第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

涉及两个单形的几何不等式*

杨世国[1]， 陈胜利[2]

(1. 安徽教育学院数学系，安徽 合肥 230061；2. 福建省南安市五星中学，福建 南安 362341)

摘 要：本文建立了涉及两个单形一个几何不等式，并应用它得到单形的一些几何不等式.

关键词：单形；体积；外接球半径；内切球半径.

分类号：AMS(2000) 51K05/CLC number：O184

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)03-0567-04

1 主要结果及应用

我们约定 n 维欧氏空间 E^n 中 n 维单形 Ω_n 的顶点为 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$，棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(0\leqslant i<j\leqslant n)$，体积为 V，单形 Ω_n 的顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的面积为 $S_i(i=0,1,\cdots,n)$. 单形 Ω_n 的侧面 f_i 上任一点 $A'_i(i=0,1,\cdots,n)$，以 $A'_0,A'_1,\cdots,A'_n$ 为顶点的单形 Ω'_n 称为单形 Ω_n 的一个内接单形，本文主要结果是：

定理1 设 n 维单形 Ω_n 的内接单形 Ω'_n 的棱长为 $a'_{ij}=|A'_iA'_j|(0\leqslant i<j\leqslant n)$，$x_i>0(i=0,1\cdots,n)$ 为任一组正数，则有

$$\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i^{-1}S_i^2\Big)\Big(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_ja_{ij}'^2\Big)\geqslant n^2\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i\Big)V^2, \tag{1}$$

等号成立当且仅当 Ω'_n 为 E^n 中某点 P 关于单形 Ω_n 的垂足单形[1]，且点 P 关于单形 Ω'_n 的重心坐标为

$$(x_0:x_1:\cdots:x_n)=\big(S_0^2/V_0:S_1^2/V_1:\cdots:S_n^2/V_n\big), \tag{2}$$

其中 V_i 表示 n 维单形 $A_0\cdots A_{i-1}PA_{i+1}\cdots A_n$ 的体积.

我们先介绍不等式(1)的一些应用，然后再完成它的证明，为此我们需引用下面几个不等式.

设 n 维单形 Ω_n 的所有 k 维子单形的 k 维体积平方和为 $N_k(k=1,2,\cdots,n)$，则有[2]

$$N_k^l\geqslant\frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}[(n+1)!]^{l-k}N_l^k(1\leqslant k<l\leqslant n), \tag{3}$$

等号成立当且仅当单形 Ω_n 的顶点集是惯量等轴的.

---

* 收稿日期：2000-11-08

基金项目：安徽省教育厅科研基金资助项目(2003kj067)

作者简介：杨世国(1952-)，男，教授.

在 n 维单形 Ω_n 的棱长与外接球半径 R 之间成立不等式[3]

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}^2 \leqslant (n+1)^2 R^2, \tag{4}$$

等号成立当且仅当单形 Ω_n 的外心与重心重合.

在 n 维单形 Ω_n 的体积 V 与内切球半径 r 之间成立不等式[4]

$$V \geqslant \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} r^n, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 Ω_n 为正则单形.

应用不等式(1),(3),(4)与(5)可得下面一个不等式.

推论 1 设 n 维单形 Ω_n 的外接球半径为 R,内切球半径为 r,它的内接单形 Ω_n' 的外接球半径为 R',则有

$$R'R^{n-1} \geqslant n^{n-1} r^n, \tag{6}$$

当 Ω_n 为正则单形且 Ω_n' 为其切点单形时等号成立.

特别当 Ω_n' 为单形 Ω_n 的切点单形时,$R'=r$,由不等式(6)便得著名的 n 维 Euler 不等式[5]

$$R \geqslant nr, \tag{7}$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立.

文献[6]中给出单形二面角余弦之和的上界估计

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \cos\theta_{ij} \leqslant \frac{1}{2}(n+1). \tag{8}$$

利用定理 1 我们可得到单形二面角余弦之和的一个下界估计,即

推论 2 设 $\theta_{ij}(0\leqslant i<j\leqslant n)$ 为 n 维单形 Ω_n 的诸二面角,则有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \cos\theta_{ij} \geqslant \frac{1}{2} n^{2(n-1)}(n+1)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2(n-1)} - \frac{1}{2}n(n+1), \tag{9}$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立.

若在定理 1 中取 A_i' 为单形 Ω_n 的第 i 个侧面 f_i($n-1$ 维单形)的重心 $G_i(i=0,1,\cdots,n)$,则 $a_{ij}'=|G_iG_j|=\frac{1}{n}a_{ij}(0\leqslant i<j\leqslant n)$,于是得到下面不等式.

推论 3 对 n 维单形 Ω_n 和任一组正数 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$,有

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{-1} S_i^2\right)\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j a_{ij}^2\right) \geqslant n^4 \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) V^2, \tag{10}$$

当 Ω_n 为正则单形且 $x_0=x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立.

