第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

四项变系数非齐次递推关系的显式解*

余长安， 卢佳华， 余丹
（武汉大学，湖北 武汉 430072）

摘　要：文献[1]研究了一类较特殊的三项常系数齐次递推式的一般解的结构. 本文推广了[1]中的结果，给出了一般的四项变系数非齐次递推关系的明显解公式，为利用计算机处理相关问题提供了具体模式.

关键词：变系数；非齐次；显式解.
分类号：AMS(2000) 05A/CLC number：O157.1
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0548-05

人们知道，求解变系数线性递推关系还没有一个普遍适用的方法. 本文根据叠加原理，运用数学归纳方法，推证得到了一般四项变系数非齐次递推关系式的解的明显表达式.

为了叙述简洁，下面简介文中一些符号的意义：

符号 $N_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$，这里 i 为自然数，$n_1, n_2, \cdots, n_i$ 为非负整数，当 $i = 0$ 时，约定 $N_i = n_i = 0$；连加号 $\sum\limits_{Ni \leqslant j} 1 = \sum\limits_{n_1=0}^{j}\sum\limits_{n_2=0}^{j-n_1}\cdots\sum\limits_{n_i=0}^{j-N_{i-1}} 1 = \frac{(i+j)!}{i!j!}$，其中 j 可为非负整数，当 $i = 0$ 时，规定 $\sum\limits_{Ni \leqslant j} = 1$（$M_i, m_i$ 及 $\sum\limits_{M_i \leqslant j}$ 的意义分别与 N_i, n_i 及 $\sum\limits_{N_i \leqslant j}$ 类似）；连乘号 $\prod\limits_{\lambda=1}^{j}\beta_\lambda = \beta_1\beta_2\cdots\beta_j$，约定当 $j = 0$ 时，$\prod\limits_{\lambda=1}^{j}\beta_\lambda = 1$；求和号 $\sum\limits_{(p-\gamma_0)b_{\gamma_0}+(p-\gamma_1)b_{\gamma_1}+(p-\gamma_2)b_{\gamma_2}=m}$ 下标明的求和范围是满足不定方程 $m - \left[(p-\gamma_2)b_{\gamma_2} + (p-\gamma_1)b_{\gamma_1} + (p-\gamma_0)b_{\gamma_0}\right] = 0$ 的所有非负整数解.

定义　$F(m,n) = 0$，当 $m < 0$ 时；$F(m,n) = 1$，当 $m = 0$ 时；而当 $m > 0$ 时，

$$F(m,n) = \sum_{(p-\gamma_0)b_{\gamma_0}+(p-\gamma_1)b_{\gamma_1}+(p-\gamma_2)b_{\gamma_2}=m}\{\sum_{N_{b_{\gamma_0}} \leqslant b_{\gamma_1}}\{\sum_{M_{b_{\gamma_0}+b_{\gamma_1}} \leqslant b_{\gamma_2}}\{\{\prod_{\lambda_1=1}^{b_{r_0}}[\prod_{\lambda_2=1}^{n_{\lambda_1}}(\prod_{\lambda_3=1}^{m_{\lambda_2+N_{\lambda_1-1}}} f_{\gamma_2}(n -$$

$$(p-\gamma_0)(\lambda_1 - 1) - (p-\gamma_1)(\lambda_2 - 1) - (p-\gamma_2)(\lambda_3 - 1) - (p-\gamma_1)N_{\lambda_1-1} -$$

$$(p-\gamma_2)(M_{\lambda_2-1+N_{\lambda_1-1}} + M_{\lambda_1-1+b_{\gamma_1}} - M_{b_{\gamma_1-1}}))(f_{\gamma_1}(n - (p-\gamma_0)(\lambda_1 - 1) -$$

---

* 收稿日期：2001-02-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10071059)
作者简介：余长安(1948-)，男，教授.

