第 23 卷第 4 期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

$\mathscr{C}^n$ 空间中有界域上一种积分表示*

许 忠 义
(南昌大学数学系, 江西 南昌 330047)

摘 要:本文应用单位分解的观点及积分表示中核函数的构造理论,得到 $\mathscr{C}^n$ 空间中有界域上积分表示的一种抽象的一般形式,根据这种一般形式,可以得到至今许多区域上光滑函数和全纯函数种种已有的抽象公式和具体的积分公式.

关键词:积分表示; 单位分解; 核函数理论; 抽象公式.
分类号:AMS(2000) 35J/CLC number: O174.56
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2003)04-0665-08

1 引 言

熟知,在多元复分析中,全纯函数和光滑函数已有许多积分表示,其中有具体的公式,也有抽象的积分公式.本文目的是试图应用单位分解的观点及积分表示中核函数的构造理论在 $\mathscr{C}^n$ 空间中有界域上建立一种很一般的积分表示的抽象形式,使得由这个一般形式,只要适当选择其中的单位分解,就可以得到至今许多区域上种种已有的抽象公式和具体的积分公式,如光滑函数的 Cauchy-Leray 公式,全纯函数的 Cauchy-Fautappiè 公式,强拟凸域上的 Leray-Stokes 公式有界域上光滑函数的 Хенкин-Ono 公式的拓广式和有界域上、凸区域上、多园柱上、解析多面体上以及其他一些区域上光滑函数与全纯函数种种具体的著名公式.

2 单位分解与核函数

我们知道,多元复分析中有那么多积分表示,抽象的、具体的彼此不同,实际上都是由于它们所具有的单位分解形形色色,互不相同而引起的.现我们就从单位分解的角度考虑在 $\mathscr{C}^n$ 空间中建立一种很一般的积分表示式.首先我们在界域上引进一种既抽象又普遍适用的单位分解,并由此在有界域上构造相应的核函数,具体如下:

设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}^n$ 中的有界域,具有逐块光滑边界 $\partial\mathscr{D}$,可微函数 $u_a(\zeta,z)\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$,$\zeta\in\partial\mathscr{D}$,

* 收稿日期:2001-01-15
基金项目:江西省自然科学基金资助项目(0011024).
作者简介:许忠义(1942-),男,教授.

$z \in \mathscr{D}, \alpha = 1,2,\cdots,n, u(\zeta,z) = (u_1(\zeta,z), u_2(\zeta,z), \cdots, u_n(\zeta,z))$，满足

$$\langle u(\zeta,z), \zeta - z\rangle = 1 \qquad \zeta \in \partial\mathscr{D}, z \in \mathscr{D}, \tag{1}$$

记

$$g_\alpha(\zeta,z) = \frac{\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha}{|\zeta - z|^2} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

现定义

$$E_\alpha(\lambda,\zeta,z,u) = \lambda g_\alpha(\zeta,z) + (1-\lambda)u_\alpha(\zeta,z), \tag{3}$$

λ 为任意实数，$\alpha = 1,2,\cdots,n$. 易知 $E_\alpha(\lambda,\zeta,z,u)$ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个抽象的单位分解.

事实上，有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)E_\alpha(\lambda,\zeta,z,u) &= \lambda\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)g_\alpha(\zeta,z) + (1-\lambda)\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)u_\alpha(\zeta,z)\\ &= \lambda\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)\frac{\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha}{|\zeta - z|^2} + (1-\lambda)\langle u(\zeta,z), \zeta - z\rangle\\ &= \lambda + (1-\lambda) = 1,\end{aligned} \tag{4}$$

进而我们在有界域上，按常用方法构造相应的核函数

$$K(\lambda,\zeta,z,u) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}E_\alpha \mathrm{d}E_1 \wedge \cdots \wedge [\alpha] \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n\right) \wedge \mathrm{d}\zeta, \tag{5}$$

显然由式(3)所定义的单位分解相应构造式(5)的核函数是一种抽象的核函数. 因为仅当式(3)中 $u_\alpha(\zeta,z)$ 满足

$$\langle u(\zeta,z), \zeta - z\rangle = 1, \quad \zeta \in \partial\mathscr{D}, z \in \mathscr{D},$$

而式(5)中核函数只有当 $\lambda=1$ 时，

$$E_\alpha(1,\zeta,z,u) = g_\alpha(\zeta,z) = \frac{\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha}{|\zeta - z|^2}, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

这时据文[2]中公式，$K(\lambda,\zeta,z,u)$ 相应变为一个具体表达式：

$$K(1,\zeta,z,u) = w(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}(\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha)\mathrm{d}\bar{\zeta}_{[\alpha]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}, \tag{7}$$

除此之外，它是一个抽象的核函数.

