第23卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 4
2003年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2003

# 非欧椭圆几何的若干度量问题*

左铨如，　华冬英
(扬州大学数学系，江苏 扬州 225002)

**摘　要**：本文用新方法讨论解决了 $n$ 维椭圆空间 $S^n$ 中若干几何问题. 给出了关于 $n$ 维球面单形的余弦定理、高的公式、内切及外接球半径 $r,R$ 以及内心 $I$ 与外心 $Q$ 间的距离公式. 同时将著名的欧拉不等式推广到 $S^n$ 中.

**关键词**：椭圆几何；度量方程；高维余弦定理.
**分类号**：AMS(2000) 51M10/CLC number：O184
**文献标识码**：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0658-07

在 $n+1$ 维实向量空间 $L^{n+1}$ 中，取所有满足条件

$$x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1$$

的点 $X=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 作成一个子集 $B$，在 $B$ 上定义一个距离，使其中任意两点 $X$ 与 $Y$ 之间的距离 $\widehat{XY}$ 由下式规定之：

$$\cos\frac{\widehat{XY}}{r}=X\cdot Y=x_0y_0+x_1y_1+\cdots+x_ny_n, \tag{1}$$

对 $B$ 赋予这个距离之后得到一个度量空间，记作 $S_r^n$，通常叫做 $n$ 维椭圆空间，并称 $\frac{1}{r^2}$ 为空间的曲率. 为方便计，以下就 $r=1$ 的情况予以研究. 这时空间 $S^n$ 中任两点 $X,Y$ 间的距离

$$\widehat{XY}=\arccos(X\cdot Y), \tag{1'}$$

当且仅当 $X=-Y$ 时有最大值 $\pi$. 这时的两点称为一双对径点.

$S^n$ 中到两点 $A,B$(非对径点)距离之和为最小(等于定值 $\theta=\widehat{AB}$)的点 $X$ 的集合称为线段 $AB$，它的参数方程为

$$X=\frac{A\sin(1-t)\theta+B\sin t\theta}{\sin\theta},\quad t=\frac{\widehat{AX}}{\widehat{AB}}\in[0,1].$$

本文以格拉斯曼代数为工具来研究 $n$ 维椭圆几何，从而可以解决某些难以解决的问题[1],[2].

* 收稿日期：2001-01-08
作者简介：左铨如(1941- )，男，副教授.

## 1 $L^{n+1}$的对偶空间

设 $S^n$ 中点 $P_i=(p_{i0},p_{i1},\cdots,p_{in})^\tau(i=0,1,\cdots,k)$所对应的 $k$ 阶非负定阵：

$$\begin{pmatrix} P_0^\tau \\ P_1^\tau \\ \vdots \\ P_k^\tau \end{pmatrix}(P_0P_1\cdots P_k)=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k0} & p_{k1} & \cdots & p_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & \cdots & p_{k0} \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & k_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{0n} & p_{1n} & \cdots & p_{kn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & \cos\widehat{P_iP_j} \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ \cos\widehat{P_jP_i} & & 1 \end{pmatrix}=M[\Omega]$$

称为点集 $\Omega=\{P_0,P_1,\cdots,P_k\}$的度量矩阵. 显然它的秩不超过 $k+1$.

当 $k>n$ 时，点 $P_0,P_1,\cdots,P_k$ 是线性相关点组，总有

$$\det M[\Omega]=0(\text{称为 }\Omega\text{ 的度量方程}). \qquad (2)$$

当 $k\leqslant n$，且点 $P_0,P_1,\cdots,P_k$ 是无关点组时，有

$$\det M[\Omega]>0,$$

这时称 $\Omega$ 为 $k$ 维单形.

