第24卷第1期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 1
2004年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2004

$N[a,b]$ 类中边界 Nevanlinna-Pick 插值（Ⅰ）*

吴 化 璋[1,2]

（1. 安徽大学数学系，安徽 合肥 230039；2. 中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026）

摘 要：用所谓的 Hankel 向量方法求解 $N[a,b]$ 函数类中带边界插值数据的 Nevanlinna-Pick 插值(BNP($N[a,b]$))问题，并建立 BNP($N[a,b]$)问题与[a,b]上的某种带约束条件的 Hausdorff 矩量问题之间等价的可解条件以及解之间明确的一一对应关系. 这使得当 BNP($N[a,b]$)问题有多解时，能通过带约束条件的矩量问题的可解性准则和解获得 BNP($N[a,b]$)问题的可解性准则和解的参数化描述，而在唯一解的情况下，通过 BNP($N[a,b]$)问题解的存在唯一性准则和唯一解来获得带约束条件的矩量问题解的存在唯一性准则和唯一解的表示.

关键词：$N[a,b]$ 类；BNP($N[a,b]$)问题；Hausdorff 矩量问题；Hankel 向量；角导数.

分类号：AMS(2000) 30E05,47A57/CLC number：O174.42,O174.43

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)01-0107-12

1 BNP($N[a,b]$)问题与它的 Hankel 向量

边界 Nevanlinna-Pick 插值(BNP)问题有很长的历史. Nevanlinna 首先借助于 Schur 算法，讨论了在单位圆内 BNP 问题. Krein 在二十世纪 30 年代，通过 Riesz 的办法研究了在 N 类(Nevanlinna 函数类，即在上半平面 C^+ 内解析且虚部非负的函数全体)中含实的而且是单重插值点的 BNP 问题. 1937 年，Kotelyansklii 则研究了 N 类中既含内部插值点又有边界点的更一般的 BNP 问题. 特别在近二十年来，出现了不同类中的 BNP 问题和不同研究的方法. 如：Nudelman[1]利用 Potapov 基本矩阵不等式方法研究了 N 类中的一种 BNP 问题. Sarason[2]考虑了在 Caratheodory 类和 Schur 类中的 BNP 问题. 文献[3]用所谓 Hankel 向量的方法解决了 N 类中三种情形的 BNP 问题. 受文献[2,3]的启发，我们用 Hankel 向量方法研究 $N[a,b]$ 类中 BNP 问题，建立与之相关的带约束条件的 Hausdorff 矩量问题之间的一一对应，并给出它们的可解性准则，最后用 Krein-Nudelman[4]的正交和拟正交多项式的方法给出 $N[a,b]$ 类中边界 Nevanlinna-Pick 插值问题与相关的带约束条件的 Hausdorff 矩量问题解的表示.

我们称函数 $f(\lambda)$ 属于 $N[a,b]$ 类，如果 $f(\lambda)\in N$ 且在区间 $(-\infty,a)$ 内解析且取非负值，在区间 (b,∞) 内解析且取非正值. 由[4]知，函数 $f(\lambda)\in N[a,b]$ 当且仅当它有积分表示

* 收稿日期：2002-06-03

作者简介：吴化璋(1966-)，博士，副教授.

$$f(\lambda)=\int_a^b \frac{\mathrm{d}\sigma_f(u)}{u-\lambda},\quad \lambda \notin [a,b], \tag{1.1}$$

其中 $\sigma_f(u)$ 是$[a,b]$上的分布函数(右连续的非减函数).

BNP ($N[a,b]$)问题　设 $\lambda_1,\cdots\lambda_\theta$ 是上半平面 C^+ 内互不相同的插值点,其重数分别是 $\tau_1,\cdots,\tau_\theta$,对应的插值值分别是 $c_{ik}\in C$(复数集,下同),$1\leqslant i\leqslant\theta,0\leqslant k\leqslant\tau_i-1$;$u_1,\cdots,u_s\in(-\infty,a)$ 且互不相同,其重数分别是 $2\alpha_1,\cdots,2\alpha_s$,对应的插值值分别是 $d_{jl}\in R$ (实数集,下同),$1\leqslant j\leqslant s,0\leqslant l\leqslant 2\alpha_j-1$;$v_1,\cdots,v_t\in(b,+\infty)$ 且互不相同,其重数分别是 $2\beta_1,\cdots,2\beta_t$,对应的插值值分别是 $e_{pq}\in R$,$1\leqslant p\leqslant t,0\leqslant q\leqslant 2\beta_p-1$;$g_1,\cdots,g_\rho\in[a,b]$,其重数分别是 $2m_1,\cdots,2m_\rho$,对应的插值值分别是 $W_{\xi\eta}\in R$,$1\leqslant\xi\leqslant\rho,0\leqslant\eta\leqslant 2m_\xi-1$. 求所有属于 $N[a,b]$ 类中函数 $f(\lambda)$,要求满足下面的插值条件:

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_i}=c_{ik},i=1,\cdots,\theta,k=0,1,\cdots,\tau_i-1, \tag{1.2a}$$

$$\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\lambda^l}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\alpha_j}=d_{jl},j=1,\cdots,s,l=0,1,\cdots,2\alpha_j-1, \tag{1.2b}$$

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q}{d\lambda^q}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\beta_g}=e_{pq},p=1,\cdots,t,q=0,1,\cdots,2\beta_p-1, \tag{1.2c}$$

$$\frac{1}{\eta!}\frac{d^\eta}{d\lambda^\eta}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=g_\xi}=w_{\xi\eta},\xi=1,\cdots,\rho,\eta=0,1,\cdots,2m_\xi-1, \tag{1.2d}$$

这里 $f(g_\xi)$ 与 $f^{(\eta)}(g_\xi)(\eta\geqslant 1)$ 分别表示 $f(\lambda)$ 在 g_ξ 处的非切极限和 η 阶角导数(见第 2 节有关定义).

令 $n=\sum_{i=1}^{\theta}\tau_i+\sum_{j=1}^{s}\alpha_j+\sum_{p=1}^{t}\beta_p+\sum_{\xi=1}^{\rho}m_\xi>1$. 众所周知,总存在次数不超过 2n－1 的唯一的 Hermite 插值多项式 $\omega(\lambda)$ 满足 (1.2a)－(1.2d)和下面的方程组:

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\overline{\lambda}_i}=\overline{c}_{ik},i=1,\cdots,\theta,k=0,1,\cdots,\tau_i-1, \tag{1.2a$'$}$$

令 $a(\lambda)$ 是插值点(包括点 $\overline{\lambda}_i,i=1,\cdots,\theta$) 的零化多项式,其次数是 $2n$,即

$$a(\lambda)=\prod_{i=1}^{\theta}(\lambda-\lambda_i)^{\tau_i}(\lambda-\overline{\lambda}_i)^{\tau_i}\prod_{j=1}^{s}(\lambda-u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(\lambda-v_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi=1}^{\rho}(\lambda-g_\xi)^{2m_\xi}. \tag{1.3}$$

不难看出 $\omega(\lambda)$ 与 $a(\lambda)$ 都是实系数多项式,且对 $\lambda\in[a,b]$,$a(\lambda)>0$. 令 $\omega(\lambda)/a(\lambda)$ 在无穷远点的 Laurent 级数展开式为:

$$\frac{\omega(\lambda)}{a(\lambda)}=\frac{h_0}{\lambda}+\frac{h_1}{\lambda^2}+\cdots+\frac{h_{2n-1}}{\lambda^{2n}}+\cdots, \tag{1.4}$$

每个 $h_r(r=0,1,2,\cdots)$ 显然是实的. 称展开式(1.4) 中前 $2n$ 个 Markov 参数构成的向量 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 为 BNP ($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量.

对上述的 Hankel 向量,我们有如下 $[a,b]$ 上截断的 Hausdorff 矩量问题,有时也称为与 BNP ($N[a,b]$) 问题相关的 Hausdorff 矩量问题.