3 有界域上积分表示的一种统一形式

下面我们分别建立全纯函数和光滑函数积分表示的一种抽象的形式.

定理 1 设 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}^n$ 中的有界域，具有逐块光滑边界 $\partial\mathscr{D}$，可微函数 $u_\alpha(\zeta,z) \in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$，$\zeta \in \partial\mathscr{D}, z \in \mathscr{D}, \alpha = 1,2,\cdots,n, u(\zeta,z) = (u_1(\zeta,z), u_2(\zeta,z), \cdots, u_n(\zeta,z))$ 满足

$$\langle u(\zeta,z), \zeta - z\rangle = 1, \quad \zeta \in \partial\mathscr{D}, z \in \mathscr{D}, \tag{8}$$

那么对所有在 $\mathscr{D}$ 内全纯，$\partial\mathscr{D}$ 上连续的函数 $f(z)$，有

$$f(z) = \int_{\partial\mathscr{D}} f(\zeta)K(0,\zeta,z,u) \tag{9}$$

成立，式中的核函数如式(3)，(5)所示(令其 $\lambda = 0$)，这时 $E_\alpha(\lambda,\zeta,z,u) = u_\alpha(\zeta,z)$，故相应有

$$K(0,\zeta,z,u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi!)^n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}u_\alpha du_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge du_n\right)\wedge d\zeta. \quad (10)$$

证明 我们应用同调理论证明公式(9)，首先，由于 B-M 公式[2]

$$\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})=f(z),\quad z\in\mathscr{D}, \quad (11)$$

$$\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})=\frac{(n-1)!}{(2\pi!)^n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}g_\alpha dg_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge dg_n\right)\wedge d\zeta \quad (12)$$

和式(9)实际上是同一外微分式

$$f(\zeta)\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}(v_\alpha dv_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge dv_n\right)\wedge d\zeta, \quad (13)$$

分别在循环

$$r_0=\{(\zeta,v):\zeta\in\partial\mathscr{D},v_\alpha=v_\alpha^0=g_\alpha(\zeta,z),\alpha=1,2,\cdots,n\} \quad (14)$$

和

$$r=\{(\zeta,v):\zeta\in\partial\mathscr{D},v_\alpha=v'_\alpha=u_\alpha(\zeta,z),\alpha=1,2\cdots,n\} \quad (15)$$

上的积分，其中 r_0,r 都在 $\mathscr{C}^{2n}_{\zeta,v}$ 的曲面

$$M_z=\{(\zeta,v):\zeta\in\partial\mathscr{D},\langle v,\zeta-z\rangle=1\} \quad (16)$$

上. 另外，因在曲面 M_z 上 $d\zeta_1,d\zeta_2,\cdots,d\zeta_n,dv_1,dv_2,\cdots,dv_n$ 中只有 $2n-1$ 个独立微分，而形式(13)却有极大维数 $2n-1$，所以形式(13)在 M_z 上是闭的.

下面我们要证明公式(9)等于公式(11)，只要证明循环 r_0 和 r 在 M_z 上是同调的. 现考虑集合

$$Q=\{(\zeta,z):\zeta\in\partial\mathscr{D},v=\lambda v^0+(1-\lambda)v',0\leqslant\lambda\leqslant1\}, \quad (17)$$

显然

$$r-r^0=\partial Q. \quad (18)$$

因为当 $\lambda=0$ 时，$Q=v'$，当 $\lambda=1$ 时，$Q=v^0$，再者有

$$\begin{aligned}\langle\lambda v^0+(1-\lambda)v',\zeta-z\rangle&=\lambda\langle v^0,\zeta-z\rangle+(1-\lambda)\langle v',\zeta-z\rangle\\&=\lambda\langle g(\zeta,z),\zeta-z\rangle+(1-\lambda)\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle\\&=\lambda+(1-\lambda)=1,\end{aligned} \quad (19)$$

即 $Q\subset M_z$，因此 r_0 和 r 在 M_z 上同调.

