第23卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 4
2003年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2003

完全 t 部图 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 的色唯一性*

邹　辉　文[1,2]

(1. 东华大学旭日工商管理学院，上海 200051； 2. 东华理工学院数学系，江西 抚州 344000)

摘　要：本文使用比较两个色等价图的色划分数的方法，得出了完全 t 部图的色等价图类仍为完全 t 部图的一般形式数值条件，进一步得出了 $K(n_1,n_2,n_3)$ 和 $K(n_1,n_2,n_3,n_4)$ 为色唯一图的一般形式数值条件.

关键词：完全 t 部图；色等价和色唯一图；色划分.

分类号：AMS(2000) 05C15/CLC number：O157.5

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0737-06

1　引　言

设下面所讨论的图均为有限、无向、无环的简单图，本文的记号未加说明时引自文[1－3]. 用 $P(G,\lambda)$ 表示图 G 的色多项式. 称图 H 与 G 是色等价的(记为 $H\sim G$)，如果 $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$. 若对任意图 H 使 $H\sim G$，都有 H 与 G 同构(记为 $H\cong G$)，则称 G 是色唯一图.

自色等价图和色唯一图的概念提出以来已成功地找到了各种类型的色唯一图. 然而，到目前为止寻找色唯一图类还没有一般的方法. [1,2] 综述了 1997 年以前在这方面的研究工作.

本文用 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 表示完全 t 部图，$K(n_1,n_2,\cdots,n_t)-A$ 表示从 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 中删去边子集 A 所得的 t 部图. 令 $\mathscr{L}_t=\{K(n_1,n_2,\cdots,n_t)\mid 0<n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_t\}$.

关于多部图的色唯一性，到目前为止，最好的结果是：$K(m,n)(n\geqslant m\geqslant 2)$ 和 $K(m,n)-\{e\}(n\geqslant m\geqslant 3)$ 是色唯一图. 当 $t\geqslant 3$ 时，文[1,2,5,6] 指出如下一些图类(在一定条件下)是色唯一图：

$K(n,n,n+k)$(若 $n\geqslant 2,0\leqslant k\leqslant 3$)；$K(n-k,n,n)$(若 $n\geqslant k+2,0\leqslant k\leqslant 3$)；$K(n-k,n,n+k)$(若 $n\geqslant 5,0\leqslant k\leqslant 2$)；$K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$(若 $|n_i-n_j|\leqslant 1,1\leqslant i,j\leqslant t$)；$K(n-1,n,\cdots,n,n+1)$ 与 $K(n,n,\cdots,n)-\{e\}$(若 $n\geqslant 3$)，$K(1,n_2,\cdots,n_t)$(当且仅当 $\max\{n_2,\cdots,n_t\}\leqslant 2$).

文[1,2] 的作者还提出了如下的问题和猜想.

问题 A　若 $|n_i-n_j|\leqslant 2,1\leqslant i,j\leqslant t$，且 $\min\{n_1,n_2,\cdots,n_t\}$ 充分大，$K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 是否

* 收稿日期：2001-02-20

基金项目：江西省教育厅科技项目(2002-01)和上海市高校科技发展基金(02DK08)资助项目

作者简介：邹辉文(1959-)，男，博士，副教授.

为色唯一图？

猜想 B 对正整数 n,k，当 $n\geqslant k+2$ 时，$K(n-k,n,n)$ 是色唯一图.

本文使用比较两个色等价图的色划分数的方法，得出了完全 t 部图 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$）的色等价图类仍为完全 t 部图的一般形式数值条件，进一步得出了 $K(n_1,n_2,n_3)$ 和 $K(n_1,n_2,n_3,n_4)$ 为色唯一图的一般形式数值条件，推广了文[1,2]给出的大部分相关结果，并部分地解决了上述问题 A 和猜想 B.

2 主要结果

定理 1 设 $G=K(n_1,n_2,\cdots,n_t)\in\mathscr{L}_t$，$\mathscr{D}(G)=\{Y\mid Y\sim G\}$，$a_t=\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}(n_i-n_j)^2/(2t)\right)^{1/2}$. 若 $\sum_{i=1}^{t}n_i>ta_t^2+\sqrt{2t(t-1)}a_t$，$t\geqslant 3$，则 $\mathscr{D}(G)\subset\mathscr{L}_t$.

且进一步有，若 G 还满足下列条件之一：

(i) $n_1<n_2<\cdots<_t$，(ii) $t=3$，(iii) $t=4$，

则 G 是色唯一图.