$$(p-\gamma_1)(\lambda_2-1)-(p-\gamma_1)N_{\lambda_1-1}-(p-\gamma_2)(M_{\lambda_2+N_{\lambda_1-1}}+M_{\lambda_1-1+b_{\gamma_1}}-M_{b_{\gamma_1}}))))]$$

$$[\prod_{\lambda_4=1}^{m_{\lambda_1}+b_{\gamma_1}} f_{\gamma_2}(n-(p-\gamma_0)(\lambda_1-1)-(p-\gamma_2)(\lambda_4-1)-(p-\gamma_1)N_{\lambda_1}-$$

$$(p-\gamma_2)(M_{N_{\lambda_1}}+M_{\lambda_1-1+b_{\gamma_1}}-M_{b_{\gamma_1}})][f_{\gamma_0}(n-(p-\gamma_0)(\lambda_1-1)-(p-\gamma_1)N_{\lambda_1}-$$

$$(p-\gamma_2)(M_{N_{\lambda_1}}+M_{\lambda_1+b_{\gamma_1}}-M_{b_{\gamma_1}})]\}\{\prod_{\lambda_5=1}^{b_{\gamma_1}-N_{b_{\gamma_0}}}[\prod_{\lambda_6=1}^{m_{\lambda_5}+N_{b_{\gamma_0}}} f_{\gamma_2}(n-(p-\gamma_0)b_{\gamma_0}-$$

$$(p-\gamma_1)(\lambda_5-1)-(p-\gamma_2)(\lambda_6-1)-(p-\gamma_1)N_{b_{\gamma_0}}-(p-\gamma_2)(M_{\lambda_5-1+N_{b_{\gamma_0}}}+$$

$$M_{b_{\gamma_0}+b_{\gamma_1}}-M_{b_{\gamma_1}})][f_{\gamma_1}(n-(p-\gamma_0)b_{\gamma_0}-(p-\gamma_1)(\lambda_5-1)-(p-\gamma_1)N_{b_{\gamma_0}}-$$

$$(p-\gamma_2)(M_{\lambda_5+N_{b_{\gamma_0}}}+M_{b_{\gamma_0}+b_{\gamma_1}}-M_{b_{\gamma_1}})]\}\{\prod_{\lambda_7=1}^{b_{\gamma_2}-M_{b_{\gamma_0}+b_{\gamma_1}}} f_{\gamma_2}(n-(p-\gamma_0)b_{\gamma_0}-$$

$$(p-\gamma_1)b_{\gamma_1}-(p-\gamma_2)(\lambda_7-1)-(p-\gamma_2)M_{b_{\gamma_0}+b_{\gamma_1}})]\}\}\}(n\text{ 为非负整数}). \qquad (1)$$

现给出本文的主要结果

定理 变系数非齐次线性递推关系

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} u_{n+p}=\sum_{j=0}^{2} f_{\gamma_j}(n)u_{n+\gamma_j}+g(n), & (2)\\ u_i=c_i(i=\gamma_0,\gamma_0+1,\cdots,\gamma_1,\cdots\gamma_2,\cdots,p-1), & (3)\end{cases}$$

其中 $(n\geqslant 0, p>\gamma_2>\gamma_1>\gamma_0\geqslant 0; f_{\gamma_j}(n)(j=0,1,2)$ 及 $g(n)$ 皆可随 n 的变化而取不同之值；$c_j(i=\gamma_0,\gamma_0+1,\cdots,\gamma_1,\cdots,\gamma_2,\cdots,p-1)$ 为任意常数）的一般解可明显表示为

$$u_{n+p}=\sum_{j=0}^{2}\Big\{\sum_{i=\gamma_j}^{p-1}\{F(n-i+\gamma_j,n)c_i\}f_{\gamma_j}(i-\gamma_j)\Big\}+\sum_{j=0}^{n}\{F(n-j,n)\}g(j). \qquad (4)$$

为易于证得上述结果，下面推证两个引理

引理 1 问题(A)中对应齐次递推关系式

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} u_{n+p}=\sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(n)u_{n+r_j}\\ u_i=c_i(i=r_0,r_0+1,\cdots,r_1,\cdots,r_2,\cdots,p-1)\end{cases}$$

