第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

具有跟踪性可扩流的吸引子的稳定性*

王福海[1]， 卢占会[1]， 王晓华[2]
(1. 华北电力大学计算科学信息系，河北 保定 071003；2. 华北电力大学网管中心，河北 保定 071003)

摘 要：本文证明了紧致流形上具有跟踪性可扩流的链回复吸引子均为若干基本集的并而且关于 Hausdorff 度量稳定.

关键词：跟踪性；可扩性；吸引子；基本集；稳定性.
分类号：AMS(2000) 58J30,54H20/CLC number：O189.3
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0493-04

1 引言及主要结论

近些年来人们对吸引子的稳定性进行了许多研究，获得了大量重要结论. [1] 中证明了紧致流形上的连续流的吸引子的几个重要性质以及关于 Hausdorff 度量稳定的通有性，但其证明方法不是构造性的，因此对给定的系统而言并没有回答其吸引子是否稳定的问题. [6] 中证明了紧致流形上具有跟踪性的可扩流的 ω 极限集、链回归集等几个重要的不变集具有“稳定性”，那么其吸引子是否也具有稳定性呢?另外，该类系统的吸引子的结构有无特别的性质?本文试图采用[1] 中给出的吸引子的定义形式研究如上两个问题.

设(X,d) 为紧致度量空间，$\varphi: R\times X\to X$ 是 X 上的连续流. 对 $A\subset X$，记 $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$，$B(A,\varepsilon)=\{x\in X\mid d(x,A)<\varepsilon\}$. 对任意 $t\in R$，记 $\varphi_t(\cdot)=\varphi(t,\cdot)$，$\Phi(X)=\{\varphi\mid\varphi$ 为 X 上的连续流$\}$. 用 $\omega(x)$，$\alpha(x)$，$\Omega(\varphi)$，$CR(\varphi)$ 分别表示 φ 过 x 的轨道的 ω 极限集、α 极限集、φ 的非游荡点集、φ 的链回归集. 在 $\Phi(X)$ 上定义度量 $\bar{d}$ 为：

$$\bar{d}(\varphi,\psi)=\sup\{d(\varphi_t(x),\psi_t(x))\mid x\in X,t\in[0,1]\}.$$

记 $X^*=\{K\mid K\subset X$ 为闭子集$\}$，r 为 X^* 上的 Hausdorff 度量.

定义 1.1[1] $A\subset X$ 为非空的闭不变集，若存在 A 的邻域 U 使得 $A=\bigcap\limits_{t\geq 0}\varphi_t(\bar{U})$，则称 A 是 φ 的一个吸引子，$D(A)=\{x\in X\mid d(\varphi_t(x),A)\to 0,t\to+\infty\}$ 称为吸引子 A 的吸引盆.

定义 1.2[1] 称 φ 的吸引子 A_φ 在 $\Phi(X)$ 中关于度量 S 是稳定的，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 φ 的邻域 W 使得对任意的 $\psi\in W$，ψ 有一个吸引子 A_ψ 满足 $S(A_\varphi,A_\psi)\leqslant\varepsilon$.

$\varphi\in\Phi(X)$ 的可扩性、跟踪性定义分别来自于[2]，[3]，并由[2] 中引理 1 可知当(X,φ) 可扩时 φ 仅有有限个不动点且均孤立. 据此，在本文的以下讨论中恒设 φ 是无不动点的可扩流.

---

* 收稿日期：2000-12-06
基金项目：华北电力大学青年科研基金资助项目(060205)
作者简介：王福海(1962-)，男，硕士. 副教授.

定理[4](谱分解定理) 设$(\Omega(\varphi),\varphi|\Omega(\varphi))$是具有跟踪性的可扩流,则$\Omega(\varphi)$可表示为$\varphi$的有限个互不相交的闭不变集之并:$\Omega(\varphi)=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_s$,使得$(R_i,\varphi|R_i)$是拓扑传递的,并称$R_i(i=1,2,\cdots,s)$为$\varphi$的基本集.

定义 1.3 称$\varphi\in\Phi(X)$的吸引子A是链回复的,如果$A\subset CR(\varphi)$.

本文的主要结论是:

定理 1.4 若X为紧致流形,$\varphi\in\Phi(X)$是具有跟踪性的可扩流,则对φ的任一链回复吸引子A,存在φ的基本集$R_{i_1},R_{i_2},\cdots,R_{i_m}(1\leqslant m\leqslant s)$,使得$A=\bigcup_{k=1}^{m}R_{i_K}$.

定理 1.5 若X为紧致流形,$\varphi\in\Phi(X)$是具有跟踪性的可扩流,则φ的任一链回复吸引子在X^*中关于Hausdorff度量稳定.