定理 2 设 $G=K(m,n,r)$，$m\leqslant n\leqslant r$，$r-m=k\geqslant 0$. 若 $m>(k+k^2)/3$，则 G 是色唯一图. 特别地，若 $r-m=2$ 且 $m\geqslant 3$，则 G 是色唯一图.

定理 3 设 $G=K(m,n,r,u)$，$m\leqslant n\leqslant r\leqslant u$，$u-m=k\geqslant 0$. 若 $m>((2\sqrt{3}-1)k+2k^2)/4$，则 G 是色唯一图. 特别地，若 $u-m=2$ 且 $m\geqslant 4$，则 G 是色唯一图.

注记 1°. 定理 2,3 给出了当 $t=3,4$ 时上述问题 A 的肯定回答，定理 2 部分地解决了上述猜想 B，并推广了上述有关结果.

2°. 若上述定理的条件不满足，则结论不一定成立. 例如当 $n\geqslant 3$ 时，$K(1,n,n)$ 不是色唯一图，这里 $a_3=(n-1)/\sqrt{3}$，$n_1+n_2+n_3=2n+1<n^2-1=3a_3^2+2\sqrt{3}a_3$. 但定理 1 的条件只是个充分条件，例如 $K(2,4,6)$ 是色唯一图[7]，而该条件并不满足.

3 若干基本引理

设图 G 的顶点数 $|V(G)|=p$，$m_r(G)$ 为将 $V(G)$ 分成 r 色类的色划分数目，

$$\lambda_{(r)}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1).$$

引理 1 对图 G 和 H，$H\sim G$ 当且仅当 $|V(H)|=|V(G)|$，且 $m_r(H)=m_r(G)$，$r=1,2,\cdots,|V(G)|$.

证明 $P(G,\lambda)=\sum_{r=1}^{p}m_r(G)\lambda_{(r)}$[3]. 充分性显然，必要性对 p 用数学归纳法即知. □

引理 2 设 $G=K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$，则 $m_{t+1}(G)=2^{n_1-1}+2^{n_2-1}+\cdots+2^{n_t-1}-t$.

证明 设 $(N_1,N_2,\cdots,N_t)$ 为 G 的 t 部分，其中 $|N_i|=n_i$，$i=1,2,\cdots,t$.

由于 G 中任意两个属于不同部分的顶点均相邻，故将 $V(G)$ 分成 $t+1$ 色类的任一色划分就等价于将 $N_1,N_2,\cdots,N_t$ 中之一划分成两类，其余各作为一类. 设 D_i 为将 N_i 划分成两类的分

法数，$i=1,2,\cdots,t$. 显然 $D_i=\sum_{j=1}^{n_i-1}\binom{n_i}{j}\Big/2=2^{n_i-1}-1, i=1,2,\cdots,t$. 所以

$$m_{t+1}(G)=D_1+D_2+\cdots+D_t=2^{n_1-1}+2^{n_2-1}+\cdots+2^{n_t-1}-t.$$

引理 3 设 $G=K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$，J 为整数集. 假设图 Y 满足 $Y\sim G$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$ 则

$$Y=K(n_1+\alpha_1,n_2+\alpha_2,\cdots,n_t+\alpha_t)-A,$$

其中 $|A|=s(\alpha)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}\alpha_i\alpha_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}(n_i\alpha_j+n_j\alpha_i)\geqslant 0, \sum_{i=1}^{t}\alpha_i=0, \alpha_i\in J, n_i+\alpha_i>0, i=1,2,\cdots,t$.

且进一步有，

(1) 若 $|A|=s(\alpha)>0$，设 R 为实数集，$D=\{\alpha|s(\alpha)>0,\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=0,\alpha_i\in R,i=1,2,\cdots,t\}$，$a_t=(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}(n_i-n_j)^2/(2t))^{1/2}$，则

(i) $\max_{\alpha\in D}\{s(\alpha)\}=a_t^2$，

(ii) 设 $w=\sum_{i=1}^{t}n_i/t-\sqrt{2t(t-1)}a_t/t$，则 $w\leqslant n_i, w<n_i+\alpha_i, i=1,2,\cdots,t,\alpha\in D$.

(2)[9,10]若 $|A|=s(\alpha)=0$，且 $t=3$，则 $Y\cong G$.

(3)[11]若 $|A|=s(\alpha)=0$，且 $t=4$，则 $Y\cong G$.

