第23卷第3期
2003年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 23 No. 3
Aug. 2003

基础 R_0- 代数的性质及在 $\mathscr{L}^*$ 系统中的应用*

吴 洪 博

(陕西师范大学数学研究所,陕西 西安 710062)

摘 要:研究了王国俊教授建立的模糊命题演算的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 和与之在语义上相关的 R_0-代数,提出了基础 R_0-代数的观点并讨论了其中的一些性质,在将 $\mathscr{L}^*$ 系统中的推演证明转化为相应的 R_0-代数中的代数运算方面作了一些尝试,作为它的一个应用,证明了 $\mathscr{L}^*$ 系统中的模糊演绎定理.

关键词:模糊逻辑;基础 R_0-代数;R_0-代数;$\mathscr{L}^*$ 系统;模糊演绎定理.

分类号:AMS(2000) 03B52/CLC number: O141.1

文献标识码:A　　　　**文章编号**:1000-341X(2003)03-0557-07

王国俊教授于文献[1－4]中建立了一种模糊命题演算的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 和与之在语义上相关的 R_0－代数,作者在王国俊教授指导下在此方面作了一些工作,并于文献[5－7]中取得了一些结果,本文的目的是对 R_0-代数的性质作进一步的研究,并尝试利用 R_0-代数中代数运算代替 $\mathscr{L}^*$ 系统中的推演证明,作为这方面的一个应用,证明了 $\mathscr{L}^*$ 系统中的模糊演绎定理.

1 基础 R_0-代数及其性质

定义 1.1 设 M 是 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数,如果

① M 上有偏序 $\leqslant$ 使 $(M, \leqslant)$ 成为有界分配格,且 $\vee$ 是有关于序 $\leqslant$ 的 M 中的上确界运算;

② $\neg$ 是关于序"$\leqslant$"而言的逆序对合对应;

③ 对 $a,b,c \in M$,以下条件成立

BR_0C1　$\neg a \rightarrow \neg b = b \rightarrow a$,

BR_0C2　$1 - a = a, a \rightarrow a = 1$,

BR_0C3　$b \rightarrow c \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$,

BR_0C4　$a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$,

BR_0C5　$a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$
$a \rightarrow b \wedge c = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

这里 1 是 M 的最大元,并以 0 记 $\neg 1$.

那么称 M 为基础 R_0-代数,记作 BR_0-代数.

* **收稿日期**:2001-02-01

作者简介:吴洪博(1959-),男,博士.

性质 1.1 设 M 是 BR_0-代数，$a,b,c\in M$，则：

BR_0P1 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$

BR_0P2 $a\to b$ 关于 a 不增，b 不减

BR_0P3 $a\vee b\to c=(a\to c)\wedge(b\to c)$

$a\wedge b\to c=(a\to c)\vee(b\to c)$

BR_0P4 $a\to b\leqslant a\vee c\to b\vee c$

$a\to b\leqslant a\wedge c\to b\wedge c$

BR_0P5 $a\to b\leqslant(a\to c)\vee(c\to b)$

BR_0P6 $(a\to b)\vee(b\to a)=1$

BR_0P7 $(a\to b)\leqslant(b\to c)\to(a\to c)$

BR_0P8 $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$，$\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b$

BR_0P9 $a\to b\geqslant\neg a\vee b$

BR_0P10 在 $I=[0,1]$ 上规定

$$a\vee b=\max\{a,b\},\neg a=1-a,a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ \neg a\vee b, & a\nleqslant b\end{cases},$$

则 $(I,(\neg,\vee,\to))$ 为一 BR_0 代数，(称之为 BR_0-单位区间，记作 $B\overline{W}$).

证明 虽然文献[1]中对以上性质是在 R_0-代数中作了证明，但由于证明过程只涉及基础 R_0-代数中的条件，因此这些性质在 BR_0-代数中均成立，必要时请参看文献[1].

文献[1],[8],[11]在赋值中引入了一种混合运算 $\otimes$：$a\otimes b=\neg(a\to\neg b)$，下面我们在 BR_0-代数中引入这种运算并讨论相关性质，若未作特别声明，字母 $a,b,c,\cdots$ 均表示 BR_0-代数 M 中的元素.

