第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

几类 n 阶常微分方程三、四点边值问题*

刘 颖
(沈阳航空工业学院，辽宁 沈阳 110034)

摘 要：本文利用上、下解方法讨论了几类 n 阶常微分方程三、四点非线性边值问题解的存在性和唯一性.

关键词：边值问题；上下解；存在唯一性.
分类号：AMS(2000) 34B15/CLC number：O175.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)03-0481-07

1 引 言

上下解方法是研究高阶非线性微分方程边值问题的基本方法之一，已有一些人用此方法得到了一些存在性结果（多数是二、三、四阶方程的二、三点边值问题的），而用这种方法得到的解是否唯一，却很少有人提及. 本文利用这种方法讨论了几类 n 阶方程三、四点边值问题解的存在性，并同时讨论了唯一性. 本文所讨论的边值问题至少有 $n-2$ 个边界条件是非线性的，而它的线性边界条件不同于以往的条件，不是一个边界点处各阶导数之间所满足的线性关系，而是通过两个边界点处 $n-2$ 阶导数间的线性关系给出的，这给解的存在唯一性证明带来了困难，本文类似文献[1]引进了修正函数，使得讨论得以顺利进行.

本文讨论了方程

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

分别满足边界条件(2)—(6)

$$\begin{cases} y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{n-2}(b_0) \\ g_i(y(d_{i-1}), y'(d_{i-1}), \cdots, y^{(n-2)}(d_{i-1})) = 0, i = 1, 2, \cdots, n-2 \end{cases}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), g_{n-1}(y(b), y'(b), \cdots, y^{(n-1)}(b)) = 0 \\ g_i(y(d_{i-1}), y'(d_{i-1}), \cdots, y^{(n-2)}(d_{i-1})) = 0, i = 1, 2, \cdots, n-2 \end{cases}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{(n-2)}(b_0), g_n(y(a), y'(a), \cdots, y^{(n-1)}(a)) = 0 \\ g_i(y(d_{i-1}), y'(d_{i-1}), \cdots, y^{(n-2)}(d_{i-1})) = 0, i = 1, 2, \cdots, n-2 \end{cases}, \tag{4}$$

* 收稿日期：2000-12-06
作者简介：刘 颖 (1966-)，女，硕士，讲师.

$$\begin{cases} y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), g_{n+1}(y(b), y'(b), \cdots, y^{(n-1)}(b)) = 0 \\ g_i(y(d_{i-1}), y'(d_{i-1}), \cdots, y^{(n-2)}(d_{i-1})) = 0, i = 1,2,\cdots,n-2 \end{cases}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{(n-2)}(b_0), g_{n+2}(y(a), y'(a), \cdots, y^{(n-1)}(a)) = 0 \\ g_i(y(d_{i-1}), y'(d_{i-1}), \cdots y^{(n-2)}(d_{i-1})) = 0, i = 1,2,\cdots,n-2 \end{cases}, \tag{6}$$

的边值问题解的存在性和唯一性. 其中 $a,b,a_0,b_0,\delta_1,\delta_2\in R$ 且 $a<a_0\leqslant b_0\leqslant b, 0<\delta_1,\delta_2\leqslant 1$; $d_i(i=0,1,\cdots,n-3)\in\{a,b\}$ 且 $d_i(i=0,1,\cdots,n-3)$ 取值各自独立; g_1-g_{n+2} 是满足一定条件的非线性函数.

2 线性边值问题

我们首先讨论方程(1)满足下列线性边界条件的边值问题解的存在性唯一性.

$$y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{(n-2)}(b_0), y^{(i)}(d_i) = \lambda_i, i = 0,1,\cdots,n-3, \tag{7}$$

$$y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), y^{(n-2)}(b) = \lambda_{n-2}, y^{(i)}(d_i) = \lambda_i, i = 0,1,\cdots,n-3, \tag{8}$$

$$y^{(n-2)}(a) = \lambda_{n-2}, y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{(n-2)}(b_0), y^{(i)}(d_i) = \lambda_i, i = 0,1,\cdots,n-3, \tag{9}$$

$$y^{(n-2)}(a) = \delta_1 y^{(n-2)}(a_0), y^{(n-1)}(b) = \lambda_{n-2}, y^{(i)}(d_i) = \lambda_i, i = 0,1,\cdots,n-3, \tag{10}$$

$$y^{(n-1)}(a) = \lambda_{n-2}, y^{(n-2)}(b) = \delta_2 y^{(n-2)}(b_0), y^{(i)}(d_i) = \lambda_i, i = 0,1,\cdots,n-3, \tag{11}$$

其中, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-2}\in R, d_i(i=0,1,\cdots,n-3), \delta_1,\delta_2,a,b,a_0,b_0$ 同前.