的解的明显表达式为

$$u_{n+p}=\sum_{j=0}^{2}\{F(n-i+r_j,n)C_i\}f_{r_j}(i-r_j). \qquad (5)$$

证明 根据叠加原理，所述递推关系式之解可表为

$$u_{n+p}=\sum_{i=r_0}^{p-1}u_{n+p}^{(i)}C_i,$$

其中 $u_{n+p}^{(i)}(i=r_0,r_0+1,\cdots,r_1,\cdots,r_2,\cdots,p-1)$ 为

$$(\mathrm{B})_{\mathrm{K}}\quad \begin{cases} u_{n+p}=\sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(n)u_{n+r_j},\\ u_k=\delta_{i,k}(k=r_0,r_0+1,\cdots,p-1)\end{cases} \qquad \left(\delta_{i,k}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}\right)$$

之解．显然，为证引理中的(5)式成立，只须证明$u_{n+p}^{(i)}$的表达式为

$$(\mathrm{D})_i \quad u_{n+p}^{(i)} = \begin{cases} F(n-i+r_0,n)\cdot f_{r_0}(i-r_0), i=r_0,r_0+1,\cdots,r_1-1; \\ \sum_{j=0}^{1} F(n-i+r_j,n)\cdot f_{r_j}(i-r_j), i=r_1,r_1+1,\cdots,r_2-1; \\ \sum_{j=0}^{2} F(n-i+r_j,n)\cdot f_{r_j}(i-r_j); i=r_2,r_2+1,\cdots,p-1. \end{cases}$$

不失一般性，今以$i=r_0$为例证之．从而，即证

$$(\mathrm{D})_{r_0} \quad u_n^{(r_0)}+p = F(n,n)f_{r_0}(0) \tag{6}$$

满足关系式

$$(\mathrm{B})_{r_0} \quad \begin{cases} u_{n+p}^{(r_0)} = \sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(n)u_{n+r_j}, \\ u_{r_0}=1, u_i=0(i=r_0+1,r_0+2,\cdots,p-1). \end{cases}$$

现用数学归纳法证明$(\mathrm{D})_{r_0}$成立．

易于验证：当$n=0,1,2$时，$(\mathrm{D})_{r_0}$为真；从而，可假设：当$n=m-3,m-2,m-1$时，$(\mathrm{D})_{r_0}$亦为真，即有

$$u_{m-j+p}^{(r_0)} = F(m-j,m-j)\cdot f_{r_0}(0), j=3,2,1; \tag{7}$$

余下当需证明：当$n=m$时，$(\mathrm{D})_{r_0}$仍成立，即

$$u_{m+p}^{(r_0)} = f(m,m)\cdot f_{r_0(0)}. \tag{8}$$

事实上，由$(\mathrm{B})_{r_0}$中的初始条件及(7)式，有

$$\begin{aligned} u_{m+p}^{(r_0)} &= \sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(m)u_{m+r_j} = \sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(m)u_{(m+r_j-p)+p} \\ &= \sum_{j=0}^{2} \{f_{r_j}(m)F(m+r_j-p,\ m+r_j-p)\}f_{r_0}(0) \\ &= \{f_{r_0}(m)F(m+r_0-p,\ m+r_0-p)+ \\ &\quad f_{r_1}(m)F(m+r_1-p,\ m+r_1-p)+ \\ &\quad f_{r_2}(m)F(m+r_2-p,\ m+r_2-p)\}f_{r_0}(0). \end{aligned} \tag{9}$$

