第23卷第4期 数学研究与评论 Vol.23 No.4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov.2003

球面Hardy空间上Riesz平均的逼近*

李落清
(湖北大学数学系,湖北 武汉 430062)

摘　要:引进了球面Hrady空间上Riesz平均算子及Peetre K模.讨论了Riesz平均算子在Hardy空间上的逼近性质.证明了Riesz平均算子与Peetre K模的强渐近等价关系.所得结果表明Peetre K模完全刻划了Riesz平均的逼近.

关键词:球面Hardy空间;Riesz平均;Peetre K模;逼近.
分类号:AMS(2000) 41A25,42C10/CLC number:O174.2
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(2003)04-0704-05

1 球面Hardy空间

设 $B^{d+1}=\{x\in R^{d+1}:|x|<1\}$ 是 $d+1$ 维欧氏空间 R^{d+1} 中的单位球,$\mathrm{S}^d=\{x\in \mathrm{R}^{d+1}:|x|=1\}$ 是 R^{d+1} 中单位球面.若 f 是 B^{d+1} 上调和函数,$x\in \mathrm{S}^d$,定义

$$P^+f(x)=\sup\{|f(rx)|:0\leqslant r<1\},$$

则 P^+f 是定义在 S^d 上的函数,称之为 f 的经向极大函数.

设 $L^p(\mathrm{S}^d)$,$0<p\leqslant\infty$,表示 S^d 上全体复值函数组成的空间,其范数如通常定义:

$$\|f\|_p=\left(\int_{\mathrm{S}^d}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\quad 0<p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty=\mathrm{ess}\ \sup\{|f(x)|:x\in \mathrm{S}^d\}<\infty.$$

因为球面 S^d 不仅是一个测度空间,而且是一个可微流形,故可在 S^d 上定义 k 次连续可微函数空间 $C^k(\mathrm{S}^d)$.进而,$S(\mathrm{S}^d)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}C^k(\mathrm{S}^d)$ 表示 S^d 上无穷次可微函数空间,并赋予通常拓扑.$S'(\mathrm{S}^d)$ 是 $S(\mathrm{S}^d)$ 的对偶,即分布函数空间.分布 f 与测试函数 ψ 的"配对"表示为 $\langle f,\psi\rangle$.若 f 为 S^d 上可积函数,则有

$$\langle f,\psi\rangle=\int_{\mathrm{S}^d}f(x)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

球面 S^d 上所有使 $\|P^+f\|_p<\infty$ 的分布 f 组成的线性空间称为Hardy空间,并定义范数 $\|f\|_{H^p}:=\|P^+f\|_p$,记为 $H^p(\mathrm{S}^d)$.即

* 收稿日期:2001-05-05
基金项目:国家自然科学基金(19771009),湖北省自然科学基金(99J169)资助项目.
作者简介:李落清(1956-),男,博士,教授.

$$H^p(\mathrm{S}^d) = \{f \in S'(\mathrm{S}^d) : P^+ f \in L^p(\mathrm{S}^d)\}.$$

2 Peetre K 模和 Riesz 平均

设 Δ 表示 S^d 上的 Laplace-Beltrami 微分算子. 它对应于特征值 $-\lambda_k^2 = -k(k+\lambda), 2\lambda = d-1, k \in \mathrm{N}_0$(非负整数之集)的特征向量空间 H_k 是 k 次球调和多项式之集,即

$$H_k = \{f \in S(\mathrm{S}^d) : \Delta f = -k(k+\lambda)f\}.$$

若 $f \in H^p(\mathrm{S}^d)$,则 f 的球调和展开,或称之为 Founier-Laplace 级数,形式写为

$$\sigma f = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f.$$

这里 $Y_k f \in H_k, k \in \mathrm{N}_0$,且 $Y_k f(x) = \langle f, Z_x^{(k)} \rangle$,而 $Z_x^{(k)}$ 表示极点在 x 的 k 阶带调和函数,参阅[4]和[6].