为了叙述方便, 记 H_i 表示如下条件:

(H_1) $f(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 于 $[a,b]\times R^n$ 上连续.

(H_2) 方程(1)的任何解若不能延展到 $[a,b]$ 上就必在其最大存在区间上无界.

定义 1 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足

$$\Psi^{(n)}(t)\leqslant f(t,\Psi(t),\cdots,\Psi^{(n-1)}(t)), \varphi^{(n)}(t)\geqslant f(t,\varphi(t),\cdots,\varphi^{(n-1)}(t))$$

且有 $\varphi^{(n-2)}(t)\leqslant\Psi^{(n-2)}(t), t\in[a,b]$, 而对于 $i=0,1,\cdots,n-3$, $\varphi^{(i)}(t)$ 和 $\Psi^{(i)}(t)$ 的关系满足($t\in[a,b]$):

$$\varphi^{(i)}(t)\leqslant\Psi^{(i)}(t) \quad 如果 \quad \begin{cases} d_i=a \text{ 且 } \varphi^{(i+1)}(t)\leqslant\Psi^{(i+1)}(t) \\ d_i=b \text{ 且 } \varphi^{(i+1)}(t)\geqslant\Psi^{(i+1)}(t) \end{cases} \quad 或$$

$$\varphi^{(i)}(t)\geqslant\Psi^{(i)}(t) \quad 如果 \quad \begin{cases} d_i=a \text{ 且 } \varphi^{(i+1)}(t)\geqslant\Psi^{(i+1)}(t) \\ d_i=b \text{ 且 } \varphi^{(i+1)}(t)\leqslant\Psi^{(i+1)}(t) \end{cases} \quad 或$$

则称 $\Psi(t),\varphi(t)$ 满足关系(12) (12)

定义 2 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足关系(12)且有

$$\varphi^{(n-2)}(a)\leqslant \delta_1\varphi^{(n-2)}(a_0), \Psi^{(n-2)}(a) \geqslant \delta_1\Psi^{(n-2)}(a_0), \tag{13}$$

$$\varphi^{(n-2)}(b)\leqslant \delta_2\varphi^{(n-2)}(b_0), \Psi^{(n-2)}(b) \geqslant \delta_2\Psi^{(n-2)}(b_0), \tag{14}$$

则称 Ψ,φ 为边值问题(1),(7)的上下解.

定义 3 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足关系(12)及(13)式, 则称 Ψ,φ 分别为边值问题(1),(8)的上下解.

定义 4 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足关系(12)及(14)式, 则称 Ψ,φ 分别为边值问题(1),(9)的上下解.

定义5 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足关系(12)及(13)式，且有 $\varphi^{(n-1)}(b)\leqslant\Psi^{(n-1)}(b)$，则称 Ψ,φ 分别为边值问题(1)，(10)的上下解.

定义6 若存在 $\Psi,\varphi\in c^n[a,b]$ 满足关系(12)及(14)式，且有 $\varphi^{(n-1)}(a)\geqslant\Psi^{(n-1)}(a)$，则称 Ψ,φ 分别为边值问题(1)，(11)的上下解.

(H_3) 在定义1中，记 $S=\{i:i$ 是整数，$0\leqslant i\leqslant n-3,\varphi^{(i)}(t)\leqslant\Psi^{(i)}(t)\}$，$T=\{i:i$ 是整数，$0\leqslant i\leqslant n-3,\varphi^{(i)}(t)\geqslant\Psi^{(i)}(t)\}$.

