

正则不可数基数反映 GO-空间的性质*

马利文¹, 王尚志²

(1. 北京邮电大学理学院, 北京 100876; 2. 首都师范大学数学系, 北京 100037)

摘 要: 本文对“每一个 GO-空间都是可数仿紧的”这一性质进行了推广, 得到了“每一个 GO-空间都是 $\langle \inf\{cfx \geq \omega_1; x \in [LX - X]\}$ -仿紧的”; 论证了在一定条件下, 一个拓扑空间和一个 GO-空间乘积的正规性与这个拓扑空间和一个正则不可数基数的乘积正规性是等价的; 并在这两个结论的基础上, 又得出了一些重要的定理.

关键词: GO-空间; LOTS; 正则不可数基数; 正规性.

分类号: AMS(2000) 54B10, 54F05/CLC number: O189.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-341X(2003)04-0685-06

1 引 言

GO-空间的性质一直是集论拓扑学工作者非常感兴趣的. 对特殊的 GO-空间如序数和基数的性质以及它们的子空间和乘积的性质已经有了很深入的研究, 尤其是近几年来, 日本数学家 N. Kemoto 在这方面取得了丰硕的成果. 很自然我们都会提出这样的问题, 是否一般的 GO-空间也具有基数和序数具有的性质呢? 哪一些性质可从基数和序数推广到一般的 GO-空间上呢? 本文的作者就是从这个问题出发, 发现 GO-空间和基数有着非常密切的关系, GO-空间的性质可通过一些特殊的基数反映出来, 那就是 GO-空间中点的共尾数和它的最小线性序紧化的剩余中点的共尾数.

早在 1954 年, Ball, Gillman 和 Henriksen 就证明了每一个 GO-空间都是可数仿紧的. 我们都知道并非每一个 GO-空间都是仿紧的, 如 ω_1 . 那么 GO-空间是否具有比可数仿紧强而比仿紧弱的性质呢? 本文解决了这个问题, 即找到了反映 GO-空间性质的基数, 证明了每一个 GO-空间是 $\langle \inf\{cfx \geq \omega_1; x \in [LX - X]\}$ -仿紧的. 其次, 本文还论证了在一定条件下, 一个拓扑空间和一个 GO-空间乘积的正规性与这个空间和一个正则不可数基数乘积正规性是等价的. 另外, 在这两个定理的基础上, 又得出了一些重要的定理.

2 本文所需要的定义和定理

* 收稿日期: 2001-03-08

作者简介: 马利文(1971-), 女, 博士, 讲师.

定义 2.1^[1] 一个 LOTS (linearly ordered topological space) 是一个三元组 $\langle X, \lambda, \leq \rangle$, 其中 $\langle X, \leq \rangle$ 是一个线性序集, λ 是由 $\leq$ 诱导的区间拓扑 (即 λ 是 $\{(a, \rightarrow); a \in X\} \cup \{(\leftarrow, a); a \in X\}$ 作为子基生成的拓扑, 其中 $(a, \rightarrow) = \{x \in X; a < x\}$, $(\leftarrow, a) = \{x \in X; x < a\}$).

定义 2.2^[1] 一个 GO-空间 (generalized ordered space) 是一个三元组 $\langle X, \tau, \leq \rangle$, 其中 $\langle X, \leq \rangle$ 是一个线性序集, τ 是 X 上的一个拓扑, 满足 $\lambda \subset \tau$ 且 τ 有一个基是由序凸集构成的. X 的子集 A 叫做序凸的, 如果 $x, y \in A$ 则对任意 $a \in \{a \in X; x < a < y\}$ 有 $a \in A$.

定义 2.3^[2] 一个 GO-空间 X 的 LOC (linearly ordered compactification) 是以 X 为线性序稠子集的一个紧的 LOTS.

一个拓扑空间 Y 叫做 X 的 MLOC (minimal ordered compactification), 如果对 X 的每一个 LOC L , 总有一个连续映射 $f: L \rightarrow Y$ 使得 f 在 X 上的限制 $f|_X$ 是 X 上的单位映射 1_X .