设 $\Lambda^r = -(\Delta)^{\frac{r}{2}}, r > 0$,是由关系式

$$\Lambda^r Y_k(x) = -\lambda_k^r Y_k(x), \quad Y_k \in H_k,\ k \in \mathrm{N}_0,$$

定义的分数次 Laplace-Beltrami 算子. 再设 $W^{p,r}(\mathrm{S}^d)$, $r > 0$, 表示序列型子空间:

$$W^{p,r}(\mathrm{S}^d) = \{f \in H^p(\mathrm{S}^d) : \exists\, g \in H^p(\mathrm{S}^d),\ Y_k g = -\lambda_k^r Y_k f,\ \forall\, k \in \mathrm{N}_0\}.$$

设 $f \in W^{p,r}(\mathrm{S}^d)$,其 Laplace-Beltrami 级数为 $\sigma(f) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f$. 那么,$\Lambda^r f \in H^p(\mathrm{S}^d)$,且有展开式

$$\sigma(\Lambda^r f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_k^r) Y_k f.$$

我们引进 $H^p(\mathrm{S}^d)$ 与 $W^{p,r}(\mathrm{S}^d)$ 间的 Peetre K 模:

$$K(f, t; H^p, W^{p,r}) := \inf\{\|f - g\|_{H^p} + t\|\Lambda^r g\|_{H^p}, g \in W^{p,r}(\mathrm{S}^d)\}.$$

它是用以描述函数光滑性的一种度量. 关于 K 模的性质可参阅文献[3].

本文将研究 Riesz 平均算子的逼近问题,其定义为

$$R_{n,r}(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^r\right) Y_k f(x), \quad r > 0.$$

有关 Riesz 平均算子在 $L^p(\mathrm{S}^d)$ 上的收敛及其逼近问题已有许多研究成果. 对此参阅文献[1],[2]和[4]以及那里所引的文献. 最近,余纯武等在文献[5]中研究了 Hardy 空间的逼近问题. 本文讨论 Riesz 平均算子的逼近性质. 证明了 Peetre K 模完全刻划了 Riesz 平均的逼近阶,并且建立了它们之间的强渐近等价关系.

3 主要结果

下面将只对 $d = 2$ 的情形进行讨论. 这样我们将上述概念进一步具体化. 记 $\mathrm{S} = \mathrm{S}^2$. 若 $f \in H^p(\mathrm{S})$,则它的 Fourier-Laplace 级数是

$$\sigma(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f)(x),$$

其中$Y_kf(x)=\frac{2k+1}{4\pi}\int_S P_k(x\cdot y)f(y)\mathrm{d}y$，而这里$P_k$则被称之为Legendre多项式. 因为

$$-\lambda_k^2=-k(k+1),$$

故Riesz平均算子可改写为

$$R_n,r(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^{\frac{r}{2}}\right)Y_kf(x). \tag{1}$$

现在叙述本文的主要结果.

定理 设$\frac{5}{8}<p\leqslant 1,f\in H^p(\mathrm{S}),r>0$. 那么存在常数$C>0$使得

$$C^{-1}\|R_{n,r}f-f\|_{H^p}\leqslant K(f,n^{-r};H^p,W^{p,r})\leqslant C\|R_{n,r}f-f\|_{H^p}. \tag{2}$$

为了证明此定理，我们先做些准备，下面给出Riesz算子的若干性质.

引理1 设$\frac{5}{8}<p\leqslant 1,f\in H^p(\mathrm{S})$. 那么存在常数$C>0$使得

$$\|R_{n,r}f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H^p}. \tag{3}$$

引理1的证明参阅文献[1].

由引理1知，算子列$\{\mathrm{R}_{n,r}:n\in\mathrm{N}\}$是$H^p(\mathrm{S})$上的逼近过程，即$\lim_{n\to\infty}\|R_{n,r}f-f\|_{H^p}=0$对一切$f\in H^p(S)$成立.

设N表示全体自然数之集. 下面给出Riesz算子$R_{n,r}$和微分算子Λ^r的关系.

