标函数(2)有

$$E_1(C-I)+F_1I=E_2(C-I)+(E_2+p_1)I=E_2C+p_1I$$
$$=\sum_{i=2}^{n}(\bar{d}_iC)p_i-\sum_{i=2}^{n}(\bar{1}_iC)b_i+Ip_1.$$

从而有 $x_1^*=0,y_1^*=I,x_i^*=\bar{1}_iC,y_i^*=\bar{d}_iC(i=2,\cdots,n)$. 于是

$$\sum_{t=1}^{i}(x_t^*-y_t^*)=(x_1^*-y_1^*)+\sum_{t=2}^{i}(x_t^*-y_t^*)=-I+\sum_{t=2}^{i}(\bar{1}_t-\bar{d}_t)C.$$

由于 $\sum_{t=2}^{n}(\bar{1}_t-\bar{d}_t)=0$,而 $\bar{1}_t,\bar{d}_t$ 非 0 即 1,且正负相间,于是有 $\sum_{t=i+1}^{n}(\bar{1}_t-\bar{d}_t)=0$ 或 $-1$(按照引理的排列顺序,若此式最右边的非 0 数是 $\bar{d}_{i+j}$,则为 $-1$,若为 $\bar{1}_{i+j}$ 则为 0,于是 $\sum_{t=2}^{i}(\bar{1}_t-\bar{d}_t)=0$ 或 1). 从而 $\sum_{t=1}^{i}(x_t^*-y_t^*)=-I$ 或者 $C-I(i=1,2,\cdots,n-1)$. 同理 $y_i^*-\sum_{t=1}^{i-1}(x_t^*-y_t^*)=I$ 或者 $-(C-I)(i=1,2,\cdots,n)$,这说明 $x_i^*,y_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 满足(1)的约束条件.

同理可证(3),(4) 两种情况,至此归纳完成.

**参考文献:**


[1] BORGWARDT K H. *The average number of pivot steps required by the simplex-method is polynomial* [J]. Zeitschrift füt Operations, Research, Series A: Theory, 1982, **26**(5): 157—177.

[2] LI Min. *A simple and easy method finding initial basic feasible solution* [J]. Journal of Liaoning Normal University, 2000, **23**(3): 254—256. (in Chinese)

[3] ZHENG Yan. *A study on decision support system of production plan and control* [J]. Operations Research and Management Science, 2000, **9**(2): 94—99. (in Chinese)


# Optimization Algorithm of Storage Problems


LI-min

(Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025, China)



**Abstract**: On the basis of the special structure of the economy model, the course of solution by applying the theory of the dual linear programming and other ingenuity is simplified.



**Key words**: model; dual programming.