函数 $f(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 $[a,b]\times R^n$ 上满足：当 $i\in S$ 时，关于变元 y_i 不增；当 $i\in T$ 时，关于变元 y_i 不减，且有当 $y_{n-2}>z_{n-2}$ 时，对任意的 $y_i,z_i\in R,i=0,1,\cdots,n-3$ 及 $y_{n-1}\in R$ 都满足

$$f(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-2},y_{n-1})>f(t,z_0,z_1,\cdots,z_{n-2},y_{n-1}).$$

记 $M^{(i)}(t)=\max\{\varphi^{(i)}(t),\Psi^{(i)}(t)\}$，$m^{(i)}(t)=\min\{\varphi^{(i)}(t),\Psi^{(i)}(t)\}$，$i=0,1,\cdots,n-2$，$t\in[a,b]$，并设

$$P(t,u)=\begin{cases}\delta_1\Psi^{(n-2)}(t),u>\Psi^{(n-2)}(t)\\ \delta_1 u,\varphi^{(n-2)}(t)\leqslant u\leqslant\Psi^{(n-2}(t)\\ \delta_1\varphi^{(n-2)}(t),u<\varphi^{(n-2)}(t)\end{cases},\ Q(t,u)=\begin{cases}\delta_2\Psi^{(n-2)}(t),u>\Psi^{(n-2)}(t)\\ \delta_2 u,\varphi^{(n-2)}(t)\leqslant u\leqslant\Psi^{(n-2)}(t).\\ \delta_2\varphi^{(n-2)}(t),u<\varphi^{(n-2)}(t)\end{cases}$$

将边界条件(7)－(11)中的 $y^{(n-2)}(a)=\delta_1 y^{(n-2)}(a_0)$，$y^{(n-2)}(b)=\delta_2 y^{(n-2)}(b_0)$，替换成 $y^{(n-2)}(a)=P(a_0,y^{(n-2)}(a_0))$，$y^{(n-2)}(b)=Q(b_0,y^{(n-2)}(b_0))$，得相应的修正边界条件(7)′－(11)′.

定理1 若函数 $f(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 $[a,b]\times R^n$ 上连续有界，则边值问题(1)，(7)′－(1)，(11)′ 都存在解 $y(t)$.

证明 首先证明边值问题(1)，(7)′ 存在解 $y(t)$. 定义映射 $T:c^{n-1}[a,b]\to c^{n-1}[a,b]$

$$T[y(t)]\overset{\text{def}}{=}l(t)+\int_a^b G(t,s)f(s,y(s),y'(s),\cdots,y^{(n-1)}(s))\mathrm{d}s,$$

其中

$$l(t)=\mu_0+\mu_1 t+\mu_2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\mu_{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\mu_{n-1}=\frac{Q(b_0,y^{(n-2)}(b_0))-P(a_0,y^{(n-2)}(a_0))}{b-a}$$

$$\mu_{n-2}=P(a_0,y^{(n-2)}(a_0))-\mu_{n-1}a$$

$$\mu_i=\lambda_i-\mu_{i+1}d_i-\mu_{i+2}\frac{d_i^2}{2!}-\cdots-\mu_{n-1}\frac{d_i^{n-i-1}}{(n-i-1)!},i=n-3,n-4,\cdots,0$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n-1}A_i(s)\cdot\dfrac{t^i}{i!}+\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!},a\leqslant s\leqslant t\leqslant b,\\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}A_i(s)\cdot\dfrac{t^i}{i!},a\leqslant t\leqslant s\leqslant b,\end{cases}$$

$A_{n-1}(s)=\dfrac{-(b-s)}{b-a}$，$A_{n-2}(s)=-aA_{n-1}(s)$，当 $i=n-3,n-4,\cdots,0$ 时

$$A_i(s)=\begin{cases}-d_iA_{i+1}(s)-\dfrac{d_i^2}{2!}A_{i+2}(s)-\cdots-\dfrac{d_i^{n-i-1}}{(n-i-1)!}A_{n-1}(s),d_i=a\text{ 时},\\ -d_iA_{i+1}(s)-\dfrac{d_i^2}{2!}A_{i+2}(s)-\cdots-\dfrac{d_i^{n-i-1}}{(n-i-1)!}A_{n-1}(s)-\dfrac{(b-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},d_i=b\text{ 时},\end{cases}$$

我们易证 T 是一个连续紧映射. 因为 f,l 均是有界的，我们能选取充分大的 $M>0$，使得 T 在

$$D\overset{\text{def}}{=}\{x\in C^{n-1}[a,b]:|x(t)|,|x'(t)|,\cdots,|x^{(n-1)}(t)|\leqslant M\}$$

中有不动点 $y(t)$，则有 $y(t)$ 就是边值问题(1)，(7)′ 的解.

边值问题(1)，(8)′ − (1)，(11)′ 解的存在性同理可证.