对一个 LOTS $\langle X, \leq \rangle$, X 的一个分割是一个由 X 的子集构成的序对 $\langle A, B \rangle$, 使得 $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, 且如果 $x \in A, y \in B$, 则 $x < y$. 记 $\langle 0, X \rangle$ 和 $\langle X, 0 \rangle$ 为两个分割. 用 LX 表示 X 的所有分割构成的集. 在 LX 上定义一个线性序 $<$, 使得 $\langle A, B \rangle < \langle C, D \rangle$ 当且仅当 $A \subset C$ 且 $A \neq C$. 如果对 $x \in X$ 和 $\langle A_x, B_x \rangle$ 不加区分, 其中 $A_x = \{y \in X; y \leq x\}$ 且 $B_x = X - A_x$, 空间 LX (其上拓扑是由 $<$ 诱导的区间拓扑) 是 LOTS X 的一个 MLOC, 且对任意 $x, y \in X, x < y$ 和 $x < y$ 是等价的.

定义 2.4^[5] 一个基数 κ 叫做正则的, 如果 $cf(\kappa) = \kappa$, 其中 $cf(\kappa)$ 表示 $\inf\{\beta; \beta$ 是与 κ 共尾的序数\}.

一个集合 $S \subset \kappa$ 叫做一个正则不可数基数 κ 的稳定集, 如果对 κ 的任意闭子集 C 有 $S \cap C \neq \emptyset$. 显然, κ 是 κ 的稳定集, κ 的所有极限序构成的集是 κ 的稳定集.

定义 2.5^[2] $X = (\leftarrow, x)$ 的一个子集 A 叫做在 LX 中关于 x 0-无界的, 如果对任意 $y < x$, 总存在 $a \in A$ 使得 $y \leq a$. 相应的, 可定义 $(x, \rightarrow)$ 中关于 x 的 1-无界集.

$i - cf x = \min\{|A|; A \text{ 是关于 } x \text{ } i\text{-无界的}\}, i \in 2, 2 \text{ 是一个序数.}$

$cf x = \max\{0 - cf x, 1 - cf x\}.$

对一个固定的基数 κ , LX 中的一个严格递增的序列 $\{x(\alpha); \alpha < \kappa\}$ 叫做关于 x 0-正规的, 如果对每一个极限序 $\alpha < \kappa, x(\alpha) = \sup\{x(\beta); \beta < \alpha\}$. 关于 x 的 0-正规序列是 $(\leftarrow, x)$ 的闭子空间. 关于 x 的 1-正规序列也有相应的结果.

定义 2.6^[5] 一个拓扑空间 X 叫做 λ -仿紧的, 如果对 X 的任意势 $\leq \lambda$ 的开覆盖都有局部有限的开加细. 一个拓扑空间叫做 $<\kappa$ -仿紧的, 如果对每一个 $\lambda < \kappa, X$ 是 λ -仿紧的.

声明 2.7 在本文中, LX 表示 X 的 MLOC, $|X|$ 表示集 X 的势, $\lim(\kappa)$ 表示 κ 的所有极限序构成的集, $\omega(X)$ 表示集 X 的重度, $A - B$ 表示集 A 和 B 的差集.

定理 2.8^[2] X 是一个 GO-空间, κ 是一个正则不可数基数. 则 $X \times \kappa$ 是正规的充分必要条件是:

- a) 对任意的 $x \in X$ 和 $i \in 2, i - cf x \neq \kappa$,
- b) X 是 $<\kappa$ -仿紧的.

定理 2.9^[9] (Pressing Down Lemma) 假设 $\kappa > \omega$ 是正则不可数基数, $S \subset \kappa$ 是 κ 的一个稳定集. 如果 f 是 S 上的一个退步函数, 则 f 在 $S' \subset S$ 上是常数, 其中 S' 是 κ 的稳定集.

