第23卷第4期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

一平面 Hamilton 系统的 Abel 积分的零点个数估计*

宋 燕
(渤海大学数学系，辽宁 锦州 121000)

摘 要：本文讨论一平面 Hamilton 系统在一般 n 次多项式扰动下的系统的 Abel 积分的零点个数估计问题，得到的结论是：该系统的 Abel 积分的零点个数的上界为$[\frac{3n-1}{2}]$.

关键词：Hamilton 系统；Abel 积分；Picard-Fuchs 方程.
分类号：AMS(2000) 34C05，37G/CLC number：O175
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)04-0651-07

确定 Abel 积分零点个数的上界，是当今分岔理论研究的热门课题之一，这一问题和确定 Hamilton 系统在多项式扰动下的极限环个数密切相关. 由于这是 Hilbert 第十六问题的一种特殊情况，所以把它叫做弱化的 Hilbert 第十六问题. 对于这一问题的研究可从以下两个方面入手：一是对 Hamilton 系统的低次扰动，给出 Abel 积分零点个数的上确界；二是对 Hamilton 系统的 n 次扰动，给出 Abel 积分零点个数的上界估计. 本文以 Picard-Fuchs 方程法为基础，利用 Riccati 方程及广义 Rolle 中值定理讨论一平面 Hamilton 系统的 n 次扰动系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y + \mu P_n(x,y), \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \mu Q_n(x,y),\end{cases} \tag{1}$$

Abel 积分的零点个数估计问题，其中 $P_n(x,y)$，$Q_n(x,y)$ 都是 x,y 的 n 次多项式，μ 为小参数.

当 $\mu = 0$ 时，系统(1) 为 Hamilton 系统，它有首次积分

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} = h, \tag{2}$$

闭轨族为

$$\Gamma_h = \{(x,y) \mid H(x,y) = h,\ -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}\}.$$

当 $h \to -\frac{2}{3}$ 时，Γ_h 缩向奇点$(-1,0)$，当 $h \to \frac{2}{3}$ 时，Γ_h 扩大为过$(1,0)$ 点的同宿环. 于是系统(1) 的 Abel 积分为

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} Q_n(x,y)\mathrm{d}x - P_n(x,y)\mathrm{d}y, \quad -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}.$$

* 收稿日期：2000-12-11
作者简介：宋 燕(1962-)，女，硕士，副教授.

1 $I(h)$ 的代数构造

记 $I_{ij}(h)=\oint_{\Gamma_h}x^iy^j\mathrm{d}x, I_k(h)=I_{k1}(h), k=0,1\cdots,n-1.$

引理 1 系统(1) 的 Abel 积分 $I(h)$ 可表示为

$$I(h)=\alpha(h)I_0(h)+\beta(h)I_1(h),$$

这里 $\alpha(h),\beta(h)$ 是 h 的多项式. 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\deg\alpha(h)\leqslant[\frac{n-1}{2}],\deg\beta(h)\leqslant[\frac{n-2}{2}].$$

当 $n=1$ 时,

$$\deg\alpha(h)=0,\beta(h)=0.$$

证明 由格林公式, $I(h)=\oint_{\Gamma_h}P(x,y)\mathrm{d}x$, 其中 $\deg P(x,y)\leqslant n$. 对(2) 式两边关于 x 求导得

$$y\frac{\partial y}{\partial x}+1-x^2=0,$$

两边乘以 $x^{l-2}y^m$ 并沿 Γ_h 积分, 由分部积分法得

$$I_{lm}=\oint_{\Gamma_h}x^{l-2}y^{m+1}\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x+I_{l-2,m}=-\frac{l-2}{m+2}I_{l-3,m+2}+I_{l-2,m}\quad(l\geqslant 2).\tag{3}$$

将(2) 式两边乘以 x^ly^{m-2} 并沿 Γ_h 积分得

$$\frac{1}{2}I_{lm}+I_{l+1,m-2}-\frac{1}{3}I_{l+3,m-2}=hI_{l,m-2}\quad(m\geqslant 2).\tag{4}$$