定理 2 假设条件$(H_1)-(H_3)$成立，且边值问题(1)，(7) − (1)，(11) 都分别存在上下解 $\Psi(t),\varphi(t)$，则对任意的实数 $m^{(i)}(d_i)\leqslant\lambda_i\leqslant M^{(i)}(d_i),i=0,1,\cdots,n-3$，及 $\varphi^{(n-2)}(a)\leqslant\lambda_{n-2}\leqslant\Psi^{(n-2)}(a)$（在边界条件(9) 中）或 $\varphi^{(n-2)}(b)\leqslant\lambda_{n-2}\leqslant\Psi^{(n-2}(b)$（在边界条件(8) 中）或 $\varphi^{(n-1)}(a)\geqslant\lambda_{n-2}\geqslant\Psi^{(n-1)}(a)$（在边界条件(11) 中）或 $\varphi^{(n-1)}(b)\leqslant\lambda_{n-2}\leqslant\Psi^{(n-1)}(b)$（在边界条件(10) 中），边值问题(1)，(7) − (1)，(11) 都分别存在唯一解 $y(t)$，且有

$$m^i(t)\leqslant y^{(i)}(t)\leqslant M^{(i)}(t),i=0,1,\cdots,n-2,t\in[a,b].\tag{15}$$

证明 存在性. 设 $x\leqslant z$，定义 $\delta(x,y,z)$ 为：$\delta(x,y,z)=\begin{cases}z,y>z,\\ y,x\leqslant y\leqslant z,\\ x,y<x.\end{cases}$

记 $\overline{y_i}=\delta(m^{(i)}(t),y_i,M^{(i)}(t)),i=0,1,\cdots,n-3,t\in[a,b]$.

定义函数列：

$$F(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$$
$$=\begin{cases}f(t,\overline{y_0},\overline{y_1},\cdots,\overline{y_{n-3}},\Psi^{(n-2)}(t),y_{n-1})+\dfrac{y_{n-2}-\Psi^{(n-2)}(t)}{1+y_{n-2}-\Psi^{(n-2)}(t)},y_{n-2}>\Psi^{(n-2)}(t),\\ f(t,\overline{y_0},\overline{y_1},\cdots,\overline{y_{n-3}},y_{n-2},y_{n-1}),\varphi^{(n-2}(t)\leqslant y_{n-2}\leqslant\Psi^{(n-2)}(t),\\ f(t,\overline{y_0},\overline{y_1},\cdots,\overline{y_{n-3}},\varphi^{(n-2)}(t),y_{n-1})-\dfrac{\varphi^{(n-2)}(t)-y_{n-2}}{1+\varphi^{(n-2)}(t)-y_{n-2}},y_{n-2}<\varphi^{(n-2)}(t),\end{cases}$$

$$\Phi_m(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})=\begin{cases}F(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-2},m),y_{n-1}>m,\\ F(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-2},y_{n-1}),|y_{n-1}|<m,\\ F(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-2},-m),y_{n-1}<-m,\end{cases}$$

则 $\Phi_m(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$在$[a,b]\times R^n$ 上连续有界，由定理 1，方程

$$y^{(n)}=\Phi_m(t,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})\tag{1$'$}$$

分别存在满足边界条件(7)′ − (11)′的解 $y_m(t)$，且当 $m>N_0=\max\{\max\limits_{t\in[a,b]}\varphi^{(n-1)}(t),\max\limits_{t\in[a,b]}\Psi^{(n-1)}(t)\}$ 时，有

$$\varphi^{(n-2)}(t)\leqslant {y_m}^{(n-2)}(t)\leqslant\Psi^{(n-2)}(t),t\in[a,b],$$

假设上式不成立，不妨设右端不成立，即存在某个 $m>N_0$ 及 $t_0\in[a,b]$ 使 ${y_m}^{(n-2)}(t_0)>\Psi^{(n-2)}(t_0)$，记 $u(t)=y_m(t)-\Psi(t)$，即 $u^{(n-2)}(t_0)>0$，设 s^* 是 $u^{(n-2)}(t)$ 在$[a,b]$上的最大值点，以下分五种情形证明：