定理 2 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}^n$ 中的有界域，具有逐块光滑边界 $\partial\mathscr{D}$，可微函数 $u_\alpha(\zeta,z)\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$，$\zeta\in\partial\mathscr{D},z\in\mathscr{D},\alpha=1,2,\cdots,n,u(\zeta,z)=(u_1(\zeta,z),u_2(\zeta,z),\cdots,u_n(\zeta,z))$ 满足

$$\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle=1,\quad\zeta\in\partial\mathscr{D},z\in\mathscr{D}, \quad (20)$$

那末对于所有函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{\mathscr{D}})$，有下面积分表示

$$\begin{aligned}f(z)=&\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)K(0,\zeta,z,u)-\int_{\mathscr{D}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})\\&-\int_{\partial\mathscr{D}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\int_0^1K(\lambda,\zeta,z,u)\qquad z\in\mathscr{D},\end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$ 为式(7)所示的 B-M 核，而

$$K(\lambda,\zeta,z,u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}E_\alpha dE_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge dE_n\right)\wedge d\zeta. \quad (22)$$

这里 $d = d_\lambda + d_\zeta$，λ 为任意实数，又

$$E_\alpha(\lambda,\zeta,z,u) = \lambda g_\alpha(\zeta,z) + (1-\lambda)u_\alpha(\zeta,z), \quad \alpha = 1,2,\cdots,n, \tag{23}$$

$$g_\alpha(\zeta,z) = \frac{\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha}{|\zeta - z|^2}, \quad \alpha = 1,2,\cdots,n. \tag{24}$$

证明 首先由假设 $u_\alpha(\zeta,z) \in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$，$\zeta \in \partial\mathscr{D}$，$z \in \mathscr{D}$ 及式(20)和(24)可知，式(22)和(23)的分母在边界 $\partial\mathscr{D}$ 上均不会为 0，而当 $\lambda = 1$ 时，由于 $E_\alpha(1,\zeta,z,u) = g_\alpha(\zeta,z)$，$K(1,\zeta,z,u) = \omega(\zeta - z,\bar{\zeta} - \bar{z})$ 为 B-M 核[2][5]，所以在 $\mathscr{C}^n\backslash\{z\}$ 也不会为 0.

现对任一 $z \in \mathscr{D}$，考虑下面区域

$$G:\{\lambda \in [0,1],\zeta \in \partial\mathscr{D};\lambda = 1,\mathscr{D}\backslash B_\varepsilon(z)\}, \tag{25}$$

其中 $B_\varepsilon(z)$ 为 $\mathscr{D}$ 中以 z 为心，$\varepsilon > 0$ 为半径的超球，此区域的边界为

$$\partial G:\{\lambda = 0,\zeta \in \partial\mathscr{D};\lambda = 1,\zeta \in \partial B_\varepsilon(z)\}. \tag{26}$$

显然在此区域上，据上所知 $K(\lambda,\zeta,z,u)$ 的分母不为 0，又由于已知 E_α 为一单位分解，即有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)E_\alpha = 1. \tag{27}$$

现分别对它施行 $\bar{\partial}_\zeta$ 及 d_λ 运算再相加，可得

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\bar{\partial}_\zeta E_\alpha + d_\lambda E_\alpha)(\zeta_\alpha - z_\alpha) = 0. \tag{28}$$

再由 $\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda = d - \partial_\zeta$，则有 $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)(\mathrm{d}E_\alpha - \partial_\zeta E_\alpha) = 0$，于是

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)\mathrm{d}E_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)\partial_\zeta E_\alpha = \sum_{\alpha}\sum_{j}(\zeta_\alpha - z_\alpha)\frac{\partial E_\alpha}{\partial\zeta_j}\mathrm{d}\zeta_j,$$

从而有 $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)\mathrm{d}E_\alpha \wedge \mathrm{d}\zeta = 0$，但因 $|\zeta_\alpha - z_\alpha| \neq 0$，则可得

$$\mathrm{d}E_1 \wedge \mathrm{d}E_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n \wedge \mathrm{d}\zeta = 0,$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}K(\lambda,\zeta,z,u) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\mathrm{d}E_\alpha \wedge \mathrm{d}E_1 \wedge \cdots \wedge [\alpha] \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n\Big) \wedge \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}n\mathrm{d}E_1 \wedge \mathrm{d}E_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n \wedge \mathrm{d}\zeta = 0,\end{aligned} \tag{29}$$