引理 4 设 $H=K(r_1,r_2,\cdots,r_t)$，$Y=H-A$，$|A|=s>0$，记 $\eta=m_{t+1}(Y)-m_{t+1}(H)$. 若 $\min\{r_1,r_2,\cdots,r_t\}>s$，则 $s\leqslant\eta\leqslant 2^t-1$.

证明 显然，将 $V(H)$ 分成 $t+1$ 色类的任一色划分都是 $V(Y)$ 的一个 $t+1$ 色类的色划分，故 η 就是由于 H 中删去 A 所增加的 $V(Y)$ 的 $t+1$ 色类的色划分个数.

设 $(R_1,R_2,\cdots,R_t)$ 为 H 的 t 部分，$|R_i|=r_i, i=1,2,\cdots,t$. 又设 V' 为 A 的端点集. 我们首先给出下述事实：

事实 F：P 是 $V(Y)$ 但不是 $V(H)$ 的一个 $t+1$ 色类的色划分当且仅当 P 是 $V(Y)$ 的一个 $t+1$ 色类的色划分，且 P 由 A 中某 $j(1\leqslant j\leqslant s)$ 条边的端点集 V_0 作为一个色类，$R_i-V_0, i=1,2,\cdots,t$ 作为其余的色类所得到.

事实 F 的证明.

必要性. 由假设，P 是 $V(Y)$ 但不是 $V(H)$ 的一个 $t+1$ 色类的色划分，故 P 确定的 $t+1$ 色类中至少有一个色类 V_0 含有不同部分中的顶点，但 V_0 中的顶点在 Y 中不相邻，所以 V_0 由 A 中某 j 条边的端点所组成.

又因 $\min\{r_1,r_2,\cdots,r_t\}>s$，故 $R_i-V'(\subset R_i-V_0)(i=1,2,\cdots,t)$ 均非空. 显然，它们必须分别被包含于 t 个不含不同部分中的顶点且异于 V_0 的色类中，总共只有 $t+1$ 个色类，故其余的 t 个色类必须是 $R_i-V_0, i=1,2,\cdots,t$.

充分性. 由假设，P 确定的 $V(Y)$ 的 $t+1$ 色类中有一个色类含有不同部分中的顶点，故 P 显然不是 $V(H)$ 的一个 $t+1$ 色类的色划分.

下面继续完成引理的证明.

由于 η 等于上述色划分 P 的个数，由事实 F 知

$$s=\binom{s}{1}\leqslant\eta\leqslant\sum_{j=1}^{s}\binom{s}{j}=2^{s}-1.$$

4 定理的证明

定理 1 的证明 设 J 为整数集，J^t 为 J 的 t 维笛卡尔积. 设图 $Y\in\mathscr{Q}(G)=\{Y|Y\sim G\}$，则由引理 1 和引理 3 有

$$m_{t+1}(Y)=m_{t+1}(G), \tag{1}$$

$$Y=K(n_1+\alpha_1,n_2+\alpha_2,\cdots,n_t+\alpha_t)-A,|A|=s(\alpha)\geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=0,n_i+\alpha_i>0,\alpha_i\in J,i=1,2,\cdots,t.$$

首先，我们须证明 $|A|=s(\alpha)=0$. 假设 $|A|=s(\alpha)>0$，我们将推出矛盾.

令 $H=K(n_1+\alpha_1,n_2+\alpha_2,\cdots,n_t+\alpha_t)$，$\eta=m_{t+1}Y)-m_{t+1}(H)$. 由引理 2 可得

$$\begin{aligned}m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)&=m_{t+1}(G)-m_{t+1}(H)-\eta\\&=2^{n_1-1}+2^{n_2-1}+\cdots+2^{n_t-1}=(2^{n_1+\alpha_1-1}+2^{n_1+\alpha_2-1}+\cdots+2^{n_1+\alpha_t-1})-\eta.\end{aligned}\tag{2}$$

下面推导 $m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)\neq 0$，从而矛盾. 由引理 3 得，

$$\alpha\in D\cap J^t,\ s(\alpha)\leqslant[\max_{\alpha\in D}\{s(\alpha)\}]=[a_t^2]=[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}(n_i-n_j)^2/(2t)],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

令 $w=\sum_{i=1}^{t}n_i/t-\sqrt{2t(t-1)}a_t/t$ 和 $w_0=[w]$.