情形 Ⅰ. 若 $y_m(t)$ 是边值问题(1)′，(7)′ 的解，则有

$$u^{(n-2)}(a)={y_m}^{(n-2)}(a)-\Psi^{(n-2)}(a)\leqslant P(a_0,{y_m}^{(n-2)}(a_0))-\delta_1\Psi^{(n-2)}(a_0)\leqslant 0,$$

$$u^{(n-2)}(b)=y_m^{(n-2)}(b)-\Psi^{(n-2)}(b)\leqslant Q(b_0,y_m^{(n-2)}(b_0))-\delta_2\Psi^{(n-2)}(b_0)\leqslant 0,$$

所以 $s^*\in(a,b)$,进而

$$u^{(n-2)}(s^*)>0,u^{(n-1)}(s^*)=0,u^{(n)}(s^*)\leqslant 0. \tag{16}$$

情形 Ⅰ. 若 $y_m(t)$ 是边值问题(1)′,(8)′ 的解,则有 $u^{(n-2)}(a)\leqslant 0,u^{(n-2)}(b)=\lambda_2-\Psi^{(n-2)}(b)\leqslant 0$,进而仍有(16)式.

情形 Ⅱ. 若 $y_m(t)$ 是边值问题(1)′,(9)′ 的解,则有 $u^{(n-2)}(b)\leqslant 0,u^{(n-2)}(a)=\lambda_2-\Psi^{(n-2)}(a)\leqslant 0$,进而仍有(16)式.

情形 Ⅳ. 若 $y_m(t)$ 是边值问题(1)′,(10)′ 的解,则有 $u^{(n-2)}(a)\leqslant 0$,所以 $s^*\in(a,b]$,若 $s^*\in(a,b)$,则仍有(16)式,若 $s^*=b$,则存在充分小的 $\delta>0$ 使在 $(b-\delta,b]$ 上,$u^{(n-1)}(t)\geqslant 0$,因为 $u^{(n-1)}(b)=\lambda_2-\Psi^{(n-1)}(b)\leqslant 0$,得 $u^{(n-1)}(b)=0$ 进而 $u^{(n)}(b)\leqslant 0$,即仍有(16)式成立.

情形 Ⅴ. 若 $y_m(t)$ 是边值问题(1)′,(11)′ 的解,则有 $u^{(n-2)}(b)\leqslant 0$,所以 $s^*\in[a,b)$,若 $s^*\in(a,b)$,则仍有(16)式,若 $s^*=a$,则存在充分小的 $\delta>0$ 使在 $[a,a+\delta)$ 上,$u^{(n-1)}(t)\leqslant 0$,因为 $u^{(n-1)}(a)=\lambda_2-\Psi^{(n-1)}(a)\geqslant 0$,得 $u^{(n-1)}(a)=0$ 进而 $u^{(n)}(a)\leqslant 0$,即仍有(16)式成立.

以下类似文献[3]中引理 2 可证边值问题(1),(7)-(1),(11)都分别存在解 $y(t)$.

唯一性. 首先证明边值问题(1),(7)存在唯一解.假设(1),(7)存在不同解 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$,记 $u(t)=y_1(t)-y_2(t)$,则存在 $s_0\in[a,b]$ 使 $u(s_0)\neq 0$,又因 $u(d_0)=0$,所以存在 $s_1\in[a,b]$ 使 $u'(s_1)\neq 0$,又因 $u'(d_1)=0$,所以存在 $s_2\in[a,b]$ 使 $u''(s_2)\neq 0$,依此类推,存在 $s_{n-2}\in[a,b]$ 使 $u^{(n-2)}(s_{n-2})\neq 0$,不妨设 $u^{(n-2)}(s_{n-2})>0$,设 s^* 是 $u^{(n-2)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点,因 $u^{(n-2)}(a)=\delta_1u^{(n-2)}(a_0),u^{(n-2)}(b)=\delta_2u^{(n-2)}(b_0)$ 所以 s^* 一定可在 (a,b) 内取到,进而有(16)式成立.

另一方面,由条件(H_3)及(16)式中前两个式子得:

$$u^{(n)}(s^*)=f(s^*,y_1(s^*),y_1'(s^*),\cdots,y_1^{(n-1)}(s^*))-f(s^*,y_2(s^*),y_2'(s^*)\cdots,y_2^{(n-1)}(s^*))>0,$$

这与(16)式中第三个式子矛盾,因此边值问题(1),(7)存在唯一解.