2 几个预备引理

引理 2.1[1] 设A为$\varphi\in\Phi(X)$的一个吸引子,则对任意$\varepsilon>0$,存在开集V满足:

(1) $A\subset V\subset B(A,\varepsilon)$;

(2) $A=\bigcap_{t\geqslant 0}\varphi_t(\overline{V})=\lim_{t\to+\infty}\varphi_t(\overline{V})$;

(3) $\varphi_t(V)\subset V\quad(\forall\, t\geqslant 0)$;

(4) 设G是A的任意邻域,则存在常数$T>0$使得当$t\geqslant T$时,$\varphi_t(\overline{V})\subset G$.

引理 2.2 设$D(A)$为X中关于$\varphi\in\Phi(X)$的吸引子A的吸引盆,则$D(A)$是不变的开集.

证明 对任意$x\in D(A)$,因$\omega(x)=\omega(\varphi_t(x))\subset A(\forall\, t\in R)$,故$\varphi_t(x)\subset D(A)$,因此$D(A)$是$A$的不变邻域.又因$\lim_{t\to+\infty}d(\varphi_t(x),A)=0$,故存在$T>0$及引理2.1中的$A$的邻域$V$使得$\varphi_T(x)\in V\subset D(A)$,因此存在$x$的邻域$N$使得$\varphi_T(N)\subset V$,由$D(A)$的不变性可知$N\subset D(A)$,即$D(A)$是开集.

引理 2.3 设K是$D(A)$的紧子集,则对A的任意邻域G,存在$T>0$,当$t\geqslant T$时,

$$\varphi_t(K)\subset G.$$

证明 假设存在A的邻域G使得对任意的$t>T$均有$\varphi_t(K)|G\neq\varnothing$.

取$x_m\in K$且$\varphi_{t_m}(x_m)\notin G$,不妨设$x_m\to x_0$,则$x_0\in K\subset D(A)$.由引理2.1,存在开集$V$及$T_0>0$,当$t\geqslant T_0$时$\varphi_t(\overline{V})\subset G$,且$A\subset V\subset D(A)$.设$\varphi_{t_0}(x_0)\in V$,则对充分大的$m$有$\varphi_{t_0}(x_m)\in V$,于是当$t\geqslant T_0$时$\varphi_{t+t_0}(x_m)\in G$即当$t_m>t_0+T_0$时$\varphi_{t_m}(x_m)\in G$,矛盾.

推论 2.4 若A是φ的吸引子,$x\notin A$,$K\subset D(A)$为紧子集,则存在T_0,当$t\leqslant T_0$时,

$$\varphi_t(x)\notin K.$$

证明 因$x\notin A$,且A紧,故存在A的邻域G使得$x\notin G$.由引理2.3,存在$T>0$使得$\varphi_t(K)\subset G(t\geqslant T)$.因此$x\notin\varphi_t(K)(\forall\, t\geqslant T)$,$\varphi_{-t}(x)\notin K$,$-t\leqslant -T)$,取$T_0=-T$即可.

引理 2.5 设$U\subset X$为非空开集且对$\varphi\in\Phi(X)$存在$T>0$使得$t\geqslant T$时,$\varphi_t(\overline{U})\subset U$,则$A=\bigcap_{t\geqslant 0}\varphi_t(\overline{U})$是$\varphi$的吸引子且$\overline{U}\subset D(A)$.

证明 任取$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_2>t_1\geqslant T$,由$\varphi_t(\overline{U})\subset U(t\geqslant T)$有:$\varphi_{T+t_n-t_i}(\overline{U})\subset U\subset\overline{U}(i=1,2,\cdots,n)$,从而$\varphi_{t_n+T}(\overline{U})\subset\varphi_{t_i}(\overline{U})(i=1,2,\cdots,n)$.于是$\varphi_{T+t_n}(\overline{U})\subset\bigcap_{i=1}^{n}\varphi_{t_i}(\overline{U})$,即$\bigcap_{i=1}^{n}\varphi_{t_i}(\overline{U})\neq\varnothing$.由有限交性质可知$\bigcap_{t\geqslant T}\varphi_t(\overline{U})$是非空的闭集.