性质 1.2 $a\otimes b\to c=a\to(b\to c)$.

证明

$$a\otimes b\to c=\neg(a\to\neg b)\to c=\neg c\to(a\to\neg b)=a\to(\neg c\to\neg b)=a\to(b\to c).$$

注 由于在 BR_0-代数中有性质 BR_0P1，这种混合运算实际上是运算 $\to$ 的伴随对.

性质 1.3 设 M 为 BR_0-代数，则 $(M,\otimes,1)$ 是带有单位元的 Abel 半群.

证明 $a\otimes b=\neg(a\to\neg b)=\neg(b\to\neg a)=b\otimes a$，

其余验证略.

性质 1.4 在 BR_0-代数中，以下不等式成立：

① 若 $a\leqslant c,b\leqslant d$，则 $a\otimes b\leqslant c\otimes d$；

② $a\to b\leqslant a\otimes c\to b\otimes c$；

③ $(a\to b)\otimes(b\to c)\leqslant a\to c$；

④ $(b\to a)\otimes(c\to d)\leqslant(a\to c)\to(b\to d)$；

⑤ $(a\to b)\otimes a\leqslant a\wedge b$；

证明 以上不等式均可用 BR_0P1 方便的进行证明，下面我们以性质 1.4①，性质 1.4⑤为例证明之.

因为

$$\begin{aligned}(a\to b)\otimes(b\to c)\to(a\to c)&=\neg((a\to b)\to\neg(b\to c))\to(a\to c)\\&=\neg(a\to c)\to((a\to b)\to\neg(b\to c))=(a\to b)\to(\neg(a\to c)\to\neg(b\to c))\\&=(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c))\geqslant(a\to b)\to(a\to b)=1,\end{aligned}$$

因此 $(a\to b)\otimes(b\to c)\leqslant a\to c$.

又

$$
\begin{aligned}
a\otimes(a\to b)\to a\wedge b&=\neg((a\to b)\to\neg a)\to a\wedge b\\
&=\neg(a\wedge b)\to((a\to b)\to\neg a)=\neg a\vee\neg b\to((a\to b)\to\neg a)\\
&=(\neg a\to((a\to b)\to\neg a))\wedge(\neg b\to((a\to b)\to\neg a))\\
&=((a\to b)\to(\neg a\to\neg a))\wedge((a\to b)\to(\neg b\to\neg a))\\
&=(a\to b)\to(a\to b)=1,
\end{aligned}
$$

因此 $a\otimes(a\to b)\leqslant a\wedge b$.

注 尽管在上面 $a\otimes(a\to b)\leqslant a\wedge b$ 的证明过程中各式之间全部用等号连接，但不能因此就得出 $a\otimes(a\to b)=a\wedge b$. 事实上，在 BR_0 单位区间上取 $a=0.4$, $b=0.3$, 就有：$a\wedge b=0.3$, $a\otimes(a\to b)=0.4\otimes(0.4\to 0.3)=0.4\otimes 0.6=0$.

由性质 1.3 知下面的定义是合理的.

定义 1.2 设 $k\in N$. $a^k=\begin{cases}a, & k=1,\\ a^{k-1}\otimes a, & k\geqslant 2,\end{cases}$

性质 1.5 $a^2\wedge b^2\leqslant a\otimes b\leqslant a^2\vee b^2$.

证明

$$
\begin{aligned}
a^2\wedge b^2\to a\otimes b&=(a^2\to a\otimes b)\vee(b^2\to a\otimes b)\\
&=(a\otimes a\to a\otimes b)\vee(b\otimes b\to a\otimes b)\geqslant(a\to b)\vee(b\to a)=1,
\end{aligned}
$$

因此 $a^2\wedge b^2\leqslant a\otimes b$.

另一不等式证明类似，略.

推论 1.1 $a^2\wedge b^2=(a\wedge b)^2$, $a^2\vee b^2=(a\vee b)^2$.