由等式(3) 得 $I_{l+3,m-2}=-\frac{l+1}{m}I_{lm}+I_{l+1,m-2}$, 将其代入(4) 得

$$\frac{3m+2l+2}{6m}I_{lm}=hI_{l,m-2}-\frac{2}{3}I_{l+1,m-2}\quad(m\geqslant 2).\tag{5}$$

令 $d=l+m\geqslant 2$, 在(5) 式中令 $l=0,1$ 得

$$\frac{3d+2}{6d}I_{0d}=hI_{0,d-2}-\frac{2}{3}I_{1,d-2}$$

$$\frac{3d+1}{6(d-1)}I_{1,d-1}=hI_{1,d-3}-\frac{2}{3}I_{2,d-3}\quad(\text{由(3) 式})$$

$$=hI_{1,d-3}-\frac{2}{3}I_{0,d-3}.$$

在(3)式中令 $l=2,3,\cdots,d-1,d$ 得

$$I_{2,d-2}=I_{0,d-2},$$

$$I_{3,d-3}=-\frac{1}{d-1}I_{0,d-1}+I_{1,d-3},$$

$$I_{4,d-4}=-\frac{2}{d-2}I_{1,d-2}+I_{2,d-4}=-\frac{2}{d-2}I_{1,d-2}+I_{0,d-4},$$

………

$$I_{d-1,1}=-\frac{d-3}{3}I_{d-4,3}+I_{d-3,1}\quad(\text{再用公式(3)}),$$

$$I_{d0}=-\frac{d-2}{2}I_{d-3,2}+I_{d-2,0}\quad（再用公式(3)），$$

于是得到

$$AJ=B,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}A_2 & \\ & E\end{pmatrix},J=\mathrm{col}(I_{0d},I_{1,d-1},\cdots,I_{d0}),$$

E 是一个 $d-1$ 阶单位阵，

$$A_2=\begin{bmatrix}\frac{3d+2}{6d} & 0\\ 0 & \frac{3d+1}{6(d-1)}\end{bmatrix}.$$

因为当 $d\geqslant 2$ 时，$\det A_2\neq 0$，且 B 仅包含 $I_{ij},i+j\leqslant d-1$ 和 $hI_{ij},i+j=d-2,i=0,1$. 从而可知：若 $l+m=d\geqslant 2$，则 I_{lm} 可以表示为 $I_{ij},i+j\leqslant d-1$ 和 $hI_{ij},i+j=d-2,i=0,1$ 的线性组合. 而对 I_{ij}，当 $i=0$ 或 $i=1$ 时，若 I_{ij} 中 $j\geqslant 2$，则反复应用公式(5)、(3)，可知 $I_{ij}(j\geqslant 2)$ 可表示为 I_{01},I_{11} 的线性组合（注意 $I_{10}=I_{00}=0$），从而有

$$I(h)=\alpha(h)I_0(h)+\beta(h)I_1(h),$$

其中 $\alpha(h),\beta(h)$ 为 h 的多项式.

下面用数学归纳法证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$\deg\alpha(h)\leqslant[\frac{n-1}{2}]$，$\deg\beta(h)\leqslant[\frac{n-2}{2}]$.

当 $n=2$ 时，

$$I(h)=aI_0+bI_1=\alpha^2(h)I_0+\beta^2(h)I_1,$$

所以

$$\deg\alpha^2(h)=\deg\beta^2(h)=0,$$

即 $n=2$ 时结论成立.

当 $n=3$ 时，

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h}P_3(x,y)\mathrm{d}x,$$

令

$$P_3(x,y)=\sum_{i+j\leqslant 3}a_{ij}x^iy^j,$$

由公式(3)、(5)得

$$\begin{aligned}I(h)&=a_{21}I_{21}+a_{03}I_{03}+a_{11}I_{11}+a_{01}I_{01}\\&=a_{21}I_{01}+a_{03}(\frac{18}{11}hI_{01}-\frac{12}{11}I_{11})+a_{11}I_{11}+a_{01}I_{01}\\&=(\frac{18}{11}a_{03}h+a_{21}+a_{01})I_{01}+(a_{11}-\frac{12}{11}a_{03})I_{11}\\&=\alpha^3(h)I_0+\beta^3(h)I_1,\end{aligned}$$

其中 $\deg\alpha^3(h)\leqslant 1,\deg\beta^3(h)=0$，即 $n=3$ 时结论成立.