在(9)式中，利用(1)式将$F(m+r_j-p,\ m+r_j-p)(j=0,1,2)$展开．首先，在对应展开表达式内分别令$b_{r_j}=b'_{r_j}-1(j=0,1,2)$($b'_{r_j}$仍记为$b_{r_j}(j=0,1,2)$)；接着，将$f_{r_j}(m)(j=0,1,2)$分别乘入相应因式内；然后，在第一式中适当添加$\sum_{n_1=0}^{0}$及$\sum_{m_1=0}^{0}$，在第二个和式中适当添加$\sum_{m_1=0}^{0}$并利用恒等关系式$\sum_{n_1=0}^{b_{r_1}-1}1=\sum_{n_1=1}^{b_{r_1}}1$变换，而在第三个和式中类似利用恒等关系式$\sum_{m_1=0}^{b_{r_2}-1}1=\sum_{m_1=1}^{b_{r_2}}1$变形．于是，经整理、合并，可得

$$u_{m+p}^{(r_0)} = \{\sum_{(p-r_0)b_{r_0}+(p-r_1)b_{r_1}+(p-r_2)b_{r_2}=m}\{\{\{\sum_{n_1=0}^{0}\sum_{n_2=0}^{b_{r_1}-n_1}\cdots\sum_{n_{b_{r_0}}=0}^{b_{r_1}-N_{b_{r_0}}-1}\{\sum_{m_1=0}^{0}\sum_{m_2=0}^{b_{r_2}-m_1}\cdots\sum_{m_{b_{r_0}+b_{r_1}}=0}^{b_{r_2}-M_{b_{r_0}+b_{r_1}}-1}\}+$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_1=1}^{b_{r_1}}\sum_{n_2=0}^{b_{r_1}-n_1}\cdots\sum_{n_{b_{r_0}}=0}^{b_{r_1}-N_{b_{r_0}}-1}\{\sum_{m_1=0}^{0}\sum_{m_2=0}^{b_{r_2}-m_1}\cdots\sum_{m_{b_{r_o}+b_{r_1}}=0}^{b_{r_2}-M_{b_{r_o}+b_{r_1}}-1}\}\}+\sum_{n_1=0}^{b_{r_1}}\sum_{n_2=0}^{b_{r_1}-n_1}\cdots\sum_{n_{b_{r_0}}=0}^{b_{r_1}-N_{b_{r_0}}-1}\{\sum_{m_1=1}^{b_{r_2}}\sum_{m_2=0}^{b_{r_2}-m_1}\cdots\sum_{m_{b_{r_o}+b_{r_1}}=0}^{b_{r_2}-M_{b_{r_o}+b_{r_1}}-1}\}\}\times \\
&\{\{\prod_{\lambda_1=1}^{b_{r_0}}[\prod_{\lambda_2=1}^{n_{\lambda_1}}(\prod_{\lambda_3=1}^{m_{\lambda_2+N_{\lambda_1-1}}} f_{r_2}(m-(p-r_0))(\lambda_1-1)-(p-r_1))(\lambda_2-1)-(p-r_2))(\lambda_3-1)- \\
&(p-r_1)N_{\lambda_1-1}-(p-r_2)(M_{\lambda_2-1+N_{\lambda_1-1}}+M_{\lambda_1-1+b_{r_1}})))(f_{r_1}(m-(p-r_0)(\lambda_1-1)-(p-r_1)(\lambda_2 \\
&-1)-(p-r_1)N_{\lambda_1-1}-(p-r_2)(M_{\lambda_2+N_{\lambda_1-1}}+M_{\lambda_1-1+b_{r_1}}-M_{b_{r_1}})))][\prod_{\lambda_4=1}^{m_{\lambda_1+b_{\lambda_1}}} f_{r_2}(m-(p-r_0)(\lambda_1 \\
&-1)-(p-r_2))(\lambda_4-1)-(p-r_1)N_{\lambda_1}-(p-r_2)(M_{N_{\lambda_1}}+M_{\lambda_1-1+b_{r_1}}-M_{b_{r_1}}))][f_{r_0}(m- \\
&(p-r_0)(\lambda_1-1)-(p-r_1)N_{\lambda_1}-(p-r_2)(M_{N_{\lambda_1}}+M_{\lambda_1+b_{r_1}}-M_{b_{r_1}}))]\}\{\prod_{\lambda_5=1}^{b_{r_1}-N_{b_{r_0}}}(\prod_{\lambda_6=1}^{m_{\lambda_5}+N_{b_{r_0}}} f_{r_2}(m \\
&-(p-r_0)b_{r_0}-(p-r_1)(\lambda_5-1)-(p-r_2)(\lambda_6-1)-(p-r_1)N_{b_{r_0}}-(p-r_2)(M_{\lambda_5-1+N_{b_{r_0}}} \\
&+M_{b_{r_0}+b_{r_1}}-M_{b_{r_1}})))(f_{r_1}(m-(p-r_0)b_{r_0}-(p-r_1)(\lambda_5-1)-(p-r_1)N_{b_{r_0}}-(p- \\
&r_2)(m_{\lambda_5+N_{b_{r_0}}}+M_{b_{r_0}+b_{r_1}}-M_{b_{r_1}})))\}\{\prod_{\lambda_7=1}^{b_{r_2}-M_{b_{r_0}+b_{r_1}}} f_{r_2}(m-(p-r_0)b_{r_0}-(p-r_1)b_{r_1}-(p-r_2)(\lambda_7 \\
&-1)-(p-r_2)M_{b_{r_0}+b_{r_1}})\}\}\}\}f_{r_0}(0).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