也即 $K(\lambda,\zeta,z,u)$ 为区域 $G:\{\lambda \in [0,1],\zeta \in \partial\mathscr{D};\lambda = 1,\mathscr{D}\backslash B_\varepsilon(z)\}$ 上的一闭形式，又由于 $f(z) \in C^{(\infty)}(\bar{\mathscr{D}})$，所以有

$$d[f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z,u)] = \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K(\lambda,\zeta,z,u). \tag{30}$$

现对区域 G 应用 Stokes 公式，则可得

$$\begin{aligned}&\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \zeta\in\partial\mathscr{D}}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K(\lambda,\zeta,z,u) + \int_{\substack{\lambda=1\\ \mathscr{D}\backslash B_\varepsilon(z)}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K(\lambda,\zeta,z,u) \\ &= \int_{\substack{\lambda=0\\ \zeta\in\partial\mathscr{D}}}f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z,u) - \int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}}f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z,u).\end{aligned} \tag{31}$$

因为当 $\lambda = 0$ 时，$K(\lambda,\zeta,z,u) = K(0,\zeta,z,u)$，而当 $\lambda = 1$ 时，$E_\alpha = g_\alpha$，这时 $K(1,\zeta,z,u) = \omega(\zeta - z,\bar{\zeta} - \bar{z})$，从而有

$$\int_{\partial\mathscr{D}}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\int_0^1(\lambda,\zeta,z,u)+\int_{\mathscr{D}\setminus B_\varepsilon(z)}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$$

$$=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)K(0,\zeta,z,u)-\int_{\partial B_\varepsilon(z)}f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$$

$$=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)K(0,\zeta,z,u)-\int_{\partial B_\varepsilon(z)}[f(\zeta)-f(z)]\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})-$$

$$f(z)\int_{\partial B_\varepsilon(z)}\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z}). \tag{32}$$

但由于$\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$为 B-M 核,所以

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z)}\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})=1. \tag{33}$$

又因为$f(z)$在点 z 连续,有

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(z)}[f(\zeta)-f(z)]\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})\right|$$

$$\leqslant\sup_{\zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}|f(\zeta)-f(z)|+\int_{\partial B_\varepsilon(z)}|\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})|\to 0,$$

于是对式(32)两边令 $\varepsilon\to 0$,取极限并移项,可得

$$f(z)=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)K(0,\zeta,z,u)-\int_{\mathscr{D}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})-$$

$$\int_{\partial\mathscr{D}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\int_0^1K(\lambda,\zeta,z,u). \tag{34}$$

4 一些推论

由公式(9)和公式(21),可推出许多区域上种种已有的积分公式(包括抽象的和具体的).首先,由公式(9)可推出有界域上全纯函数的 Cauchy-Fantappiè 公式.

推论 1(C-F 公式)[3-4] 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}^n$ 中具有逐块光滑边界的有界域,如果向量函数 $W\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$,且$\langle W(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0,\zeta\in\partial\mathscr{D},z\in\mathscr{D}$,那末,对所有函数 $f(z)\in A_C(\mathscr{D})$,有

$$f(z)=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)\omega(\zeta-z,W),\quad z\in\mathscr{D}, \tag{35}$$

其中 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)$,且

$$\omega(\zeta-z,W)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\sum_{\alpha=1}^n(-1)^{\alpha-1}W_\alpha\mathrm{d}W_{[\alpha]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\langle\zeta-z,W\rangle^n}. \tag{36}$$

证明 只要在公式(9) 中令 $u_\alpha(\zeta,z)=h_\alpha=\dfrac{W_\alpha}{\langle\zeta-z,W\rangle}$,就有

$$\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle=\sum_{\alpha=1}^n(\zeta_\alpha-z_\alpha)h_\alpha=\sum_{\alpha=1}^n(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W_\alpha}{\langle\zeta-z,W\rangle}=1, \tag{37}$$

则由公式(9) 立得公式(35),因为这时 $K(0,\zeta,z,u)=\omega(\zeta-z,W)$.

推论 2(C-L 公式)[3-4] 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}^n$ 中具有逐块光滑边界的有界域,如果向量函数 $W\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$,且$\langle W(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0,\zeta\in\partial\mathscr{D},z\in\mathscr{D}$,那末对所有函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{\mathscr{D}})$,有

Cauchy-Leray 公式

$$f(z)=L_{\partial\mathscr{D}}^{W}f-B_{\mathscr{D}}\bar{\partial}f-R_{\partial\mathscr{D}}^{W}\bar{\partial}f=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)\omega(\zeta-z,W)-\int_{\mathscr{D}}\bar{\partial}_{\zeta}f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})-$$
$$\int_{\partial\mathscr{D}}\bar{\partial}_{\zeta}f(\zeta)\wedge\int_{0}^{1}\Omega(\lambda,\zeta,z,W),\quad z\in\mathscr{D},\tag{38}$$