定理 2.10^[6] X 是一个仿紧空间, C 是一个紧空间, 则 $X \times Y$ 是正规的.

定理 2.11^[6] 设 α 是一个序数, 乘积 $X \times (\alpha+1)$ 是正规的当且仅当 X 是正规的且是 $|\alpha|$ 仿紧的.

定理 2.12^[6] 设 C 是一个紧空间, X 是正规空间且是 $w(C)$ -仿紧的, 则 $X \times C$ 是正规的.

3 GO-空间的仿紧性质

引理 3.1 X 是一个 GO-空间, κ 是一个正则不可数基数, 如果对任意 $x \in [LX - X], i \in 2$, 有 $i-cfx \geq \kappa$ 或 $i-cfx \leq \omega$, 则 X 是 $<\kappa$ -仿紧的.

证明 充分性. 设 $X = \langle X, \tau, < \rangle$. λ 是 X 上的一般的区间拓扑. X^* 是如下定义的 X 的闭扩张:

$$X^* = X \times \{0\} \cup \{ \langle x, n \rangle : x \in X, [x, \rightarrow) \in \tau - \lambda, n < 0 \} \\ \cup \{ \langle x, m \rangle : x \in X, (\leftarrow, x] \in \tau - \lambda, m > 0 \}.$$

如果认为 $X = X \times \{0\}$, 则 X^* 是 $X \times Z$ 的闭子集. 我们有 $LX - X = LX^* - X^*$, 且对任意 $x \in LX - X, i-cfx (i \in 2)$ 在 LX 中与在 LX^* 中相等. 如果我们可以证明 X^* 是 $<\kappa$ -仿紧的, 由闭遗传性可得 X 是 $<\kappa$ -仿紧的. 设 $\mathcal{U}$ 是 X^* 的势为 $\lambda < \kappa$ 的开覆盖. 不失一般性, 假设每一个 $U \in \mathcal{U}$ 是一个凸开集. 对 $\mathcal{U}$ 我们定义如下等价关系 $\simeq$: 对任意 $U, U' \in \mathcal{U}$, 如果存在有限集 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, 使得 $U = U_1, U' = U_n$ 且当 $1 \leq i < n$ 时, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, 则 $U \simeq U'$. 这样 $\mathcal{U}$ 就可表示为互不相交的最大连贯开集链(等价类)之并. 则 X 可相应的分解为闭开集之并. 如果我们在每一个闭开集上构造 $\mathcal{U}$ 的一个局部有限的开加细, 则 $\mathcal{U}$ 在 X^* 上有局部有限的开加细. 不失一般性, 我们取其中一个没有上确界的闭开集 X_0 和它的覆盖 $\mathcal{U}^0$, 其中 $\mathcal{U}^0$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个最大的连贯开集链. 设 LX^* 是定义 2.3 中所述的紧化, 且定义:

$$\mathcal{V}' = \{V'\}, \text{ 其中 } V' = \{x \in LX^* : \exists y, z \in V, y \leq x \leq z, V \in \mathcal{U}^0\}.$$