对于 $S^n$ 中 $n+1$—有序点列 $P_0,P_1,\cdots,P_n$，若

$$\det(P_0P_1\cdots P_n)>0,$$

则称它是正向无关的或正向单形. 我们研究的 $n$ 维单形仅限于正向无关的. 并且将对应的 $n+1$ 阶度量矩阵 $M[\Omega]$记作 $A=(\cos\widehat{P_iP_j})$，$A$ 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & & \cos\widehat{P_iP_j} \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ \cos\widehat{P_iP_j} & & 1 \end{vmatrix}=[\det(P_0P_1\cdots P_n)]^2>0, \qquad (3)$$

下面先就 $L^{n+1}$中的点(即矢径)$P_i=(p_{i0}p_{i1}\cdots p_{in})^\tau$ 引进外乘"$\wedge$"运算得到 $k$ 重向量

$$\alpha=P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_k,$$

规定它满足结合律、线性分配律和反交换律，从而成为向量空间 $L^{n+1}$上的格拉斯曼代数.

**引理 1**[3] 设 $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 是 $L^{n+1}$ 的一组基，$P_i=\sum_{j=0}^{n}p_{ij}e_j(i=0,1,\cdots,k\leqslant n)$ 则有

$$P_0\wedge P_1\wedge\cdots\wedge P_k=\sum_{0\leqslant i_0<\cdots<i_k\leqslant n}\begin{vmatrix} p_{0i_0} & p_{1i_0} & \cdots & p_{ki_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{0i_k} & p_{1i_k} & & p_{ki_k} \end{vmatrix}e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}.$$

特别地 $P_0\wedge P_1\wedge\cdots\wedge P_n=\det(P_0P_1\cdots P_n)e_0\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n$.

**引理 2** $L^{n+1}$中 $k$ 个点 $P_1,\cdots,P_k$ 线性无关的充要条件是 $P_1\wedge\cdots\wedge P_k\neq 0$.

由引理 1 知 $k$ 重向量 $\sum\lambda(P_1\wedge\cdots\wedge P_k)(\lambda\in R,P_1,\cdots,P_k\in L^{n+1})$的全体构成一个 $C_{n+1}^k$维

向量空间，记作$\wedge^k L$，称为$k$重向量空间.我们对$n$重向量空间$\wedge^n L$特别有兴趣，因为它也是$n+1$维的向量空间，而且$\wedge^n L$与$L^{n+1}$成对偶空间，只要对它们的基底定义数量积就行了.

设$e_0,e_1,\cdots,e_n$是$L^{n+1}$的一组正交规范基，即$e_ie_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j,\end{cases}$则$n$重向量

$e_j^*=(-1)^j e_0\wedge\cdots\wedge e_{j-1}\wedge e_{j+1}\wedge\cdots\wedge e_n(j=0,1,\cdots,n)$就是$\wedge^n L$的一组正交规范基，要验证它需要用到两个$k$重向量$\alpha$、$\beta$的内积定义：

$$\alpha\beta=(P_1\wedge\cdots\wedge P_k)(Q_1\wedge\cdots\wedge Q_k)\overset{d}{=}\begin{vmatrix}P_1Q_1 & \cdots & P_1Q_k\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ P_kQ_1 & \cdots & P_kQ_k,\end{vmatrix}, \tag{4}$$

则有

$$|P_1\wedge\cdots\wedge P_k|=[\det(P_i\cdot P_j)]^{\frac{1}{2}}.$$

现在来定义空间$L^{n+1}$和$\wedge^n L$中任意一对基向量$e_i$和$e_j^*$的数量积

$$(e_i,e_j^*)\overset{d}{=}(-1)^j\det(e_ie_0e_1\cdots e_{j-1}e_{j+1}\cdots e_n)=\delta_{ij}.$$

**推论1** 若$X=\sum\limits_{i=0}^{n}x_ie_i\in L^{n+1},\alpha=P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n=\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_je_j^*\in\wedge^n L$，则

$$(X,\alpha)=\det(XP_1P_2\cdots P_n)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix_i.$$

## 2 主要结果

**定义1** 对$S^n$中的$n$维单形$\Omega=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，作$n$重向量$f_i=(-1)^iP_0\wedge P_1\wedge\cdots\wedge P_{i-1}\wedge P_{i+1}\wedge\cdots\wedge P_n\in\wedge^n L$，称$f_i$是$\Omega$的顶点$P_i$所对侧面的一个方位向量，称$U_i=f_i/|f_i|$为$\Omega$的顶点$P_i$所对的定向侧面的极点；称单形$\{U_0,U_1,\cdots,U_n\}$为$\Omega$的对偶单形.显然有

$$|A|=|P_0\wedge P_1\wedge\cdots\wedge P_n|^2\leqslant|P_i|^2|f_i|^2=|f_i|^2\leqslant 1, \tag{5}$$

故当$|A|=1$时，所有的$|f_i|=1$.这样的单形所有的棱长皆为$\frac{\pi}{2}$，即$P_i\cdot P_j=\delta_{ij}$.