其中核函数 $\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$ 和 $\omega(\zeta-z,W)$ 分别为(7)式和(36)式所示,而

$$\Omega(\lambda,\zeta,z,W)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\eta_{\alpha}\mathrm{d}\eta_{1}\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\eta_{n}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta,\tag{39}$$

式中

$$\eta_{\alpha}=\lambda\frac{\bar{\zeta}_{\alpha}-\bar{z}_{\alpha}}{|\zeta-z|^{2}}+(1-\lambda)h_{\alpha},\quad h_{\alpha}=\frac{W_{\alpha}}{\langle\zeta-z,W\rangle},\quad\alpha=1,2,\cdots,n.\tag{40}$$

λ:任意实数,$W=(W_{1},W_{2},\cdots,W_{n})$.

证明 在公式(21)中令 $u_{\alpha}(\zeta,z)=h_{\alpha}=\dfrac{W_{\alpha}}{\langle\zeta-z,W\rangle}$,由推论1的证明便知:$\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle=1$,则由公式(21)立即可得公式(38),因为这时

$$K(0,\zeta,z,u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}h_{\alpha}\mathrm{d}h_{1}\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}h_{n}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta$$
$$=\omega(\zeta-z,W),K(\lambda,\zeta,z,u)=\Omega(\lambda,\zeta,z,u).$$

下面我们还要由公式(21)推出强拟凸域上的 Leray-Stokes 公式.

先介绍一些有关概念.

设 $\mathscr{D}=\{z:\rho(z)<0\}$ 是 $\mathscr{C}^{n}$ 中的有界强拟凸域[3],其中 $\rho(z)$ 是实函数,且 $\rho(z)\in C^{(3)}(\overline{\mathscr{D}})$,又

$$\eta_{\alpha}^{0}=\frac{P_{\alpha}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},\quad\alpha=1,2,\cdots,n\tag{41}$$

是文献[6]—[8]中所引进的支撑函数,对于它有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{P_{\alpha}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}(\zeta_{\alpha}-z_{\alpha})=1,\tag{42}$$

其中 $\Phi(\zeta,z)$ 对任意固定的 $\zeta\in\partial\mathscr{D}$,关于 $z\in\mathscr{D}_{\delta}=\{z:\rho(z)<\delta\}$ 全纯,且对于 $z\in\overline{\mathscr{D}}\backslash\{\zeta\}$,$\Phi(\zeta,z)\neq0$,又对于任意固定的 $z\in\mathscr{D}$,关于 $\zeta\in\partial\mathscr{D}$ 是连续可微;同样的 $\{P_{\alpha}(\zeta,z)\}$ 当固定 ζ 时,关于 $z\in\mathscr{D}_{\delta}$ 全纯,而当固定 z 时,关于 $\zeta\in\partial\mathscr{D}$ 连续可微.

由此,在公式(21)中令 $u_{\alpha}(\zeta,z)=\eta_{\alpha}^{0}=\dfrac{P_{\alpha}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}$,$\alpha=1,2,\cdots,n$. 便有

$$\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle=\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_{\alpha}-z_{\alpha})\eta_{\alpha}^{0}=\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_{\alpha}-z_{\alpha})\frac{P_{\alpha}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}=1,$$

则由公式(21)立得下面 Leray-Stokes 公式:

推论3 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}^{n}$ 中具有逐块光滑边界 $\partial\mathscr{D}$ 的强拟凸域,即 $\mathscr{D}=\{z:\rho(z)<0\}$,其中 $\rho(z)$ 是实函数,且 $\rho(z)\in C^{(3)}(\overline{\mathscr{D}})$,则对于所有函数 $f(z)\in C^{\infty}(\overline{\mathscr{D}})$,有

$$f(z)=\int_{\partial\mathscr{D}}f(\zeta)\Omega(0,\zeta,z)-\int_{\mathscr{D}}\bar{\partial}_{\zeta}f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})-$$
$$\int_{\partial\mathscr{D}}\bar{\partial}_{\zeta}f(\zeta)\wedge\int_{0}^{1}\Omega(\lambda,\zeta,z),\quad z\in\mathscr{D},\tag{43}$$