假定 $n\leqslant d-1$ 时结论成立，即 $I(h)=\oint_{\Gamma_h}P_n(x,y)\mathrm{d}x$ 可表示为

$$I(h)=\alpha^n(h)I_0+\beta^n(h)I_1,$$

这里

$$\deg\alpha^n(h)\leqslant[\frac{n-1}{2}],\deg\beta^n(h)\leqslant[\frac{n-2}{2}],$$

则当 $n=d$ 时，由前面所证的结论得：

$$\begin{aligned}I(h)=&\sum_{i+j\leqslant d-1}A_{ij}I_{ij}+h\sum_{i+j=d-2}B_{ij}I_{ij}\\=&\alpha^{d-1}(h)I_0+\beta^{d-1}(h)I_1+h[\alpha^{d-2}(h)I_0+\beta^{d-2}(h)I_1]\\=&[\alpha^{d-1}(h)+h\alpha^{d-2}(h)]I_0+[\beta^{d-1}(h)+h\beta^{d-2}(h)]I_1\\=&\alpha^d(h)I_0+\beta^d(h)I_1,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\deg\alpha^d(h)=&\max\{\deg\alpha^{d-1}(h),1+\deg\alpha^{d-2}(h)\}\\\leqslant&\max\{[\frac{d-2}{2}],1+[\frac{d-3}{2}]\}=[\frac{d-1}{2}].\end{aligned}$$

故对任意的 n，$\deg\alpha(h)\leqslant[\frac{n-1}{2}]$，类似可证对任意的 n，$\deg\beta(h)\leqslant[\frac{n-2}{2}]$.

当 $n=1$ 时，$I(h)=aI_0$，所以 $\deg\alpha(h)=0,\beta(h)=0$. □

设 $[\frac{n-1}{2}]=p,[\frac{n-2}{2}]=q$，下面证明 p,q 分别为 $\deg\alpha(h),\deg\beta(h)$ 的上确界.

引理 2 存在 $T_n(x,y),R_n(x,y)$，使得

$$h^{[\frac{n-1}{2}]}I_0=\oint_{\Gamma_h}T_n(x,y)\mathrm{d}x,\tag{6}$$

$$h^{[\frac{n-2}{2}]}I_1=\oint_{\Gamma_h}R_n(x,y)\mathrm{d}x,\tag{7}$$

这里 $\deg T_n(x,y)=\deg R_n(x,y)=n$，由此可知存在 $P(x,y),\deg P(x,y)\leqslant n$，使得

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h}P(x,y)\mathrm{d}x=h^{[\frac{n-1}{2}]}I_0+h^{[\frac{n-2}{2}]}I_1,$$

即 p,q 分别是 $\deg\alpha(h),\deg\beta(h)$ 的上确界.

证明 用归纳法证(6)式.(7)的证明同理.

由前面的计算可知：当 $n=2$ 时，

$$I_0=\oint_{\Gamma_h}y\mathrm{d}x=\oint_{\Gamma_h}(x^2+y)\mathrm{d}x;$$

当 $n=3$ 时，

$$I_{03}=\frac{18}{11}hI_0-\frac{12}{11}I_1,$$

所以

$$hI_0=\frac{11}{18}I_{03}+\frac{2}{3}I_1=\oint_{\Gamma_h}(\frac{11}{18}y^3+\frac{2}{3}xy)\mathrm{d}x,$$

即 $n=2,3$ 时结论成立.