在上述定义中，我们给单形的各个侧面——$(n-1)$维超平面定了向.一般地，过$n$个有序点$P_1,P_2,\cdots,P_n$的定向超平面由它的极$U^*=P_1\wedge\cdots\wedge P_n/|P_1\wedge\cdots\wedge P_n|=\sum\limits_{j=0}^{n}u_je_j^*$完全确定.对于$S^n$中任一点$X(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，据推论1有

$$\cos\widehat{XU}^*=(X,U^*)=u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n.$$

当$\widehat{XU}^*<\frac{\pi}{2}$时，$u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n>0$；

当$\widehat{XU}^*>\frac{\pi}{2}$时，$u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n<0$；

当$\widehat{XU}^*=\frac{\pi}{2}$时，$u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n=0.$ (6)

称(6)式是极为$U^*$的定向超平面的方程.

**定理1** 任一点$X\in S^n$到极为$U^*$的定向超平面(6)的带号距离$\bar{h}=\frac{\pi}{2}-\widehat{XU}^*$由下式

确定

$$\sin\bar{h} = (X, U^*) = \frac{\det(XP_1P_2\cdots P_n)}{|P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n|}, \quad \bar{h} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

**推论 2** $S^n$ 中单形 $\Omega = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ 的顶点 $P_i$ 所对侧面 $f_i$ 上的高 $h_i$ 由下面的公式确定

$$\sin^2 h_i = \frac{[\det(P_0P_1\cdots P_n)]^2}{|f_i|^2} = \frac{|A|}{A_{ii}}, \tag{7}$$

这里 $|f_i|^2 = A_{ii}$ 是侧面 $f_i$($n-1$ 维单形)的度量矩阵的行列式.

**定义 2** 极为 $U^*, V^*$ 的两个定向超平面相交成两个互补的二面角,其中一个称为内二面角,另一个称为外二面角.规定用距离 $\widehat{U^*V^*}$ 表示外二面角的大小.

**推论 3** 单形 $\Omega$ 的两个定向侧面 $f_i$ 与 $f_j$ 所成的内二面角 $\hat{f_if_j}$ 由下面的夹角公式确定

$$\cos \hat{f_if_j} = -U_i^* \cdot U_j^* = \frac{-f_i \cdot f_j}{|f_i||f_j|} = \frac{-A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}}\sqrt{A_{jj}}}, \tag{8}$$

其中 $A_{ij} = f_i \cdot f_j$ 是行列式 $|A|$ 中元素 $\cos \widehat{P_iP_j}$ 的代数余子式.

将(8)式代入 $A$ 的伴随矩阵 $adj\ A = (A_{ij}) = A^{-1} \cdot \det A$,得

$$\begin{pmatrix} |f_0|^2 & & & -|f_i||f_j|\cos\hat{f_if_j} \\ & |f_1|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ -|f_i||f_j|\cos\hat{f_if_j} & & & |f_n|^2 \end{pmatrix} = A^{-1}|A|, \tag{9}$$

即

$$\begin{pmatrix} |f_0| & & 0 \\ & |f_1| & \\ & & \ddots & \\ 0 & & |f_n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -\cos\hat{f_if_j} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ -\cos\hat{f_if_j} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |f_0| & & 0 \\ & |f_1| & \\ & & \ddots & \\ 0 & & |f_n| \end{pmatrix} = A^{-1}|A|, \tag{9'}$$

以下记 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & & -\cos\hat{f_if_j} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ -\cos\hat{f_if_j} & & 1 \end{pmatrix}$,$A^*$ 是单形 $\Omega$ 的对偶单形的度量矩阵.由(9)式及文[4]得:

**推论 4**

$$\prod_{i=0}^{n} |f_i|^2 \geqslant \det(A^{-1}|A|) = |A|^n, \tag{10}$$

其中等号成立的充要条件是单形的所有的内二面角皆为$\frac{\pi}{2}$.