同样由引理 3 得，

$$w_0\leqslant w\leqslant n_i,w_0\leqslant w<n_i+\alpha_i,\ j=1,2,\cdots,t,\alpha\in D\cap J^t. \tag{3}$$

由定理的假设即知

$$w>a_t^2\geqslant s(\alpha). \tag{4}$$

由(3)，(4)得，$\min\{n_1+\alpha_1,n_2+\alpha_2,\cdots,n_t+\alpha_t\}>w>s(\alpha)$.

于是由引理 4 则有：

$$0<s(\alpha)\leqslant\eta\leqslant 2^{s(\alpha)}-1. \tag{5}$$

于是由(2)，(3)可推得

$$m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)=2^{w_0-1}F(\alpha)-\eta, \tag{6}$$

其中 $F(\alpha)=2^{n_1-w_0}+2^{n_2-w_0}+\cdots+2^{n_t-w_0}-(2^{n_1+\alpha_1-w_0}+2^{n_2+\alpha_2-w_0}+\cdots+2^{n_t+\alpha_t-w_0})\in J$.

令 $D_1=\{\alpha|\alpha\in D\cap J^t,F(\alpha)\leqslant 0\}$，$D_2=\{\alpha|\alpha\in D\cap J^t,F(\alpha)>0\}$，则

$$D\cap J^t=D_1\cup D_2,D_1\cap D_2=\varnothing.$$

下面我们仅须考虑两种情形.

情形 1 $\alpha\in D_1$. 此时，$F(\alpha)\leqslant 0$，再由(5)，(6)得

$$m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)=2^{w_0-1}F(\alpha)-\eta<0,$$

这与(1)：$m_{t+1}(Y)=m_{t+1}(G)$矛盾.

情形 2 $\alpha\in D_2$. 此时，$F(\alpha)\geqslant 1$.

若 $w_0=w$,则由(4):$w>s(\alpha)$和 $s(\alpha)\in J$ 知,$w_0-1\geqslant s(\alpha)$,再由(5),(6)得

$$m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)=2^{w_0-1}F(\alpha)-\eta\geqslant 2^{w_0-1}-(2^{s(\alpha)}-1)=2^{w_0-1}-2^{s(\alpha)}+1>0,$$

同样矛盾.

若 $w_0<w$,则由(3)知:$n_i-w_0>0,n_i+a_i-w_0>0,,i=1,2,\cdots,t$. 于是有 $F(\alpha)\geqslant 2$. 由 $w_0=[w]$和 $w>s(\alpha)\in J$ 我们有 $w_0\geqslant s(\alpha)$,再由(5),(6)得

$$m_{t+1}(G)-m_{t+1}(Y)=2^{w_0-1}F(\alpha)-\eta\geqslant 2^{w_0-1}\cdot 2-(2^{s(\alpha)}-1)=2^{w_0}-2^{s(\alpha)}+1>0,$$

又矛盾.

因此,$|A|=s(\alpha)=0$. 故 $Y=K(n_1+a_1,n_2+a_2,\cdots,n_t+a_t)$.

设 $r_i=n_i+a_i,i=1,2,\cdots,t$,不妨设 $r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_t$,则 $Y=K(r_1,r_2,\cdots,r_t)\in\mathscr{L}_t$. 即

$$\mathscr{D}(G)\subset\mathscr{L}_t.$$

下面考虑 G 还满足的三个条件.

(i) $n_1<n_2<\cdots<n_t$.

由(1)和引理 2 可推得 $2^{n_1-1}+2^{n_1-1}+\cdots+2^{n_t-1}=2^{r_1-1}+2^{r_2-1}+\cdots+2^{r_t-1}=N$. 因为正整数 N 的二进制展开式是唯一的,故 $r_i-1=n_i-1$,即 $r_i=n_i,i=1,2,\cdots,t$,所以 $Y\cong G$,即 G 是色唯一图.

(ii) $t=3$. 由引理 3 的结论(2)即知 $Y\cong G$,即 G 是色唯一图.

(iii) $t=4$. 由引理 3 的结论(3)即知 $Y\cong G$,即 G 是色唯一图.

定理 2 的证明 设 $a_3^2=((n-m)^2+(r-m)^2+(r-n)^2)/6$,由定理 1,只要证 $m+n+r>3a_3^2+2\sqrt{3}a_3$.

因 $m\leqslant n\leqslant r$, $r-m=k$,故 $m+n+r\geqslant 3m+k$.