假设 $n\leqslant d-1$ 时结论成立，即存在 $T_n(x,y)=\sum_{i+j\leqslant n}c_{ij}x^iy^j,\deg T_n(x,y)=n$，使得

$$h^{[\frac{n-1}{2}]}I_0 = \sum_{i+j\leqslant n} c_{ij}\oint_{\Gamma_h} x^i y^j \mathrm{d}x = \sum_{i+j\leqslant n} c_{ij} I_{ij},$$

则当 $n = d$ 时，$h^{[\frac{d-1}{2}]}I_0 = h \cdot h^{[\frac{d-3}{2}]}I_0$. 由归纳假设，$h^{[\frac{d-3}{2}]}I_0 = \sum\limits_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}I_{ij}$，所以

$$h^{[\frac{d-1}{2}]}I_0 = h\sum_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}I_{ij} = \sum_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}hI_{ij}.$$

把 $l = i, m = j + 2$ 代入(5) 式得

$$hI_{ij} = \frac{3j+2i+8}{6(j+2)}I_{i,j+2} + \frac{2}{3}I_{i+1,j},$$

故

$$\begin{aligned} h^{[\frac{d-1}{2}]}I_0 &= \sum_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}\left[\frac{3j+2i+8}{6(j+2)}I_{i,j+2} + \frac{2}{3}I_{i+1,j}\right] \\ &= \oint_{\Gamma_h}\sum_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}\left[\frac{3j+2i+8}{6(j+2)}x^i y^{j+2} + \frac{2}{3}x^{i+1}y^j\right]\mathrm{d}x \\ &= \oint_{\Gamma_h} T_d(x,y)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中

$$T_d(x,y) = \sum_{i+j\leqslant d-2} c_{ij}\left[\frac{3j+2i+8}{6(j+2)}x^i y^{j+2} + \frac{2}{3}x^{i+1}y^j\right],$$

显然 $\deg T_d(x,y) = d$. 因此对一切 n，(6)式成立. □

2　Picard-Fuchs 方程

由(2)式，两边对 h 求导得 $\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{y}$，所以 $I'_k(h) = \oint_{\Gamma_h}\frac{x^k}{y}\mathrm{d}x$，将 $m = -1, l = k + 3$ 代入(3)式得

$$I_k(h) = \frac{1}{k+1}[I'_{k+1}(h) - I'_{k+3}(h)]. \tag{8}$$

另一方面，

$$I_k(h) = \oint_{\Gamma_h}\frac{x^k y^2}{y}\mathrm{d}x = 2hI'_k - 2I'_{k+1} + \frac{2}{3}I'_{k+3}. \tag{9}$$

由(8)、(9) 式中消去 I'_{k+3} 得 $(2k+5)I_k(h) = -4I'_{k+1}(h) + 6hI'_k(h)$，于是有

$$\begin{cases} 5I_0 = -4I'_1 + 6hI'_0, \\ 7I_1 = -4I'_2 + 6hI'_1. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{d}H = y\mathrm{d}y + (1-x^2)\mathrm{d}x$，从而 $(1-x^2)y\mathrm{d}x = y\mathrm{d}H - y^2\mathrm{d}y$，沿 Γ_h 积分得 $I_2(h) \equiv I_0(h)$，即

$$\begin{cases} 5I_0 = 6hI'_0 - 4I'_1, \\ 7I_1 = -4I'_0 + 6hI'_1, \end{cases}$$

解出 I'_0, I'_1 得

$$\begin{cases}(9h^2-4)I_0' = \frac{15}{2}hI_0 + 7I_1, \\ (9h^2-4)I_1' = 5I_0 + \frac{21}{2}hI_1.\end{cases} \tag{10}$$