证明

$$
\begin{aligned}
(a\wedge b)^2&=(a\wedge b)\otimes(a\wedge b)=\neg((a\wedge b)\to\neg(a\wedge b))\\
&=\neg(a\wedge b\to\neg a\vee\neg b)=\neg((a\wedge b\to\neg a)\vee(a\wedge b\to\neg b))\\
&=\neg((a\to\neg a)\vee(b\to\neg a)\vee(a\to\neg b)\vee(b\to\neg b))\\
&=\neg(a\to\neg a)\wedge\neg(b\to\neg a)\wedge\neg(a\to\neg b)\wedge\neg(b\to\neg b)\\
&=a^2\wedge(a\otimes b)\wedge(b\otimes a)\wedge b^2=a^2\wedge b^2\wedge(a\otimes b)=a^2\wedge b^2.
\end{aligned}
$$

另一等式证明类似，略.

推论 1.2 设 $n\in N$, 则 $(a\to b)^n\vee(b\to a)^n=1$.

证明 由于 $(a\to b)^2\vee(b\to a)^2=((a\to b)\vee(b\to a))^2$, 因此 $(a\to b)^2\vee(b\to a)^2=1$. 对上式反复平方并应用推论 1.1 得 $(a\to b)^{2^k}\vee(b\to a)^{2^k}=1$.

又显然：$(a\to b)^{2^n}\vee(b\to a)^{2^n}\leqslant(a\to b)^n\vee(b\to a)^n\leqslant(a\to b)\vee(b\to a)$, 因此 $(a\to b)^n\vee(b\to a)^n=1(n\in N)$.

推论 1.3 设 $n,m\in N$, 则 $(a\to b)^n\vee(b\to a)^m=1$.

证明 因为 $(a\to b)^{m+n}\vee(b\to a)^{m+n}\leqslant(a\to b)^n\vee(b\to a)^m\leqslant(a\to b)\vee(b\to a)$, 因此 $(a\to b)^n\vee(b\to a)^m=1$.

性质 1.6 设 M 是全序 BR_0 代数，若 $\exists\ a,b\in M$ 使得：$a=\neg a$, $b=\neg b$, 则 $a=b$.

证明 由于 M 全序，不妨设 $a\leqslant b$, 此时：$b\to a=\neg b\to\neg a=a\to b=1$, 因有 $b\leqslant a$, 因此 $a=b$.

定义 1.3 满足条件 R_0C6: $(a\to b)\vee((a\to b)\to\neg a\vee b)=1$ 的 BR_0 代数称为 R_0-代数.

性质 1.7 在 R_0-代数中，$a^3=a^2$.

证明 显然有 $a^3\leqslant a^2$，又

$$\begin{aligned} a^2\to a^3 &= \neg(a\to\neg a)\to\neg(a\to\neg a^2)=(a\to(a\to\neg a))\to(a\to\neg a) \\ &=((a\to(a\to\neg a))\to(a\to\neg a))\vee((a\to(a\to\neg a))\to(a\to\neg a)) \\ &\geqslant((a\to\neg a)\to\neg a)\vee(a\to\neg a)=1, \end{aligned}$$

有 $a^2\leqslant a^3$，因此 $a^2=a^3$.

推论 1.4 设 $n\in N-\{1\}$，则 $a^n=a^2$.

证明 略.

性质 1.8 若 M 是全序 R_0-代数，且 $a\not\leqslant b$，则 $a\to b=\neg a\vee b$.

证明 由 BR_0P9，R_0C6 及 M 全序即可证明.

性质 1.9 设 M 是全序 R_0-代数，且存在 $b\in M$，使得 $b=\neg b$，则当 $a\leqslant b$ 时，$a^n=0(n\in N-\{1\})$，当 $a>b$ 时，$a^n=a(n\in N)$.

证明 略.

2 $\mathscr{L}^*$ 系统与 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数

王国俊教授于文献[1－2]中建立了 Fuzzy 命题演算的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$，作者在王国俊教授指导下于文献[7]中将系统 $\mathscr{L}^*$ 进行了改进，得到了等价、简化系统 $\mathscr{L}_0^*$，本文以下仍将 $\mathscr{L}_0^*$ 记为 $\mathscr{L}^*$.