截断的 Hausdorff 矩量问题　设 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 给定,要求找出$[a,b]$上的分布函数 $\tau(u)$ 满足:

$$h_k=\int_a^b u^k\mathrm{d}\tau(u),\quad k=0,1,\cdots,2n-1. \tag{1.5}$$

在下面第二节，我们将证明 BNP ($N[a,b]$) 问题有解 $f(\lambda)$ 当且仅当对应相关的 Hausdorff 矩量问题有解 $\tau(u)$，且边界上的插值点 $g_1,\cdots,g_\rho\in[a,b]$ 均不是 $\tau(u)$ 的质量分布点，即

$$\tau(\{g_\xi\})\equiv\tau(g_\xi)-\tau(g_\xi-0)=0,\quad \xi=1,\cdots,\rho. \tag{1.6}$$

2 $N[a,b]$ 类中函数的角导数

用 $S_\varepsilon(t)$ 表示在 C^+ 内，顶点为 $t\in[a,b]$ 的扇形区域：

$$S_\varepsilon(t)=\{\lambda|\varepsilon\leqslant\arg(\lambda-t)\leqslant\pi-\varepsilon\},\quad t\in[a,b],0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}. \tag{2.1}$$

设 $f(\lambda)$ 在 $C\setminus[a,b]$ 内解析. 如果 $f(\lambda)$ 在点 $t\in[a,b]$ 有非切极限，记为 $f(t)$，并且差商 $[\lambda,t]_f=\dfrac{f(\lambda)-f(t)}{\lambda-t}$ 在点 t 也有非切极限

$$\lim_{\lambda\to t}[\lambda,t]_f=\lim_{\lambda\to t}\frac{f(\lambda)-f(t)}{\lambda-t}, \tag{2.2}$$

我们称 $f(\lambda)$ 在点 $t\in[a,b]$ 处有一阶角导数. 这里，λ 沿着任何非切路径趋于 $t\in[a,b]$ 意思是指，对 $\forall\,\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\lambda\in S_\varepsilon(t)$，当 $\lambda\to t$ 时，(2.2) 式中表示的非切极限存在，此时我们称之为 $f(\lambda)$ 在点 $t\in[a,b]$ 处的一阶角导数，并记为 $f'(t)$.

现在，我们把角导数的概念推广到高阶角导数情形. 设 $t\in[a,b]$，p 为正整数，如果差商 $[\lambda,t]_f$ 在点 t 有 $p-1$ 阶角导数，称 $f(\lambda)$ 在点 $t\in[a,b]$ 处有 p 阶角导数，记为 $f^{(p)}(t)$（约定 $f^{(0)}(t)\equiv f(t)$）. 可以看出，$f(\lambda)$ 在点 $t\in[a,b]$ 处有 p 阶角导数当且仅当对 $k=0,1,\cdots,p-1$，高阶含重点差商 $[\lambda,\overbrace{t,\cdots,t}^{k}]$ 在点 t 有非切极限，即非切极限

$$\lim_{\lambda\to t}[\lambda,\overbrace{t,\cdots,t}^{k次}]_f=\lim_{\lambda\to t}\frac{[\lambda,\overbrace{t,\cdots,t}^{k-1次}]_f-[\overbrace{t,\cdots,t}^{k次}]_f}{\lambda-t}\equiv[\overbrace{t,\cdots,t}^{k+1次}]_f \tag{2.3}$$

存在，$k=0,1,\cdots,p-1$. 注意到当 $k=p-1$ 时，$\dfrac{1}{p!}f^{(p)}(t)$ 同(2.3) 的非切极限值是一致的，于是 $\dfrac{1}{p!}f^{(p)}(t)=[\overbrace{t,\cdots,t}^{p次}]_f$. 并且，$f(z)$ 在点 t 处事先有直到 $p-1$ 阶角导数. 这时，

$$f^{(k)}(t)=\lim_{\lambda\to t}f^{(k)}(\lambda),\quad k=0,1,\cdots,p. \tag{2.4}$$

引理 2.1 设 $t\in[a,b]$，$f(\lambda)\in N[a,b]$ 有积分表示(1.1)，则 $f(\lambda)$ 在点 t 处有从 0 到 $2m-1$ ($m\geqslant1$) 阶实角导数当且仅当

$$\int_a^b\frac{1}{(u-t)^{2m}}\mathrm{d}\sigma_f(u)<\infty. \tag{2.5}$$

当此条件满足时，有

$$f^{(k)}(t)=\int_a^b\frac{k!}{(u-t)^{k+1}}\mathrm{d}\sigma_f(u),\quad 0\leqslant k\leqslant 2m-1. \tag{2.6}$$

证明 先假定(2.5) 式成立. 定义 $[a,b]$ 上的分布函数 $\tau(u)$，满足

$$\mathrm{d}\tau(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{(u-t)^{2m}}\mathrm{d}\sigma_f(u), & u\neq g_1,\cdots,g_\rho,\\ 0, & u=g_1,\cdots,g_\rho.\end{cases} \tag{2.7}$$