引理2 设$f\in H^p(\mathrm{S})$，而$\mathrm{R}_{n,r}$由(1)式定义. 则

$$(n(n+1))^{\frac{r}{2}}R_{n,r}(R_{n,r}f-f)=\Lambda^rR_{n,r}f,\quad \forall\, n\in\mathrm{N}. \tag{4}$$

证明 设$f\in H^p(\mathrm{S})$. 通过计算，有

$$R_{n,r}(R_{n,r}f-f)=-\frac{1}{(n(n+1))^{\frac{r}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^{\frac{r}{2}}\right)(k(k+1))^{\frac{r}{2}}Y_kf.$$

又由微分算子Λ^r的定义，有

$$\Lambda^rY_kf=-(k(k+1))^{\frac{r}{2}}Y_kf.$$

因此，我们得到

$$\Lambda^rR_{n,r}f=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^{\frac{r}{2}}\right)(k(k+1))^{\frac{r}{2}}Y_kf.$$

于是

$$(n(n+1))^{\frac{r}{2}}R_{n,r}(R_{n,r}f-f)=\Lambda^rR_n,rf.$$

下面建立Riesz算子对可微函数逼近的Jackson型估计式.

引理3 设$f\in W^{p,r}(\mathrm{S})$，而$R_{n,r}$由(1)式定义. 则存在常数$C>0$，使得

$$\|R_{n,r}f-f\|_{H^p}\leqslant\frac{C}{n^r}\|\Lambda^rf\|_p.$$

证明 由(4)式得

$$R_{n,r}^2f-R_{n,r}f=(n(n+1))^{-\frac{r}{2}}R_{n,r}\Lambda^rf,\quad f\in W^{p,r}(\mathrm{S}).$$

又对于一切$n,m\in\mathrm{N}$及$f\in H^p(\mathrm{S})$有

$$R_{m,r}R_{n,r}f=R_{n,r}R_{m,r}f.$$

通过进一步计算，得

$$R_{m,r}^2 f - R_{m+1,r}R_{m,r}f = -\left(\frac{1}{(m(m+1))^{\frac{r}{2}}} - \frac{1}{((m+1)(m+2))^{\frac{r}{2}}}\right)\Lambda^r R_{m,r}f$$
$$= -\frac{(m+2)^{\frac{r}{2}} - m^{\frac{r}{2}}}{(m(m+1)(m+2))^{\frac{r}{2}}}\Lambda^r R_{m,r}f,$$

以及

$$R_{m+1,r}^2 f - R_{m,r}R_{m+1,r}f = \frac{(m+2)^{\frac{r}{2}} - m^{\frac{r}{2}}}{(m(m+1)(m+2))^{\frac{r}{2}}}\Lambda^r R_{m+1,r}f.$$

利用渐近估式$(m+2)^{\frac{r}{2}} - m^{\frac{r}{2}} \sim rm^{\frac{r}{2}}, m \to \infty$,得到下面不等式

$$\begin{aligned}\| R_{m,r}^2 f - R_{m+1,r}^2 f \|_{H^p} &\leqslant \| R_{m,r}^2 f - R_{m+1,r}R_{m,r}f \|_{H^p} + \\ &\quad \| R_{m+1,r}^2 f - R_{m,r}, R_{m+1,r}f \|_{H^p} \\ &\leqslant \frac{C}{m^{r+1}}(\| \Lambda^r R_{m,r}f \|_{H^p} + \| \Lambda^r R_{m+1,r}f \|_{H^p}).\end{aligned}$$

由算子 Λ^r 与 $R_{n,r}$ 的交换性以及 $R_{n,r}$ 的有界性(见(3)式),若 $f \in W^{p,r}(S)$,则

$$\| R_{m,r}^2 f - R_{m+1,r}^2 f \|_{H^p} \leqslant \frac{C}{m^{r+1}}(\| R_{m,r}\Lambda^r f \|_{H^p} + \| R_{m+1,r}\Lambda^r f \|_p) \leqslant \frac{C}{m^{r+1}} \| \Lambda^r f \|_{H^p}.$$