设 $n-m=i$,则 $0\leqslant i\leqslant k$. 于是有 $i^2+k^2-2ki+i^2\leqslant k^2$,即 $i^2+(k-i)^2\leqslant k^2$. 故

$$a_3^2=(i^2+k^2+(k-i)^2)/6\leqslant k^2/3.$$

再由 $m>(k+k^2)/3$,即得 $m+n+r\geqslant 3m+k>2k+k^2\geqslant 3a_3^2+2\sqrt{3}a_3$. □

定理 3 的证明 设 $a_4^2=((n-m)^2+(r-m)^2+(r-n)^2+(u-m)^2+(u-n)^2+(u-r)^2)/8$,由定理 1,只要证 $m+n+r+u>4a_4^2+2\sqrt{6}a_4$.

因 $m\leqslant n\leqslant r\leqslant u,u-m=k$,故 $m+n+r+u\geqslant 4m+k$.

设 $n-m=i,r-m=j$,则 $0\leqslant i,j\leqslant k$. 于是有 $i^2+k^2-2ki+i^2\leqslant k^2$,即 $i^2+(k-i)^2\leqslant k^2$. 同理,$j^2+(k-j)^2\leqslant k^2,(j-i)^2\leqslant k^2$. 故

$$a_4^2=(i^2+j^2+k^2+(j-i)^2+(k-i)^2+(k-j)^2)/8\leqslant k^2/2.$$

再由 $m>((2\sqrt{3}-1)k+2k^2)/4$,即得 $m+n+r+u\geqslant 4m+k>2\sqrt{3}k+2k^2\geqslant 4a_4^2+2\sqrt{6}a_4$. □

致谢 本文的完成得到了导师施永兵教授的精心指导和热情帮助,值此表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] KOH K M, TEO K L. *The search for chromatically unique graphs* [J]. Graphs and Combinatorics, 1990, **6**: 259—285.

[2] KOH K M, TEO K L. *The search for chromatically unique graphs—II* [J]. Discrete Mathematics, 1997, **172**: 59—78.
[3] BIGGS N L. *Algebraic Graph Theory* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.
[4] CHAO C Y, WHITEHEAD Jr E G. *On chromatic equivalence of graphs* [A], ALAVI Y, LICK D R. *Theory and Applications* [C], Springer Lecture Notes in Mathematics, 1978, **624**: 121—131.
[5] CHIA G L, GOH B H, KOH K M. *The chromaticity of some families of complete tripartite graphs* [J], SCIENTIA, Series A: Mathematical Sciences, 1988, **2**: 27—37.
[6] LI Nian-zu, LIU Ru-ying. *The chromaticity of the complete t-partite graph* $K(1,p_2,\cdots,;_t)$ [J]. Journal of Xinjiang University, 1990, **7**(3): 95—96.
[7] ZOU Hui-wen. *The chromaticity of the complete tripartite graph* $K(2,4,6)$ [J]. Journal of Shanghai Teachers University, 1998, **27**(4): 14—17. (in Chinese)
[8] ZOU Hui-wen. *On the chromatic equivalence of complete t-partite graphs* [J]. Journal of Fuzhou Teachers College, 1998, **18**(2): 104—109.
[9] ZOU Hui-wen. *On the chromaticity of complete tripartite graphs* $K(n_1,n_2,n_3)$ [J]. Journal of System Science & Mathematics Science, 2000, **20**(2): 181—186. (in Chinese)
[10] ZOU Hui-wen. *On the chromaticity of complete tripartite graphs* $K(n-k,n,n)$ [J]. Journal of Shanghai Teachers University, 1999, **28**(4): 20—26.
[11] ZOU Hui-wen. *Classes of chromatically normal graphs of complete t-partite graphs* [J]. Jiangxi Science, 2001, **19**(2): 71—75.

On the Chromaticity of Complete t-partite Graphs $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$

ZOU Hui-wen[1,2]

(1. Glorious Sun School of Business & Management, Donghua University, Shanghai 200051, China;
2. Dept. of Math., East China Institute of Technology (North Area), Fuzhou 344000, China)

Abstract: With Comparing the numbers of partions into r color classes of two chromatically equivalent graphs, a general numerical condition is established to guarante that the equivalent graphs of complete t-partite graphs $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ are still complete t-partite graphs. Furthermore, two general numerical conditions are obtained, under which $K(n_1,n_2,n_t)$ and $K(n_1,n_2,n_3,n_4)$ are chromatically unique.

Key words: complete t-partite graph; chromatically equivalent and unique graph; partition into colour classes.