则由于 $\mathcal{U}^0$ 是 X^* 上的连贯的开凸子集链, $\mathcal{V}'$ 也是 LX^* 上的连贯的开凸子集链. 于是 $\mathcal{V}'$ 可看作 LX^0 的开覆盖且 $|\mathcal{V}'| = |\mathcal{U}^0| \leq \lambda < \kappa$. 假设 x_0 是 X_0 的上确界, 则 $0-cfx_0 \geq \kappa$ 或 $0-cfx_0 \leq \omega$. 若 $0-cfx_0 \geq \kappa$. 在 X_0 中取一个元素 b . 如果 X_0 有最小元 a , 则 $[a, b]$ 在 LX_0 中是紧的, $\mathcal{V}'$ 在 $[a, b]$ 上有有限子覆盖. 如果 X_0 没有最小元, 则情形 $(\leftarrow, b]$ 与 $[b, \rightarrow)$ 相似. 下面我们证明 $\mathcal{V}'$ 在 $[a, \rightarrow)$ 上有有限子覆盖. 因 $\mathcal{V}'$ 是势为 $\lambda < \kappa$ 的 X_0 的开覆盖. 在 X_0 中取关于 x_0 的正规列 $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. 则对任意 $x_\alpha \in \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, 总存在 $f(\alpha) < \lambda$ 和 $g(\alpha) < \alpha$ 使得 $[x_{g(\alpha)}, x_\alpha] \subset U_{f(\alpha)}$. 由于 $\lambda < \kappa$ 及 κ 是一个正则不可数基数, 则存在一个稳定集 $S \subset \lim(\kappa)$ 及 $\beta < \lambda$ 使得对任意 $\alpha \in S$ 有 $f(\alpha) = \beta$. 利用 Pressing Down Lemma, 存在一个稳定集 $S' \subset S$ 和 $\beta_0 < \kappa$ 使得对任意 $\alpha \in S', g(\alpha) = \beta_0$ 成立. 这意味着 $[x_{\beta_0}, x_\alpha] \subset U_\beta$. 则存在 $x_1 < x_{\beta_0}$ 且 $x_1 \in U_\beta$ 有 $(x_1, x_{\beta_0}) \subset U_\beta$. 又由于 $(\leftarrow, x_{\beta_0}) \cap X_0$ 是紧子集或与 $[x_{\beta_0}, \rightarrow)$ 相似, 所以这个开覆盖有有限子覆盖. 这样 $\{\mathcal{U}^0\} = \{V' \cap X : V' \in \mathcal{V}'\}$ 有有限子覆盖, $\mathcal{U}$ 有局部有限子覆盖, 所以 X^* 是 $<\kappa$ -仿紧的. 若 $cfx_0 = \omega$. 在 LX_0 中取关于 x_0 一递增无界列 $\{x_n : 1 \leq n < \omega\}$, 有 $[x_1, x_0) = \bigcup \{[x_i, x_{i+1}] : i \geq 1\}$, 则由于每一个 $[x_i, x_{i+1}]$ 是紧子集, $[x_1, x_0)$ 是 X_0 的 lindelöf 子空间. 由于每一个 lindelöf 空间是仿紧的, 则 $\mathcal{V}'$ 在 $[x_1, x_0)$ 上有局部有限的开加细. 这样覆盖 $\mathcal{U}^0 = \{V' \cap X : V' \in \mathcal{V}'\}$ 再 X_0 上有局部有限的开加细, 从而 $\mathcal{U}$ 就有局部有限的开加细. 此命题得到了证明.

定理 3.2 每一个 GO-空间是 $\langle \inf\{i-cfx \geq \omega_1; x \in [LX-X], i \in 2\}$ -仿紧的.

证明 由引理 3.1 显然可得.

推论 3.3 X 是一个 GO-空间. 如果对任意 $x \in [LX-X], i \in 2$ 有 $i-cfx = \omega$, 则 X 是仿紧的. 如果对任意 $x \in [LX-X], i \in 2$ 有 $i-cfx = \kappa \geq \omega_1$, 则 X 是 $\langle \kappa$ -仿紧的.

证明 由引理 3.1 的证明显然可得.

注 由推论 3.2 可得每一个 GO-空间是可数仿紧的, 由推论 3.3 可得 Sorgenfrey 直线是仿紧的. 这些都是我们都知道的结论.

4 乘积的正规性

定理 4.1 X 是一个拓扑空间, Y 是一个 GO-空间, $LY-Y = \{y\}$, 对 $i \in 2, i-cfy = \kappa$ 或 $i-cfy = \kappa$ 且 $(1-i)-cfy < \omega$. 如果 Y 的每一个紧子空间 Y' , 乘积 $X \times Y'$ 是正规的, 则 $X \times Y$ 是正规的充分必要条件是 $X \times \kappa$ 是正规的.

证明 不失一般性, 假设 y 是 Y 的上确界.