定义 2.1 由以下的公式集 $F(S)$，公理 L^*1-L^*10 及推理规则 MP 组成的系统称为模糊命题演算的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$.

(1) 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是无穷集，$F(S)$ 是由 S 生成的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数，$F(S)$中的元素叫公式；

(2) $F(S)$中具有以下各种形式的公式为 $\mathscr{L}^*$ 中公理：

L^*1 $A\to(B\to A\wedge B)$,

L^*2 $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$,

L^*3 $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$,

L^*4 $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$,

L^*5 $A\to\neg\neg A$,

L^*6 $A\to A\vee B$,

L^*7 $A\vee B\to B\vee A$,

L^*8 $(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$,

L^*9 $(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$,

L^*10 $(A\to B)\to((A\to B)\to\neg A\vee B)$.

以上形如 $P\wedge Q$ 的公式是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写；

(3) $\mathscr{L}^*$ 中的推理规则 MP 是：由 A，$A\to B$ 推得 B.

定义 2.2 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，从 Γ 到 A 在 $\mathscr{L}^*$ 中的推演是一个 $F(S)$ 中公式的有限

序列 $A_1,\cdots,A_n(A_n=A)$，对每个 $i\leqslant n$，A_i 或是 $\mathscr{L}^*$ 中公理，或 $A_i\in\Gamma$，或存在 $j,k<i$ 使 A_i 是由 A_j 和 A_k 运用推理规则 MP 而得的公式，这时，也称 A 可由 Γ 在 $\mathscr{L}^*$ 中推出，记作 $\Gamma\vdash A$.

当 $\Gamma=\varnothing$ 时，称推演为 $\mathscr{L}^*$ 中的证明，这时 A 叫 $\mathscr{L}^*$ 中的定理，记作 $\vdash A$.

定义 2.3 设 $A,B\in F(S)$，若 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$，则称 A,B 可证等价，记作 $A\approx B$.

引理 2.1[1] 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中，可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 中 $(\neg,\vee,\to)$ 型同余关系.

引理 2.2[2] 设 $A\in F(S)$，$A=f(B_1,\cdots,B_t)$，若 $C_1\approx B_1$，则 $A\approx f(C_1,B_2,\cdots,B_t)$.

设 $A\in F(S)$，$[A]=\{B\in F(S)\mid A\approx B\}$，$F(S)/\approx=\{[A]\mid A\in F(S)\}$，由引理 2.1 可知下面定义是合理的.

定义 2.4 代数 $(F(S)/\approx,(\neg,\vee,\to))$ 称为 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数，其上运算由 $F(S)$ 上相应运算诱导，即 $\neg[A]=[\neg A]$，$[A]\vee[B]=[A]\to[B]=[A\to B]$，等号两边运算不言自明.

由于 $P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写，因此 $\approx$ 关于 $\wedge$ 也同余，因此也可在 $(F(S)/\approx$ 上诱导运算 $[A]\wedge[B]=[A\wedge B]$.

引理 2.3[1] $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数是 R_0-代数，且 $[A]\leqslant[B]$ 当且仅当 L $A\to B$.

3 $\mathscr{L}^*$ 系统中的模糊演绎定理

由引理 2.3 可知在 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数中可引入运算 $\otimes$：$[A]\otimes[B]=\neg[A]\to\neg[B])$，由于 $\approx$ 关于 $\neg$，$\to$ 同余，因此 $[A]\otimes[B]=[\neg(A\to\neg B)]$，因此可在 $F(S)$ 上引入相应混合表示式 $\otimes$：$A\otimes B=\neg(A\to\neg B)$，因此就有 $[A]\otimes[B]=[A\otimes B]$. 根据引理 2.3，与定义 1.2 相对应，对 $A\in F(S)$，可引入下面的定义：

定义 3.1 设 $n\in N$，$A^n=\begin{cases}A, & n=1\\ A^{n-1}\otimes A, & n\geqslant 2.\end{cases}$

根据引理 2.3，性质 1.2，性质 1.5①，性质 1.5⑤可得下面的命题 3.1.