其中

$$\Omega(\lambda,\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}G_\alpha dG_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge dG_n\right)\wedge d\zeta, \tag{44}$$

$$G_\alpha=\lambda g_\alpha+(1-\lambda)\frac{P_\alpha(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},\quad \alpha=1,2,\cdots,n. \tag{45}$$

显然,对于公式(9)和(21),当适当选取其中的 $u_\alpha(\zeta,z)$, $\alpha=1,2,\cdots,n$,我们还不难得出有界域上光滑函数和全纯函数的 Bochner-Martinelli 公式及其拓广式[2],有界域上光滑函数和全纯函数 Bochner-Ono 公式及其拓广式[1],以及凸区域上,多园柱上,解析多面体 Weil 域上和其他一些区域上光滑函数和全纯函数种种已有的积分公式以及它们的拓广式. 再则当所取的 $u_\alpha(\zeta,z)$ 有别于已有的一切单位分解时,我们还可得到另外一些新的积分公式,例如:

设 a,b 为任意两个实数,且 $a+b=1$, $(W'_1,W'_2,\cdots,W'_n)$, $(W''_1,W''_2,\cdots,W''_n)$ 为两个不同的向量函数,分别有 $W'(\zeta,z)\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$, $W''(\zeta,z)\in C^{(1)}(\partial\mathscr{D})$,且 $\langle W'(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0$, $\langle W''(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0$, $\zeta\in\partial\mathscr{D}$, $z\in\mathscr{D}$,由此若令

$$u_\alpha(\zeta,z)=a\frac{W'_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W'\rangle}+b\frac{W''_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W''\rangle},\quad \alpha=1,2,\cdots,n, \tag{46}$$

由于有

$$\langle u(\zeta,z),\zeta-z\rangle=\sum_{\alpha=1}^{n}a(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W'_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W'\rangle}+\sum_{\alpha=1}^{n}b(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W''_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W''\rangle}=a+b=1,$$

于是若把这样的 $u(\zeta,z)$ 代入公式(9)或公式(21),则可得到一种含有两个不同向量函数的积分公式.

参考文献:

[1] 姚宗元. $\mathscr{C}^n$ 中有界域上 $\bar\partial$-方程局部解的 Bochner-Ono 公式 [J]. 数学进展, 1993, (6): 553-560.
YAO Zong-yuan. *The Bochner-Ono formula of the partial solution of $\bar\partial$-equation on bounded domain in* $\mathscr{C}^n$ [J]. Advances in Mathematics. 1993, 6: 553-560.

[2] 姚宗元. 关于 $\mathscr{C}^n$ 空间中有界域上的积分表示 [J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1986, 3: 260-269.
YAO Zong-yuan. *The integral representation on bounded domain in* $\mathscr{C}^n$ [J]. Journal of Xiamen University (Natural Science), 1986, **3**: 260-269.

[3] 钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 1986.
Zhong Tong-de. *Integral Representation of Numerous Complex Function and Numerous Dimension Sigular Integral Equation* [M]. Xiamen: Xiamen University Press, 1986.

[4] LERAY J. *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe: Problème de Cauchy* Ⅱ [J]. Bull. Soc. Math. France, 1959, **87**: 81-180.

[5] BOCHNER S. *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula* [J]. Ann. of Math., 1943, **44**: 652-673.

[6] GRAUERT H, LIEB I. *Oas Ramirezsche Integral und diell ösung der Gleichung $\bar\partial f=\alpha$ im Bereich der beschräkten Fornen. Proc, Conf. Complex Analysis* [J]. Rice. Univ. Stud., 1969, **56**: 29-50.

[7] ХЕНКИН Г М. Интегральное представлние Функций, голоморхных в строго псевдовыпуклых областях и

некоторые приложения [J]. Матем. С. Б, 1969, **78**(120): 611—632.
[8] ХЕНКИН Г М. Интегралъное представление функции в сторого псевдовыпуклых областях и приложения к $\bar{\partial}$-задаче [J]. Матем. С. Б, 1970, **82**(124): 300—308.

An Integral Representation on Bounded Domain in $\mathscr{C}^n$

XU Zhong-yi
(Dept. of Math., Nanchang University, Jiangxi 330047, China)

Abstract: In this paper, by using the unit resolution and constructivity theory of Kernel function of integral representation, we obtain an abstract form of integral representation on bounded domain in C^n. Applying this form, we also unify a kind of known abstract formula and concrete integral formula for smooth and regular functions in many domains.
Key words: integral reresentation; unit resolution; kernel function theory; abstract formula.