情况 1. $\kappa = \omega$

必要性. 取 Y 中的一个点 y^* , 显然 y^* 是 Y 的一个紧子集. 则 $X \times \{y^*\}$ 是正规的, 因此 X 是正规的. 由 ω 是一个离散空间, 则 $X \times \omega$ 是正规的.

充分性. 取一个关于 y 的 0-无界集 $\{y_n; n < \omega\}$. 因为 $LY-Y = \{y\}$, 有 $\{y_n; n < \omega\} \subset Y$. 则 $(\leftarrow, y_0], \{[y_n, y_{n+1}]\}$ 都是紧空间, 由已知 $X \times (\leftarrow, y_0], X \times \{[y_n, y_{n+1}]\}$ 都是正规的且是 $X \times Y$ 的局部有限的闭子集. 则 $X \times Y$ 是正规的.

情况 2. $\kappa > \omega$

必要性. 取关于 y 的 0-正规列 $\{y_\alpha; \alpha < \kappa\} \subset Y$. 此序列是 Y 的闭子集且同胚于序数空间 κ . 则 $X \times \kappa$ 是正规的.

充分性. 用反证法. 假设 $X \times Y$ 不是正规的. 则存在 $X \times Y$ 的两个不交闭子集 A 和 B 不能被 $X \times Y$ 的两个互不相交的开集分离. 因对任意 $y^* < y, (\leftarrow, y^*]$ 是紧的, 则 $X \times (\leftarrow, y^*]$ 是正规的. 所以 A 和 B 在 Y 上的投影都是 Y 的闭无界集. 因此, 存在两个序列 $A_0 = \{a_\alpha; \alpha < \kappa\} \subset A$ 和 $B_0 = \{b_\alpha; \alpha < \kappa\} \subset B$ 使得 A_0 和 B_0 收敛于一个点 $\{x\} \times \{y\} \in X \times [LY-Y]$, 且 A_0, B_0 不能被 $X \times Y$ 中互不相交的开集分离. 显然 A_0, B_0 同胚于 $X \times \kappa$ 的两个互不相交的闭集且不能被 $X \times \kappa$ 中的不交开集分离. 这与 $X \times \kappa$ 的正规性是相矛盾的. 则 $X \times Y$ 是正规的.

推论 4.2 X 是一个仿紧的 GO-空间, Y 是一个 GO-空间, $LY-Y = \{y\}$, 对 $i \in 2, i-cfy = \kappa$ 或 $i-cfy = \kappa$ 且 $(1-i)-cfy < \omega$. 则 $X \times Y$ 是正规的充分必要条件是: 对任意 $i \in 2, x \in X, i-cfx \neq \kappa$.

证明 显然可由定理 2.8, 定理 2.10 和定理 4.1 得到.

推论 4.3 X 是一个拓扑空间, Y 可以表示为局部有限的闭子空间 $\{Y_s\}_{s \in S}$ 的并, 即, $Y = \bigcup \{Y_s; s \in S\}$. 如果对任意的 $s \in S$, 有 $LY_s - Y_s = \{y_s\}$, 则 $X \times Y$ 是正规的充分必要条件是 $\{X \times i-cfy_s; i \in 2\}_{s \in S}$ 都是正规的.

证明 必要性由正规性的闭遗传性和定理 4.1 可得. 充分性由定理 4.1 和局部有限的正规闭子空间的并是正规的可得.

推论 4.4 X 和 Y 是两个 GO-空间, 且 X, Y 分别可表示为局部有限的闭子空间 $\{X_i\}_{i \in S}$, $\{Y_i\}_{i \in T}$ 的并, 对任意 $s \in S$, 有 $LX_s - X_s = \{x_i\}, i - cfx_i > \omega, i \in 2$, 且对任意 $t \in T$, 有 $LY_t - Y_t = \{Y_i\}, i - cfy_i > \omega, i \in 2$. 则 $X \times Y$ 是正规的充分必要条件是对任意 $s \in S, t \in T$, 有 $i - cfx_i = j - cfy_j = \kappa, i, j \in 2$ 和对任意 $x \in X, y \in Y, i - cfx, j - cfy \neq \kappa$ 成立.