对任意的 $t\in[0,T]$ 及 $t_1\in[-T,0]$，由 $\varphi_T(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$ 可知：$\varphi_{t+T}(\bar{U})\subset\varphi_t(\bar{U})$，$\varphi_{t_1+T}(\bar{U})\subset\varphi_{t_1}(\bar{U})$. 又由 $\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}(\forall\, t\geqslant T)$ 可知：$\varphi_T(\bar{U})\subset\bar{U}\subset\varphi_{-t}(\bar{U})(\forall\, t\leqslant -T)$. 因此 $\bigcap\limits_{t\geqslant 0}\varphi_t(\bar{U})=\bigcap\limits_{t\in R}\varphi_t(\bar{U})$. 令 $A=\bigcap\limits_{t\geqslant 0}\varphi_t(\bar{U})$，则 A 是不变的闭集且 U 为 A 的邻域，由定义 1.1 可知 A 是 φ 的吸引子且 $\bar{U}\subset D(A)$.

推论 2.6 设 $U\subset X$ 为非空开集，若存在 $T>0$ 使得对任意 $t\in[T,T+1]$ 有 $\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$，则 $A=\bigcap\limits_{t\geqslant 0}\varphi_t(\bar{U})$ 是 φ 的吸引子且 $\bar{U}\subset D(A)$.

证明 不妨设 $N-1\leqslant T\leqslant N$($N$ 为正整数). 由 $\varphi_T(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$ 及 $\varphi_{T+1}(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$ 可知：$\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}(\forall\, t\in[2T,2T+2])$. 再由 $\varphi_{2T}(\bar{U})$，$\varphi_{2T+1}(\bar{U})$、$\varphi_{2T+2}(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$，可知：$\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}(\forall\, t\in[3T,3T+3])$. 如此下去可知对任意正整数 n 有

$$\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}\quad(\forall\, t\in[nT,nT+n]).$$

于是当 $t\geqslant NT$ 时，$\varphi_t(\bar{U})\subset U\subset\bar{U}$，由引理 2.5 推论得证.

3 定理的证明

本节恒设 φ 为具有跟踪性的可扩流.

定义 3.1[5] 设 (X,ψ) 为连续流，X 上关于 ψ 的滤子是一有限紧子集列 $\{M_0,M_1,\cdots,M_s\}$ 满足(1) $\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_s=X$；(2) 对任意 $t>0$，$\varphi_t(M_i)\subset\mathrm{int}M_i\quad(i=1,2,\cdots,s)$.

引理 3.2[4,5] 设 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 为 φ 的基本集，则：

(1) $CR(\varphi)=\Omega(\varphi)=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_s$；

(2) 在 $R_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中 φ 的周期点稠密；

(3) 在 X 上存在关于 φ 的滤子 $\{M_0,M_1,\cdots,M_s\}$ 使得

$$R_i=\bigcap_{t\in R}\varphi_t(M_i|\mathrm{int}M_{i-1})=\bigcap_{t\in R}\varphi_t((\mathrm{int}M_i)|M_{i-1}).$$

引理 3.3 设 $A\subset M_i|\mathrm{int}M_{i-1}$ 是 φ 的一个吸引子，则 $A=R_i$.

证明 因 $A\subset M_i|\mathrm{int}M_{i-1}$，由 A 的不变性可知，$A\subset\varphi_t(M_i|\mathrm{int}M_{i-1})(\forall\, t\in R)$. 因此 $A\subset\bigcap\limits_{t\in R}\varphi_t(M_i|\mathrm{int}M_{i-1})=R_i$.

若 $A\neq R_i$，则因 A 及 R_i 均为闭集，由引理 3.2 可知 R_i 中周期点稠密，故存在一过 x_0 的周期轨 L 且 $x_0\notin A$，但 $x_0\in D(A)$，进一步由 $D(A)$ 的不变性 $L\subset D(A)$. 但由推论 2.4 可知 $x_0\notin L$，矛盾，因此 $A=R_i$.

定理 1.4 的证明 若 $A\subset M_i|\mathrm{int}M_{i-1}$，则由引理 3.3 可知结论成立. 若 $A\subset M_{i+1}|\mathrm{int}M_{i-1}$，由 A 的不变性 $A\subset CR(\varphi)$ 可知：$A\subset R_{i+1}\cup R_i$. 设 $A_1=A\cap R_i$，$A_2=A\cap R_{i+1}$，因 R_i 与 R_{i+1} 是不交的闭集且 $A=A_1\cup A_2$，由[1]引理 1.2 可知 A_1，A_2 均为 φ 的吸引子，因此由引理 3.3，$A=R_i\cup R_{i+1}$. 如此可知对 φ 的任链回复吸引子 A 均存在 $R_{i_1},R_{i_2},\cdots,R_{i_m}$ 使得 $A=R_{i_1}\cup R_{i_2}\cup\cdots\cup R_{i_m}$ 且 $R_{i_1},R_{i_2},\cdots,R_{i_m}$ 为 φ 的吸引子.