在上式中，将和式合并，注意到(1)的展开形式，即知(10)式为 $F(m,m)f_{r_0}(0)$（即(8) 式）. 于是，由数学归纳法的意义，便知$(\mathrm{D})_{r_0}$ 为真.

对于 $i=r_0+1, r_0+2,\cdots,r_1,\cdots,r_2,\cdots,p-1$ 的情形，$(\mathrm{D})_i$ 的证明相仿. □

同理可证

引理 2 非齐次线性递推式(2) 在初始条件

$$u_i=0(i=r_0, r_0+1,\cdots, r_1,\cdots, r_2,\cdots, p-1)$$

的条件下的一般解的表达式为

$$u_{n+p}=\sum_{j=0}^{n}\{F(n-j, n)\}g(j). \tag{11}$$

定理的证明 根据代数方程的叠加原理，将引理 1 中的公式(5)与引理 2 中的公式(11)结合起来，便为问题(A)中的解公式(4). □

参考文献：

[1] 屠规彰. 三项齐次递推式的一般解公式 [J]. 数学年刊，1981，**2**(4)：431—436.
TU Gui-zhang. *A formula for General Solutions of homogeneous trinomial recurrences* [J]. Chinese Ann. Math.，1981，**2**(4)：431—436.

[2] 余长安. p 阶循环(递推)方程式的解公式 [J]. 数学学报，1986，**29**(3)：313－316.
YU Chang-an. *A formula for solution of recurrence with order p* [J]. Acta Math. Sinica(Ed).，1986，**29**(3)：313－316.

[3] RIOYDAN J. *An Introduction to Combinatorial Analysis* [M]. New York：John Wiley & Sons Inc，

An Explicit Formula for Solutions of Non-Homogeneous Quadrnomial Recurrences with Variable Coefficients

YU Chang-an, LU Jia-hua, YU Dan
(Wuhan University, Hubei 430072, China)

Abstract: In this paper, we consider non-homogeneous recurrence relation with variable coefficients

$$\begin{cases} u_{n+p} = \sum_{j=0}^{2} f_{r_j}(n) u_{n+r_j} + g(n), \\ u_i = c_i \quad (i = r_0, r_0+1, \cdots, r_1, \cdots, r_2, \cdots, p-1), \end{cases}$$

where $n \geqslant 0$, $p > r_2 > r_1 > r_0 \geqslant 0$, $f_{r_j}(n)(j=0,1,2)$ and $g(n)$ are variable numbers, $c_i(i = r_0, r_0+1, \cdots, r_1, \cdots, r_2, \cdots, p-1)$ are arbitrary constants. An explicit solution is given by formula

$$u_{n+p} = \sum_{j=0}^{2}\{\sum_{i=r_j}^{p-1}\{F(n-i+r_j,\ n)\cdot c_j\} f_{r_j}(i-r_j)\} + \sum_{j=0}^{n}\{g(j)\{F(n-j,n)\}\}$$

Key words: variable coefficients; non-homogeneous; an explicit formula of solution.