不难验证 $\tau(u)$ 存在且由(2.7)唯一确定.(2.5)式表明 $\tau(u)$ 在 $[a,b]$ 上具有有界变差.下用归纳法证明(2.6)成立.当 $k=0,1$ 时,显然.假设当 $k=n(n<2m-1)$ 时,(2.6)成立.那么 $k=n+1$ 时,由(2.7)和归纳假设,对 $u\in[a,b]$,我们有

$$[\lambda,\overbrace{t,\cdots,t}^{n+1\text{次}}]_f$$

$$=\int_a^b\frac{1}{(u-\lambda)(u-t)^{n+1}}\mathrm{d}\sigma_f(u) \tag{2.8}$$

$$=\int_{|u-t|>1}\frac{1}{(u-\lambda)(u-t)^{n+1}}\mathrm{d}\sigma_f(u)+\int_{|u-t|\leqslant 1}\frac{(u-t)^{2m-n-1}}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u).$$

当 $|u-t|\leqslant 1,\lambda\in S_\varepsilon(t)$ 时,我们有

$$\left|\frac{u-t}{u-\lambda}(u-t)^{2m-n-2}\right|\leqslant\left|\frac{u-t}{u-\lambda}\right|\leqslant 1+\left|\frac{\lambda-t}{u-\lambda}\right|\leqslant 1+\frac{1}{\sin\varepsilon}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{\lambda\to t}\int_{|u-t|\leqslant 1}\frac{(u-t)^{2m-n-1}}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u)=\int_{|u-t|\leqslant 1}(u-t)^{2m-n-2}\mathrm{d}\tau(u).$$

另一方面,(2.8)式给出 $\lim\limits_{\lambda\to t}[\overbrace{t,\cdots,t}^{n+1\text{次}}]_f$ 存在且有下面表达式

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)=\int_{|u-t|>1}\frac{1}{(u-t)^{n+2}}\mathrm{d}\sigma_f(u)+\int_{|u-t|\leqslant 1}\frac{1}{(u-t)^{n+2}}\mathrm{d}\sigma_f(u)$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}\sigma_f(u)}{(u-t)^{n+2}}(u).$$

反过来,假定 $f^{(k)}(t)$ 存在且为实数,$k=0,1,\cdots,2m-1$.特别地,当选取 $\lambda=t+iy(y>0)$ 时,我们有

$$\frac{1}{(2m-1)!}f^{(2m-1)}(t)=\lim_{\lambda\to t}\mathrm{Re}\,[\lambda,\overbrace{t,\cdots,t}^{2m-1\text{次}}]_f$$

$$=\lim_{\lambda\to t}\mathrm{Re}\int_a^b\frac{1}{(u-\lambda)(u-t)^{2m-1}}\mathrm{d}\sigma_f(u)$$

$$=\lim_{y\downarrow 0}\int_a^b\frac{1}{((u-t)^2+y^2)(u-t)^{2m-2}}\mathrm{d}\sigma_f(u)<+\infty,$$

再由 Fatou 定理,可以推出(2.5)式.证毕.

由于 $N[a,b]$ 是 Nevanlinna 函数类的子类,下面的结论只不过是[3]中引理 2.2 的一个特例,故我们略去证明.

引理 2.2 $t\in[a,b]$ 给定.如果 $f(\lambda)\in N[a,b]$ 有积分表示(1.1),则

$$\lim_{\lambda\to t}(\lambda-t)f(\lambda)=-(\sigma_f(t)-\sigma_f(t-0))=-\sigma_f(\{t\}). \tag{2.9}$$

因为 $\sigma_f(\{t\})$ 可以看作分布函数 $\sigma_f(u)$ 在点 $t\in[a,b]$ 处的质量,从引理 2.2 推出,若 t 是分布函数 $\sigma_f(u)$ 质量分布点,即 $\sigma_f(\{t\})>0$,那么当 λ 沿任意非切路径趋于 $t\in[a,b]$ 时,$f(\lambda)$ 发散到 ∞.