若在上述证明中,$y_1(t),y_2(t)$ 是边值问题(1),(8)的解,则有 $u^{(n-2)}(a)=\delta_1u^{(n-2)}(a_0)$,$u^{(n-2)}(b)=0$,即 s^* 仍可在 (a,b) 内取到,完全类似可证矛盾.若在上述证明中,$y_1(t),y_2(t)$ 是边值问题(1),(9)的解,则有 $u^{(n-2)}(a)=0,u^{(n-2)}(b)=\delta_2u^{(n-2)}(b_0)$,同理可证矛盾.若 $y_1(t)$,$y_2(t)$ 是(1),(10)的解,则 $u^{(n-2)}(a)=\delta_1u^{(n-2)}(a_0),u^{(n-1)}(b)=0$,$s^*$ 可在 $(a,b]$ 上取得,而无论 $s^*\in(a,b)$ 还是 $s^*=b$ 都有(16)成立,则亦同理可证矛盾.若 $y_1(t),y_2(t)$ 是(1),(11)的解,则 $u^{(n-1)}(a)=0,u^{(n-2)}(b)=\delta_2u^{(n-2)}(b_0)$,$s^*$ 可在 $[a,b)$ 上取得,无论 $s^*\in(a,b)$ 还是 $s^*=a$ 都有(16)式成立,同理可证矛盾.即边值问题(1),(7)—(1),(11)都存在唯一解.

3 非线性边值问题

记 G_i 表示如下条($i=1,2,\cdots,n+2$)

$G_i(i=1,2,\cdots,n-2)$:$g_i(y_0,y_1,\cdots,y_{n-2})$ 在 R^{n-1} 上连续;关于 y_{n-2} 不增;当 $j\in S$ 且 $j\neq i-1$ 时,关于 y_j 不增;当 $j\in T$ 且 $j\neq i-1$ 时,关于 y_j 不减.还满足当 $y_{i-1}\neq z_{i-1}$ 时,对任意

的 $y_j,z_j(j=0,1,\cdots,n-2$ 且 $j\neq i-1)$ 都有：$g_i(y_0,y_1,\cdots,y_{n-2})\neq g_i(z_0,z_1,\cdots,z_{n-2})$，且 $g_i(\varphi(d_{i-1}),\varphi'(d_{i-1}),\cdots,\varphi^{(n-2)}(d_{i-1}))\leqslant 0\leqslant g_i(\Psi(d_{i-1}),\cdots,\Psi^{(n-2)}(d_{i-1}))$.

G_{n-1}：$g_{n-1}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 R^n 上连续；关于 y_{n-1} 不减；当 $j\in S$ 时关于 y_j 不增；当 $j\in T$ 时关于 y_j 不减.还满足当 $y_{n-2}\neq z_{n-2}$ 时，对任意的 $y_j,z_j(j=0,1,\cdots,n-3,n-1)$，

$$g_{n-1}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})\neq g_{n-1}(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1})$$

且 $g_{n-1}(\varphi(b),\varphi'(b),\cdots,\varphi^{(n-1)}(b))\leqslant 0\leqslant g_{n-1}(\Psi(b),\Psi'(b),\cdots,\Psi^{(n-1)}(b))$.

G_n：$g_n(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 R^n 上连续；关于 y_{n-1} 不增；当 $j\in S$ 时关于 y_j 不增，当 $j\in T$ 时关于 y_j 不减.还满足当 $y_{n-2}\neq z_{n-2}$ 时，对任意的 $y_j,z_j(j=0,1,\cdots,n-3,n-1)$

$$g_n(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})\neq g_n(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1})$$

且 $g_n(\varphi(a),\varphi'(a),\cdots,\varphi^{(n-1)}(a))\leqslant 0\leqslant g_n(\Psi(a),\Psi'(a),\cdots,\Psi^{(n-1)}(a))$.

G_{n+1}：$g_{n+1}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 R^n 上连续；关于 y_{n-2} 不增；当 $j\in S$ 时关于 y_j 不增，当 $j\in T$ 时关于 y_j 不减；还满足当 $y_{n-1}\neq z_{n-1}$ 时，对任意的 $y_j,z_j(j=0,1,\cdots,n-2)$ 都有

$$g_{n+1}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})\neq g_{n+1}(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}),$$

且 $g_{n+1}(\varphi(b),\varphi'(b),\cdots,\varphi^{(n-1)}(b))\leqslant 0\leqslant g_{n+1}(\Psi(b),\Psi'(b),\cdots,\Psi^{(n-1)}(b))$.