证明 必要性. 用反证法. 假设存在 $s \in S, t \in T$ 有 $0 - cfx_s = \lambda < 0 - cfy_t = \kappa$, 分别取关于 x_s 和 y_t 的正规列, 则存在 $X \times Y$ 的闭子集同胚于 $\lambda \times (\lambda + 1)$. 因 $\lambda \times (\lambda + 1)$ 不是正规的, 则 $X \times Y$ 不是正规的, 这与已知矛盾. 如果对任意 $s \in S, t \in T$ 有 $0 - cfx_s = 0 - cfy_t = \kappa$ 但存在 $x \in X$ 使得 $0 - cfx = \kappa$. 则取关于 x 的正规列, 于是同样存在 $X \times Y$ 的闭子空间同胚于 $(\kappa + 1) \times \kappa$ 因而不是正规的, 这与已知矛盾.

充分性. 我们只要证明对任意 $s \in S$ 和 $t \in T, X_s \times Y_t$ 是正规的. 不失一般性, 我们可以假设 x_s, y_t 分别是 X_s 和 Y_t 的上确界. 首先, 我们可以证明 X_s 是 $\langle \kappa$ -仿紧的. 设 $\{U_\alpha, \alpha < \lambda < \kappa\}$ 是势为 $\lambda < \kappa$ 的 X_s 的开覆盖. 在 X_s 中取关于 x_s 的正规列 $\{x_\alpha, \alpha < \kappa\}$. 则对任意 $x_\alpha \in \{x_\alpha, \alpha < \kappa\}$, 总存在 $f(\alpha) < \lambda$ 和 $g(\alpha) < \alpha$ 使得 $[x_{g(\alpha)}, x_\alpha] \subset U_{f(\alpha)}$. 由于 $\lambda < \kappa$ 及 κ 是一个正则不可数基数, 则存在一个稳定集 $S \subset \lim(\kappa)$ 及 $\beta < \lambda$ 使得对任意 $\alpha \in S$ 有 $f(\alpha) = \beta$. 利用 Pressing Down Lemma, 存在一个稳定集 $S' \subset S$ 和 $\beta_0 < \kappa$ 使得对任意 $\alpha \in S', g(\alpha) = \beta_0$ 成立. 这意味着 $[x_{\beta_0}, x_\alpha] \in U_\beta$. 则存在 $x_0 < x_{\beta_0}$ 且 $x_0 \in U_\beta$ 有 $(x_0, x_{\beta_0}] \subset U_\beta$. 又由于 $(\leftarrow, x_{\beta_0}] \cap X_s$ 是紧子集, 这个开覆盖有有限子覆盖. 因而 X_s 是 $\langle \kappa$ -紧的从而也是 $\langle \kappa$ -仿紧的. 则由定理 2.8, $X_s \times \kappa$ 是正规的. 由定理 4.1 我们只要证明 Y_t 的任意紧子集 Y^* , $X_s \times Y^*$ 是正规的即可. 再由定理 2.8, $Y^* \times \kappa$ 是正规的. 又因对任意紧子集 $X^* \subset X, X^* \times Y^*$ 是正规的. 再由定理 3.1, $X_s \times Y^*$ 是正规的. 因而 $X_s \times Y_t$ 是正规的. 则 $X \times Y = \bigcup \{X_s \times Y_t, s \in S, t \in T\}$ 是正规的.

5 一些重要定理

定理 5.1 设 X 是一个 GO-空间, κ 是一个正则不可数基数. 如果对任意 $x \in X, i \in 2$, 有 $i - cfx \neq \kappa$ 成立, 且对任意 $x' \in [LX - X], i \in 2$, 有 $i - cfx' \geq \kappa$ 成立, 则 $X \times \kappa$ 正规的.

证明 由定理 2.8 和定理 3.1 显然可得.