3 Abel 积分的零点个数估计

由前面证明知 $I(h) = \alpha(h)I_0(h) + \beta(h)I_1(h)$. 若 $\alpha(h)$, $\beta(h)$ 没有公因子，令 $P = \frac{\alpha(h)}{\beta(h)} + \frac{I_1(h)}{I_0(h)}$，则易知 $\#\{I(h)=0\} = \#\{P=0\}$. 由(10)式知

$$\begin{aligned}P' &= \frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\beta^2} + \frac{I_0I_1'-I_0'I_1}{I_0^2} \\ &= \frac{1}{9h^2-4}[-7P^2+(3h+\frac{14\alpha}{\beta})P] + \frac{5-3h\frac{\alpha}{\beta}-7\frac{\alpha^2}{\beta^2}}{9h^2-4} + \frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\beta^2} \\ &= \frac{1}{9h^2-4}[-7P^2+(3h+\frac{14\alpha}{\beta})P] + \\ &\quad \frac{(9h^2-4)(\alpha'\beta-\beta'\alpha)+5\beta^2-3h\alpha\beta-7\alpha^2}{\beta^2(9h^2-4)}.\end{aligned}$$

于是由广义罗尔定理得

$$\begin{aligned}\#\{I(h)=0\} = \#\{P=0\} &\leqslant \deg[(9h^2-4)(\alpha'\beta-\beta'\alpha)+ \\ &\quad 5\beta^2-3h\alpha\beta-7\alpha^2] + \deg\beta + 1 \\ &\leqslant p+q+1+q+1 \\ &= [\frac{n-1}{2}] + 2[\frac{n-2}{2}] + 2 \\ &\leqslant [\frac{3n-1}{2}].\end{aligned}$$

若 $\alpha(h)$, $\beta(h)$ 有公因子 $P_m(h)$，则 $\alpha(h) = P_m(h)\alpha_1(h)$, $\beta(h) = P_m(h)\beta_1(h)$，于是，

$$I(h) = P_m(h)[\alpha_1(h)I_0(h) + \beta_1(h)I_1(h)],$$

其中 $\deg\alpha_1(h) \leqslant p-m$, $\deg\beta_1(h) \leqslant q-m$, $\alpha_1(h)$ 与 $\beta_1(h)$ 互素. 从而

$$\#\{I(h)=0\} = \#\{P_m(h)=0\} + \#\{\alpha_1(h)I_0(h)+\beta_1(h)I_1(h)=0\},$$

而 $\#\{P_m(h)=0\} \leqslant m$，同上面讨论

$$\begin{aligned}\#\{\alpha_1(h)I_0(h)+\beta_1(h)I_1(h)=0\} &\leqslant p-m+q-m+1+q-m+1 \\ &= p+2q+2-3m \\ &\leqslant [\frac{3n-1}{2}] - 3m,\end{aligned}$$

于是 $\#\{I(h)=0\} \leqslant [\frac{3n-1}{2}]$.

当 $n=1$ 时，$I(h) = aI_0$，所以 $\#\{I(h)=0\}=0$

综上所述，得如下定理

定理 系统(1)的 Abel 积分的零点个数的上界为$[\frac{3n-1}{2}]$.

参考文献:

[1] 张芷芬,李承治,郑志明,等. 向量场的分岔理论基础 [M]. 北京:高等教育出版社, 1997.
ZHANG Zhi-fen, LI Cheng-zhi, ZHENG Zhi-ming, et al. *The Basis of Bifurcation Theory for Vector Fields* [M]. Beijing: The Higher Education Press, 1997. (in Chinese)

[2] NOVIKOV D, YAKOVENKO S. *Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals* [J]. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1995, **45**: 897—927.

[3] 赵育林. 三次 Hamilton 向量场的 Abel 积分 [D]. 北京大学博士研究生学位论文,1998.
ZHAO Yu-lin. *Abelian Integrals for cubic Hamiltonian Vector Fields* [D]. The Doctoral Thesis in Peking University, 1998.

Estimation of the Number of Zeros of Abelian Integrals of a Planar Hamiltonian System

SONG Yan

(Dept. of Math., Bohai University, Jinzhou 121000, China))

Abstract: In this paper, we study the number of zeros of Abelian integrals of a planar Hamiltonian system when we perturb it inside the class of all polynomial systems of degree n. We obtain that the upper bound of the number is $[\frac{3n-1}{2}]$.

Key words: Hamiltonian system; Abelian integrals; Picard-Fuchs equation.