由(9′)易得

**推论 5** $|A^*|\prod_{i=0}^{n}|f_i|^2=|A|^n, 0<|A^*|\leqslant 1$.

**定理 2**（$n$ 维球面单形的射影定理）

$$\begin{pmatrix} |f_0|-\sum_{i\neq 0}|f_i|\cos \widehat{f_0 f_i} \\ |f_1|-\sum_{j\neq 1}|f_j|\cos \widehat{f_1 f_j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |f_n|-\sum^{k\neq n}|f_k|\cos \widehat{f_n f_k} \end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix} \frac{1}{|f_0|} & & & 0 \\ & \frac{1}{|f_1|} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{|f_n|} \end{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

**定理 3**（$n$ 维球面单形的余弦定理）

$$|f_k|^2=\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}|f_i|^2-2\sum_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant n\\ i,j\neq k}}|f_i||f_j|\cos \widehat{f_i f_j}-|A|(1\cdots 1\ \overset{\text{第}k\text{个}}{-1}\ 1\cdots 1)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$(k=0,1,\cdots,n).$$

**定理 4** $S^n$ 中 $n$ 维单形 $\Omega=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 的内切球球心（简称内心）

$$I=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{n}|f_i|P_i, \tag{11}$$

其中 $t=|\sum|f_i|P_i|$，故 $|I|=1, I\in S^n$. $\Omega$ 的外接球球心（简称外心）

$$Q=\frac{1}{g}(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\wedge\cdots\wedge(P_n-P_0)=\frac{1}{g}\sum_{i=0}^{n}f_i, \tag{12}$$

其中 $f_i=(-1)^i P_0\wedge P_1\wedge\cdots\wedge P_{i-1}\wedge P_{i+1}\wedge\cdots\wedge P_n\in\wedge^n L, g=|\sum_{i=0}^{n}f_i|$,

$$g^2=|(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\wedge\cdots\wedge(P_n-P_0)|^2=-\begin{vmatrix} 0 & 1\cdots\cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & A \\ 1 & \end{vmatrix}.$$

**定理 5** $\Omega$ 的内切球半径 $r$ 和外接球半径 $R$ 的计算公式

$$\sin r=\cos \widehat{IU_j}=(I,f_j/|f_j|)=\frac{1}{t}\det(P_0P_1\cdots P_n), \tag{13}$$

$$\cos R=(P_j,Q)=\frac{1}{g}\det(P_0P_1\cdots P_n), R<\frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

即

$$\cot^2 r=\frac{t^2}{|A|}-1,\quad \tan^2 R=\frac{g^2}{|A|}-1. \tag{15}$$

从公式(13)、(14)可见约定 $\det(P_0P_1\cdots P_n)>0$ 的必要性，否则 $\Omega$ 的外心不是 $Q$ 而是它的对径点 $-Q$.

**定理 6** 单形的内心 $I$ 与外心 $Q$ 间的距离公式

$$\cos \widehat{IQ} = (I \cdot Q) = \frac{1}{gt}\sum_0^n |f_i| \det(P_0 P_1 \cdots P_n),$$

故

$$\cos^2 \widehat{IQ} = \frac{|A|}{g^2 t^2}\Big(\sum_0^n |f_i|\Big)^2 = \cos^2 R \sin^2 r \Big(\sum_0^n |f_i|\Big)^2 / |A|. \tag{16}$$

由(10)式有

$$\Big(\sum_0^n |f_i|\Big)^2 \geqslant (n+1)^2 \prod_{i=0}^n |f_i|^{\frac{2}{n+1}} \geqslant (n+1)^2 |A|^{\frac{n}{n+1}}.$$

**推论 6**

$$\cos^2 \widehat{IQ} \geqslant (n+1)^2 |A|^{\frac{-1}{n+1}} \cos^2 R \sin^2 r, \tag{17}$$

即

$$|A|^{\frac{1}{n+1}} \cos^2 \widehat{IQ} (1+\tan^2 R)(1+\tan^2 r) \geqslant (n+1)^2 \tan^2 r, \tag{17'}$$

其中等号成立的充要条件是$|f_0| = |f_1| = \cdots = |f_n|$,且$\Omega$的所有内二面角皆为$\frac{\pi}{2}$.