命题 3.1 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中，① $A\to(B\to C)\approx A\otimes B\to C$，

② $\vdash A\otimes(A\to B)\to B$，

③ $\{A\to C,B\to D\}\vdash A\otimes B\to C\otimes D$.

定理 3.1 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中，若 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$，则存在 $n\in N$，使得 $\Gamma\vdash A^n\to B$.

证明 设 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$，$A_1,\cdots,A_n(A_n=B)$ 是从 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 B 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中推演，下面对推演的长度 n 用数学归纳法证明：对每个 $k\in\{1,\cdots,n\}$，存在自然数 m_k 使得 $\Gamma\vdash A^{m_k}\to A_k$. 当 $n=1$ 时，则 A_1 就是 B，因此 $B\in\Gamma\cup\{A\}$ 或 B 是 $\mathscr{L}^*$ 中的公理，

① 若 B 就是 A，由于有 $\vdash A\to A$[7]，因此有 $\vdash A\to B$，更有 $\Gamma\vdash A\to B$；

② 若 B 是公理或 $B\in\Gamma$，则因为：

1° B	公理或假设
2° $B\to(A\to B)$	$\mathscr{L}^*$ 中定理[7]
3° $A\to B$	1°，2°，MP.

因此 $\Gamma\vdash A\to B$，因此 $n=1$ 时，命题成立.

现假设 $n=m$ 时，命题成立，那么当 $n=m+1$ 时，此时从 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 B 在 $\mathscr{L}^*$ 中的推演是 $A_1\cdots,A_m,A_{m+1}(A_{m+1}=B)$，显然 $A_1,\cdots,A_m$ 是 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 A_m 在 $\mathscr{L}^*$ 中的推演，由归纳假设知对

每个 $k\in\{1,\cdots,m\}$，存在 $m_k\in N$ 使得 $\Gamma\vdash A^{m_k}\to A_k$. 对 $A_{m+1}\in\Gamma\in\cup\{A\}$ 或 A_{m+1} 是 $\mathscr{L}^*$ 中公理，类似于 $n=1$ 的情形可证 $\Gamma\vdash A\to A_{m+1}$，现设 A_{m+1} 是由 $A_j,A_i(i,j\leqslant m)$ 运用推理规则 MP 而得的公式，不妨设 $A_j=A_i\to A_{m+1}$，由归纳假设知存在 m_i,m_j 使得 $\Gamma\vdash A^{m_i}\to A_i$，$\Gamma\vdash A^{n_j}\to A_j$，因此有：

1°	$A^{m_j}\to A_j,A^{m_i}\to A_i$	假设
2°	$A^{n_j}\otimes A^{m_i}\to A_j\otimes A_i$	1°，命题 3.1①
3°	$A^{n_i+m_j}\to A_i\otimes(A_i\to A_{m+1})$	2°，定义
4°	$A_i\otimes(A_i\to A_{m+1})\to A_{m+1}$	命题 3.1②
5°	$A^{n_j+m_i}\to A_{m+1}$	3°，4°HS 规则[7]

因此 $\Gamma\vdash A^{n_i+m_j}\to A_{m+1}$. 因此 $n=m+1$ 时，命题也成立.

因此，据数学归纳原理知，若 $A_1,\cdots,A_n(A_n=B)$ 是从 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 B 在 $\mathscr{L}^*$ 中的推演，则对每个 $k\in\{1,\cdots,n\}$，存在 $m_k\in N$ 使得 $\Gamma\vdash A^{m_k}\to A_k$. 特别地，当 $k=n$ 时，就有 $\Gamma\vdash A^{m_n}\to A_n$，即 $\Gamma\vdash A^{m_n}\to B$.

注 由于命 3.1 的证明过程未涉及 L^*10 和 R_0C6，因此定理 3.1 在缺少 L^*10 的 $\mathscr{L}^*$ 系统中也成立，我们不妨将这一系统称之为基础 $\mathscr{L}^*$ 系统，记作 $B\mathscr{L}^*$.

若利用 R_0C6 和 L^*10，则定理 3.1 有下面的改进形式：

定理 3.2 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中，若 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$，则 $\Gamma\vdash A^2\to B$.