若在不等式(10)中依次取 $x_i=S_i^2, x_i=S_i(i=0,1,\cdots,n)$,得

推论 4 对 n 维单形 Ω_n,有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (S_iS_ja_{ij})^2 \geqslant \frac{n^4}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} S_i^2\right) V^2; \tag{11}$$

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} S_iS_ja_{ij}^2 \geqslant n^2 V^2. \tag{12}$$

当 Ω_n 为正则单形时(11),(12)中等号成立.

利用不等式(12)可得下面两个不等式.

推论 5 设 h_i 为单形 Ω_n 从顶点 A_i 向侧面 f_i 所引的高线长,β_{ij} 与 β_{ji} 分别为棱 A_iA_j 与侧

面 f_i，f_j 所成的角，则有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{a_{ij}^2}{h_ih_j}\geqslant n^2; \tag{13}$$

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\sin\beta_{ij}\cdot\sin\beta_{ji}}\geqslant n^2. \tag{14}$$

当 Ω_n 为正则单形时(13)，(14)中等号成立.

2 引理与定理的证明

为了证明定理 1，我们先证下面的引理 1.

引理 1 设 E^n 中一点 P 关于坐标单形 Ω_n 的重心规范坐标为$(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1)$，则有

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overline{PA_i}^2=\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_ja_{ij}^2, \tag{15}$$

证明 由题设可知，对 E^n 中任一点 Q，有

$$\overrightarrow{QP}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i},$$

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{PA_i}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\overrightarrow{QA_i}-\overrightarrow{QP})=\vec{0},$$

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i}^2=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA_i})^2=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QP}+2\,\overrightarrow{QP}\cdot\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{PA_i}+$$

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{PA_i}^2=\overrightarrow{QP}^2+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{PA_i}^2.$$

在上式中依次令 $Q=A_0,A_1,\cdots,A_n$，得到 $n+1$ 个等式，将这 $n+1$ 个等式两边依次乘以 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 后再相加，得

$$2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\,\overrightarrow{A_iA_j}^2=2\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{PA_i}^2,$$

所以(15)成立.

定理 1 的证明 在 E^n 中取一点 P，使它关于内接单形 Ω_n' 的重心规范坐标为$(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_i=x_i(\sum_{i=0}^{n}x_i)^{-1}$. 由引理 1 有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_ja_{ij}'^2=\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i\,\overrightarrow{PA_i'}^2\Big). \tag{16}$$

自点 P 引单形 Ω_n 的各侧面 f_i 的垂线 PQ_i(Q_i 为垂足)，显然有

$$\sum_{i=0}^{n}x_i\,\overrightarrow{PA_i'}^2\geqslant\sum_{i=0}^{n}x_i\,\overrightarrow{PQ_i}^2, \tag{17}$$

等号成立当且仅当 $A_i'\equiv Q_i(i=0,1,\cdots,n)$. 由单形的体积公式与 Cauchy 不等式，有

$$\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i\,\overrightarrow{PQ_i}^2\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n}x_i^{-1}S_i^2\Big)\geqslant\Big(\sum_{i=0}^{n}S_i\,|\overrightarrow{PQ_i}|\Big)^2=(nV)^2. \tag{18}$$

由(16),(17),(18)三式便知不等式(1)成立,且由证明过程易知(1)中等号成立的条件. □

参考文献:

[1] 张 垚,关于垂足单形的一个猜想 [J]. 系统科学与数学, 1992, **12**(4): 371—375.
ZHANG Yao. *A conjecture on pedal simplices* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1992, **12**(4): 371—375.

[2] 杨路,张景中. 关于有限点集的一类几何不等式 [J]. 数学学报, 1980, **23**(5): 740—749.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *A class of geometric inequalities on finite points* [J]. Acta Math. Sinica, 1980, **23**(5): 740—749.

[3] YANG Shi-guo. *Extensions of Klamkin's theorem* [J]. Northest. Math. J., 1991, **7**(4): 424—427.

[4] MITRINOVIC D S, PECARIC J E, VOLENEC V. *Recent Advaces in Geometric Inequalities* [M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1989.

[5] KLAMKIN M S. *Inequality for a simplex* [J]. SIAM. Rev, 1985, **27**(4): 576.

[6] 苏化明. 预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件的一个应用 [J]. 数学杂志, 1987, **7**(1): 46—51.
SU Hua-ming. *An application of the sufficient and necessary condition for embeding a simplex with presribed dihedral angles in* E^n[J]. J. of Math., 1987, **7**(1): 46—51.

Some Geometric Inequalities Involving Two Simplices

YANG Shi-guo[1], CHEN Sheng-li[2]

(1. Dept. of Math., Anhui Educational Institute, Hefei 230061, China;
2. Wuxing School, Nanan, Fujian 362341, China)

Abstract: In this paper, a geometric inequality involving two simplexes are established. Applying this inequality, we get some geometric inequalities for simplexes.

Key words: simplex; volume; circumradius; inradius.