引理 3.4[6] 若 X 为紧致流形，则映射 $F=\Phi(X)\to X^*$，$\varphi\mapsto CR(\varphi)$ 在 φ 处连续.

定理 1.5 的证明 设 A_φ 为 φ 的一个吸引子，因 A_φ 与 $X|D(A_\varphi)$ 是互不相交的闭集且 X 紧，故存在开集 U 使得

$$A_\varphi\subset U\subset U\subset D(A_\varphi).\tag{3.1}$$

首先指出，满足(3.1)的吸引子只有一个. 若不然，设另一吸引子 A_φ' 满足 $A_\varphi'\subset U\subset U\subset$

$D(A_\varphi')$,则$A_\varphi' \subset D(A_\varphi)$. 设 $x \in A_\varphi'$ 但 $x \notin A_\varphi$,则由推论 2.4 可知存在 T 当 $t < T$ 时 $\varphi_t(x) \notin A_\varphi'$ 与A_φ' 的不变性矛盾.

对任意 $\varepsilon > 0$(不妨设 $B(A_\varphi,\varepsilon) \subset U$ 且 $\varepsilon < \frac{1}{3}\min\{d(R_i,R_j), i、j = 1,2,\cdots,s, i \neq j\}$. 由引理 2.3 可知存在 $T > 0$ 当 $t \in [T, T+1]$ 时 $\varphi_t(U) \subset B(A_\varphi,\varepsilon)$. 取 φ 在 $\Phi(X)$ 中的邻域 W_1,使得对任意 $\psi \in W_1$ 及 $t \in [T, T+1]$ 有 $\psi_t(U) \subset B(A_\varphi,\varepsilon)$. 由推论 2.6 可得 $A_\psi = \bigcap_{t>0}\psi_t(U)$ 是 ψ 的一个吸引子且

$$A_\psi \subset B(A_\varphi,\varepsilon) \subset U \subset \bar{U} \subset D(A_\psi). \tag{3.2}$$

因满足(3.1) 的吸引子只有一个,由定理 1.4 可知 A_φ 是某基本集 R_i. 因此由引理 3.4 及上述证明可知存在 φ 在 $\Phi(X)$ 中的邻域 W_2,使得对任意 $\psi \in W_2$ 均有 ψ 的一个吸引子 A_ψ 及 $R' \subset CR(\psi)$ 满足(3.2) 并且 $R' \subset B(A_\varphi,\varepsilon)$, $A_\varphi \subset B(R',\varepsilon)$. 由[4] 中引理 2.5 可知 R' 为闭集,因此由推论 2.4 可得 $R' \subset A_\psi$,故 $A_\varphi \subset B(R',\varepsilon) \subset B(A_\psi,\varepsilon)$,取 $W = W_1 \cap W_2$,则对任意 $\psi \in W$ 均有吸引子 A_ψ 满足 $r(A_\varphi, A_\psi) \leqslant \varepsilon$.

致谢 谨此对何连法教授的关心和帮助表示衷心感谢!

参考文献:

[1] HURLEY M. *Attractiors: persistence, and density of their basins* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, **269**: 247—271.

[2] BOWEN R, WALTERS P. *Expansive one-parameter flows* [J]. J. Differential Equations, 1972, **12**: 180—193.

[3] THOMAS R F. *Stability properties of one-parameter flows* [J]. Proc. London Math. Soc., 1982, **45** (3): 479—505.

[4] KOMARO M. *One-parameter flows with the pesudo orbit tracing property* [J]. Mh. Math., 1984, **98**: 219—253.

[5] HE Lian-fa, LU Zhan-hui, WANG Fu-hai. *Birkhoff centers and Ω-stable conditions for flows* [J]. Southeast Asian Bulletin of Math., 1999, **23**: 611—617.

[6] 王福海,卢占会,靳一东. 紧致流形上 C^0 流不变集的连续性 [J]. 吉林大学自然科学学报, 2000, **2**: 19—20.

WANG Fu-hai, LU Zhan-hui. JIN Yi-dong. *The continuity of invariant sets for C^0-flows on compact manifold* [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis, 2000, **2**: 19—20.

The Stability of an Attractor of Expansive Flows with the Shadowing Property on a Compact Manifold

WANG Fu-hai[1], LU Zhan-hui[1], WANG Xiao-hua[2]

(1. Dept. of Basic Science, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

2. Networks Center, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

Abstract: The present paper shows that the attractor of expansive flows with the shadowing property on a compact manifold is a union of some basic sets. And it is stable with Hausdorff metric.

Key words: shadowing property; expansive; attractor; basic sets; stability.