定理 5.2 设 X, Y 是两个 GO-空间, $LY - Y = \{y\}$, 对 $i \in 2, i - cfy = \kappa$ 或 $i - cfy = \kappa$ 且 $(1 - i) - cfy < \omega$. 对 Y 的每一个紧子空间 Y' , 乘积 $X \times Y'$ 是正规的. 如果对任意 $x \in X$ 有 $i - cfx \neq \kappa$, 且对任意 $x' \in LX - X$ 有 $i - cfx' \geq \kappa$, 则 $X \times Y$ 是正规的

证明 由定理 4.1 和 5.1 显然可得.

定理 5.3 设 X, Y 是两个 GO-空间. κ 为正则不可数基数. 对 Y 的任意紧子空间 Y' , 有 $w(Y') < \kappa$. 如果 $LY - Y = \{y\}$, 对 $i \in 2, i - cfy = \kappa$ 或 $i - cfy = \kappa$ 且 $(1 - i) - cfy < \omega$. 对任意 $x \in X, i \in 2$, 有 $i - cfx \neq \kappa$ 成立, 且对任意 $x' \in [LX - X], i \in 2$, 有 $i - cfx' \geq \kappa$ 成立, 则 $X \times Y$ 是正规的.

证明 由定理 2.12, 3.1, 4.1 和 5.1 显然可得.

定理 5.4 设 X 是紧空间, Y 是 GO-空间. 如果对任意 $y \in LY - Y, i \in 2$, 有 $i - cfy \leq \omega$, 则 $X \times Y$ 是仿紧的.

证明 由推论 3.3 及仿紧空间与紧空间的乘积是仿紧空间显然可得.

定理 5.5 设 X 是 GO-空间, κ 是正则不可数基数. 如果对任意 $x' \in LX - X$ 有 $i - cf x' \geq \kappa$, 则对任意 $\alpha < \kappa$, $X \times (\alpha + 1)$ 是正规的.

证明 由定理 2.11 和 3.1 可得.

参考文献:

- [1] MIWA T, KEMOTO N. *Linearly ordered extensions of GO-spaces* [J]. Topology and Its Applications, 1993, 54: 133—140.
- [2] KEMOTO N. *Normality of products of GO-spaces and cardinal* [J]. Topology Proceedings, 1993, 18: 133—142.
- [3] KEMOTO N. *The shrinking property and the $\mathcal{B}$ -property in ordered spaces* [J]. Fundamenta Mathematicae, 1990, 134: 255—261.
- [4] ENGELKING R. *General Topology* [M]. Publish Scientific Publishers Warsaw, 1977.
- [5] KURATOWSKI K, MOSTOWSKI A. *Set Theory* [M]. PWN-Polish Scientific Publishers, 1996.
- [6] PRZYMUSINSKI T C. *Products of normal spaces*, in: *Handbook of Set Theoretic Topology* [M]. KUNEN K, VAUGHAN J E. Northholland, 1984, 781—826.
- [7] LUTZER D J. *On generalized ordered spaces* [J]. Dissertations Math. Rozprawy Mat., 1971, 89: 32.
- [8] VAN DOUWEN E K, LUTZER D J. *On the Classification of Stationary Sets* [J]. Michigan Math. J., 1979, 26: 47—64.
- [9] ERDOS P, HAJNAL A, MATH A. et al. *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals* [M]. Akademiai kiado Budapest, 1984.

Some Properties on the Relation of GO-space and Cardinal

MA Li-wen¹, WANG Shang-zhi²

(1. School of Science, Beijing University of Post and Telecommunication, Beijing 100876, China;

2. Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract: In this paper, we generalize the result that every GO-space is countably-paracompact and prove that every GO-space is $< \inf\{cf x \geq \omega_1; x \in [LX - X]\}$ -paracompact. We obtain that under the normality of product of a topological space and a GO-space and the normality of product of the topological space and a regular uncountable cardinal are equivalent. Based on this two theorems, we deduce some important theorems.

Key words: GO-space; LOTS; regular uncountable cardinal; normality.