最后推得 Jackson 型不等式

$$\begin{aligned}\| R_{n,r}f - f \| &\leqslant \| R_{n,r}^2 f - R_{n,r}f \|_{H^p} + \sum_{m=n}^{\infty} \| R_{m,r}^2 f - R_{m+1,r}^2 f \|_{H^p} \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{(n(n+1))^{\frac{r}{2}}} + \sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{r+1}}\right) \| \Lambda^r f \|_{H^p} \\ &\leqslant \frac{C}{n^r} \| \Lambda^r f \|_{H^p}.\end{aligned}$$

有了上述准备,我们可以证明本文的主要结果了.

定理的证明 依据 Peetre K 模的定义,选取 $g \in W^{p,r}(S)$,使

$$\| f - g \|_{H^p} + n^{-r} \| \Lambda^r g \|_{H^p} \leqslant 2K(f, n^{-r}; H^p, W^{p,r}).$$

因此,利用 Riesz 算子的线性及有界性,有

$$\begin{aligned}\| R_{n,r}f - f \|_{H^p} &\leqslant \| R_{n,r}(f-g) - (f-g) \|_{H^p} + \| R_{n,r}g - g \|_{H^p} \\ &\leqslant CK(f, n^{-r}; H^p, W^{p,r}) + \| R_{n,r}g - g \|_{H^p}.\end{aligned}$$

再应用引理 3,有

$$\| R_{n,r}g - g \|_{H^p} \leqslant \frac{C}{n^r} \| \Lambda^r g \|_{H^p} \leqslant CK(f, n^{-r}; H^p, W^{p,r}).$$

综合上述,得到

$$\| R_{n,r}f - f \|_{H^p} \leqslant CK(f, n^{-r}; H^p, W^{p,r}).$$

另一方面,应用(3)式和(4)式,得

$$\| \Lambda^r R_{n,r}f \|_{H^p} \leqslant Cn^r \| R_{n,r}(R_{n,r}f - f) \|_{H^p} \leqslant Cn^r \| R_{n,r}f - f \|_{H^p}$$

由此及 Peetre K 模的定义,有

$$K(f, n^{-r}; H^p, W^{p,r}) \leqslant \| f - R_{n,r}f \|_{H^p} + n^{-r} \| \Lambda^r R_{n,r}f \|_{H^p} \leqslant C \| R_{n,r}f - f \|_{H^p}.$$

定理证毕.

参考文献：

[1] COIZANI L, TAIBLESON M H, WEISS G. *Maximal estimates for Cesàro and Riesz means on spheres* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1984, **33**(6): 873—889.

[2] LI Luo-qing. *Riesz means on compact Riemannia symmetric spaces* [J]. Math. Nachr., 1994, **168**: 227—242.

[3] BERENS H, LI Luo-qing. *The Peetre K-moduli and best approximation on the sphere* [J]. Acta Math. Sinica, 1995, **38**(5): 589—599.

[4] WANG Kun-yang, LI Luo-hong. *Harmonic Analysis and Approximation On the Unit Sphere* [M]. Science Press, Beijing, New York, 2000.

[5] YU Chun-wu, CHEN Xing-meng, WANG Kun-yang, et al. *Approximation of Hardy spaces on the unit sphere* [J]. Science in China (E series), 2003, **33**(6): 1186—1196.

[6] STEIN E M, WEISS G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces* [M]. Princeton Univ. Press, Princetion, N. J., 1971.

Approximation by Riesz Means on Spherical Hardy Spaces

LI Luo-qing

(Dept. of Math., Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract: The Riesz means and Peetre K-modulus on Hardy spaces of the unit sphere are introduced. The approximation properties of Riesz means on Hardy spaces are discussed. The equivalence relationships between Riesz means and Peetre K-modulus are established. The Riesz operator can serve as a realization of the corresponding K-modulus.

Key words: Spherical Hardy space; Riesz Means; Peetre K-modulus; approximation.