对于正则的$n$维球面单形(所有的棱长皆相等),记$\cos P_iP_j = a \in (-1,1)$,经过耐心的计算知

$$|A| = (1-a)^n (1+na), \quad |f_i|^2 = A_{ii} = (1-a)^{n-1}(1-a+na),$$

$$-g^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \cdots\cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & A \\ 1 & \end{vmatrix}_{(n+2)\times(n+2)} = \begin{vmatrix} n+1 & 2+na \cdots 2+na \\ 1 & \\ \vdots & A \\ 1 & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} n+1 \cdots & \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2+na \\ 1 & \\ \vdots & A \\ 1 & \end{vmatrix} = (n+1)|A| - (2+na)g^2,$$

故

$$g^2 = (n+1)|A|/(1+na), \quad t^2 = \Big(\sum_0^n |f_i| P_i\Big)^2 = |f_i|^2 (n+1)(1+na),$$

代入(15)式得$\tan^2 R = \frac{n(1-a)}{1+na}$,$\cot^2 r = \frac{n(1+na)}{1-a}$,因此有

$$\tan R = n \tan r. \tag{18}$$

当$|A| < 1$时,必有$|A|^{\frac{1}{n+1}} \cos^2 \widehat{IQ} < 1$.在(17')式中,若能证明

$$(\tan R + \tan r)^2 \geqslant |A|^{\frac{1}{n+1}} \cos^2 \widehat{IQ} (1+\tan^2 R)(1+\tan^2 r),$$

则毛其吉猜想[5]:$\tan R \geqslant n \tan r$.便获证明.

## 参考文献:


[1] SEIDELL J J. *Metric problems in elliptic geometry* [M]. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1975, **490**: 32—43.

[2] 杨路，张景中. 非欧双曲几何的若干度量问题 I 等角嵌入和度量方程 [J]. 中国科学技术大学学报，1983，13：123—134.
YANG Lu，ZHANG Jing-zhong. *Some metric problems in non-euclidean hyperbolic geometry* I *Isogonal embedding and metric equation* [J]. J. China Univ. Sci. Tech.，1983，**13**：123—134.
[3] 左铨如. $E^n$ 中 $p$ 维与 $q$ 维平面间的夹角公式 [J]. 数学杂志，1990，**10**(2)：171—178.
ZUO Quan-ru. *The angle formula between p-dimensional and q-dimensional planes in* $E^n$ [J]. J. Math.，1990，**10**(2)：171—178.
[4] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1984，114.
NI Guo-xi. *The Use of Matrix Theory and Method* [M]. Shanghai：Shanghai Science and Technology Publishing House，1984，114.
[5] 毛其吉. 双曲三角形内外径的欧拉不等式 [J]. 扬州师院学报，1993，**13**(2)：1—3.
MAO Qi-ji. *The Circumradius-inradius inequality for a hyperbolic triangle* [J]. J. Yangzhou Teachers' College，1993，**13**(2)：1—3.

# Some Metric Problems in Non-Euclidean Elliptic Geometries

ZUO Quan-ru，HUA Dong-ying
(Dept. of Math.，Yangzhou University，Jiangsu 225002，China)

**Abstract**：In this paper，we discuss some geometric problems in $n$ dimensional elliptic space $S^n$ to give the theory of cosine，the formula of highness，inradius，circumradius and distance between inscribed spherical centre and circumscribed spherical centre about $n$ dimensional spherical simplex. Meanwhile，we extend the famous Euler inequality into $n$ the dimensional ellptic space $S^n$.

**Key words**：elliptic germetry；metric equation；high dimensional theory of cosine.