证明 由定理 3.1 知，若 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$，则存在 $n\in N$，使得 $\Gamma\vdash A^n\to B$.

① 若 $n=1$，此时为 $\Gamma\vdash A\to B$. 由于 $\vdash A^2\to A$. 由 MP 规则即可得 $\Gamma\vdash A^2\to B$，

② 若 $n\geqslant 2$，由推论 1.4 知 $[A]^n=[A]^2$，即，$[A^n]=[A^2]$，因此 $A^n\approx A^2$，由引理 2.2 可得 $\Gamma\vdash A^2\to B$.

推论 3.1 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中，$\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 当且仅当 $\Gamma\vdash A^2\to B$.

参考文献：

[1] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京：科学出版社，2000.
WANG Guo-jun. *Non Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[2] 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统[J]. 科学通报，1997，**42**(10)：1041－1045.
WANG Guo-jun. *A formal deductive system for fuzzy propositional calculus* [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**(18): 1521－1525. (in Chinese)

[3] Wang Guo-jun. *On the foundation of fuzzy reasoning* [J]. Information Science, 1999, **177**: 47－88.

[4] 王国俊. 修正的 Kleene 系统中 $\sum$-(α-重言式)理论 [J]. 中国科学(E 辑)，1998，**28**(2)：146－152.
WANG Guo-jun. *Theory of Σ-(α-tautology) in revised Kleene systems* [J]. Science in China, Ser. E, 1998, **28**(2): 146－152. (in Chinese)

[5] 吴洪博，王国俊. Lukasiewicz 逻辑系统中的广义重言式理论 [J]. 西南交通大学学报(自然科学版)，2000，**35**(5)：559－563.
WU Hong-bo, WANG Guo-jun. *The theory of generalized tautologies in the Lukasiewicz logic system* [J]. J. Southwest Jiaotong Univ., 2000, **35**(5): 559－563. (in Chinese)

[6] 吴洪博,文秋梅. 积分语义学中的积分相似度与伪距离 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2000, **28**(3): 15－19.
WU Hong-bo, WEN Qiu-mei. *Calculus similarity degree and pseudometric in calculus semantics* [J]. J. Shaanxi Normal Univ., 2000, **28**(3): 15－19. (in Chinese)
[7] 吴洪博. $\mathscr{L}^*$ 系统的一种改进形式系统 $\mathscr{L}_0^*$[J]. 纯粹数学与应用数学, 2001, **17**(1): 46－53.
WU Hong-bo. *A kind of improved formal deductive system $\mathscr{L}_0^*$ for the system $\mathscr{L}^*$* [J]. Pure Appl. Math., 2001, **17**(1): 46－52. (in Chinese)
[8] 刘军,徐扬. 格蕴涵代数的滤子与结构[J], 科学通报, 1997, **42**(10): 1049－1052.
LU Jun, XU Yang. *Filters and structure of lattice implication algebra* [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**(18): 1517－1520. (in Chinese)
[9] XU Yang, QIN Ke-yun. *On filters of lattice implication algebras* [J]. J. Fuzzy Math., 1993, **1**(2): 251－260.
[10] 吴望名. Fuzzy 蕴涵代数 [J]. 模糊系统与数学, 1990, **4**(1): 56－63.
WU Wang-ming. *Fuzzy implication algebra* [J]. Fuzzy System and Mathematics, 1990, **4**(1): 56－63. (in Chinese)
[11] HAJEK P. *Metamathematics of Fuzzy Logic* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

The Properties of BR_0 -algebra and Its Applications in $\mathscr{L}^*$ System

WU Hong-bo
(Inst. of Math., Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: The formal deductive system $\mathscr{L}^*$ for fuzzy propositional calculus and R_0-algebra relevant to former in semantics have been studied, a concept of basic R_0-algebra with its properties is proposed in this paper. We change the deduction and proof in $\mathscr{L}^*$ system into the relevant algebra's operation in R_0-algebra. As its application, we prove the fuzzy deductive theorem in $\mathscr{L}^*$ system.
Key words: fuzzy logic; basic R_0-algebra; $\mathscr{L}^*$ system; fuzzy deductive theorem.