G_{n+2}：$g_{n+2}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 在 R^n 上连续，关于 $y_j(j=0,\cdots,n-2)$ 的单调性同 g_{n+1}，还满足当 $y_{n-1}\neq z_{n-1}$ 时，对任意的 $y_j,z_j(j=0,1,\cdots,n-2)$ 都有

$$g_{n+2}(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})\neq g_{n+2}(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}),$$

且 $g_{n+2}(\varphi(a),\varphi'(a),\cdots,\varphi^{(n-1)}(a))\leqslant 0\leqslant g_{n+2}(\Psi(a),\Psi'(a),\cdots,\Psi^{(n-1)}(a))$.

引理 2 假设条件$(H_1)-(H_3)$，G_{n-2}成立，且边值问题(1)，(7)存在上下解 $\Psi(t)$，$\varphi(t)$，则对任意的 λ_i：$m^{(i)}(d_i)\leqslant\lambda_i\leqslant M^{(i)}(d_i)$，$i=0,1,\cdots,n-4$，方程(1)存在唯一解 $y(t)$ 满足边界条件

$$\begin{cases}y^{(n-2)}(a)=\delta_1 y^{(n-2)}(a_0),\ y^{(n-2)}(b)=\delta_2 y^{(n-2)}(b_0),\ y^{(i)}(d_i)=\lambda_i(i=0,1,\cdots,n-4),\\ g_{n-2}(y(d_{n-3}),y'(d_{n-3}),\cdots,y^{(n-2)}(d_{n-3}))=0,\end{cases}\tag{17}$$

且 $y(t)$ 满足(15)式.

类似文献[3]中定理 1 可证.

定理 3 设条件$(H_1)-(H_3)$，G_1-G_{n-2}成立，且边值问题(1)，(2)存在上解 $\Psi(t)$ 和下解 $\varphi(t)$，则边值问题(1)，(2)存在唯一解 $y(t)$，且 $y(t)$ 满足(15)式.

定理 4 设条件$(H_1)-(H_3)$，G_1-G_{n-1}成立，且边值问题(1)，(8)存在上解 $\Psi(t)$ 和下解 $\varphi(t)$，则边值问题(1)，(3)存在唯一解.

定理 5 设条件$(H_1)-(H_3)$成立，G_1-G_{n-2}，G_n成立，且边值问题(1)，(9)存在上解 $\Psi(t)$ 和下解 $\varphi(t)$，则边值问题(1)，(4)存在唯一解.

定理 6 设条件$(H_1)-(H_3)$，G_1-G_{n-2}，G_{n+1}成立，且边值问题(1)，(10)存在上解 $\Psi(t)$ 和下解 $\varphi(t)$，则边值问题(1)，(5)存在唯一解.

定理 7 设条件$(H_1)-(H_3)$，G_1-G_{n-2}，G_{n+2}成立，且边值问题(1)，(11)存在上解 $\Psi(t)$ 和下解 $\varphi(t)$，则边值问题(1)，(6)存在唯一解.

利用定理 2，并反复利用引理 2 的方法即可证明.

参考文献：

[1] 刘辉昭，钟坦谊，蒋达清．非线性三阶微分方程的四点边值问题［J］．纯粹数学与应用数学，1998，**14**(3)：40—45．

LIU Hui-zhao, ZHONG Tan-yi, JIANG Da-qing. *A four point boundary value problem for nonlinear third-order differential equation* [J]. Pure and Applied Mathematics, 1998, **14**(3): 40—45. (in Chinese)

[2] MICHAL C. *A remark on a paper of W.G. kelly* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1978, **63**: 687—690.

[3] 刘　颖．非线性 n 阶微分方程二点及三点边值问题解的存在性［J］．沈阳建筑工程学院学报，1993，**3**：30—36．

LIU Ying. *Existence of soulutions for nonlinear two and three point boundary value problems of nth-order differential equation* [J]. J. ShenYang Architecture and Civil Engineering University, 1993, **3**: 30—36. (in Chinese)

Three and Four Point Boundary Value Problems for n th-order Nonlinear Differential Equations

LIU Ying

(Shenyang Institute of Aeronautial Engineering, Liaoning 110034, China)

Abstract: This paper proves the existences and uniqueness of solutions to three and four point boundary value problems of nth-order nonlinear differential equations by the upper-lower solution method.

Key words: boundary value problem; Upper and Lower solution; existence and uniqueness.