引理 2.3 设 $a(\lambda)$ 由(1.3)式给出,$\tau(u)$ 是 $[a,b]$ 上的分布函数且有有界变差.则由下面定义的函数 $\varphi_N(\lambda)$:

$$\varphi_N(\lambda)=a(\lambda)\int_a^b\frac{1}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u), \tag{2.10}$$

满足如下插值条件:

$$\frac{1}{k!}\varphi_N^{(k)}(\lambda_i)=0,\quad i=1,\cdots,\theta,k=0,1,\cdots,\tau_i-1,\tag{2.11}$$

$$\frac{1}{l!}\varphi_N^{(l)}(\alpha_j)=0,\quad j=1,\cdots,s,l=0,1,\cdots,2\alpha_j-1,\tag{2.12}$$

$$\frac{1}{q!}\varphi_N^{(q)}(\beta_p)=0,\quad p=1,\cdots,t,q=0,1,\cdots,2\beta_p-1,\tag{2.13}$$

$$\frac{1}{\eta!}\varphi_N^{(\eta)}(g_\xi)=0,\quad \xi=1,\cdots,\rho,\eta=0,1,\cdots,2m_\xi-2,\tag{2.14}$$

$$\frac{1}{(2m_\xi-1)!}\varphi_N^{2m_\xi-1}(g_\xi)=-\prod_{i=1}^{\theta}|g_\xi-\lambda_i|^{2\tau_i}\times$$
$$\prod_{j=1}^{s}(g_\xi-u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(g_\xi-v_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi\neq k}(g_\xi-g_k)^{2m_k}\tau_N(\{g_\xi\}),\xi=1,\cdots,\rho.\tag{2.15}$$

证明 从引理 2.2,我们有

$$\lim_{\lambda\to g_\xi}\int_a^b\frac{\lambda-g_\xi}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u)=\tau(\{g_\xi\}),\quad \xi=1,\cdots,\rho.$$

因(1.3)给出的$a(\lambda)$是插值点的零化多项式,故(2.11)—(2.14)显然成立.下证(2.15)式.为此,将(2.10)中的$\varphi_N(\lambda)$改写成

$$\varphi_N(\lambda)=\frac{a(\lambda)}{\lambda-g_\xi}\int_a^b\frac{\lambda-g_\xi}{u-\lambda}d\tau(u),\quad \xi=1,\cdots,\rho.$$

因此

$$\lim_{\lambda\to g_\xi}[\lambda,\overbrace{g_\xi,\cdots,g_\xi}^{2m_\xi-1\text{次}}]_{\varphi_N}$$
$$=\prod_{i=1}^{\theta}|g_\xi-\lambda_i|^{2\tau_i}\prod_{j=1}^{s}(g_\xi-u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(g_\xi-v_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi\neq k}(g_\xi-g_k)^{2m_k}\lim_{\lambda\to g_\xi}\int_a^b(\frac{u-g_\xi}{u-\lambda}-1)\mathrm{d}\tau(u)$$
$$=-\prod_{i=1}^{\theta}|g_\xi-\lambda_i|^{2\tau_i}\prod_{j=1}^{s}(g_\xi-u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(g_\xi-v_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi\neq k}(g_\xi-g_k)^{2m_k}\tau(\{g_\xi\}),$$

从而$\varphi_N^{2m_\xi-1}(g_\xi)$有意义并使(2.15)成立.

3 BNP ($N[a,b]$) 问题的可解性准则

本节建立 BNP ($N[a,b]$) 问题的解与相关的带约束条件的 Hausdorff 矩量问题(1.5)解集之间的一一对应,然后给出它们的可解性准则.首先,关于对应关系,我们有下面的结论.

定理 3.1 BNP ($N[a,b]$) 问题可解当且仅当相关的带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)可解,并且当可解时,BNP ($N[a,b]$) 问题的解 $f(\lambda)$ 与相关的带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题的解 $\tau(u)$ 之间存在一一对应关系:

$$f(\lambda)=\omega(\lambda)+a(\lambda)\int_a^b\frac{\mathrm{d}\tau(u)}{u-\lambda},\quad \lambda\notin[a,b].\tag{3.1}$$

具体地说,如果 $f(\lambda)\in N[a,b]$ 是 BNP ($N[a,b]$) 问题的解且有积分表示(1.1),那么由下式唯一确定的分布函数 $\tau(u)(a\leqslant u\leqslant b)$:

$$
\mathrm{d}\tau(u) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\sigma_f(u)}{a(u)}, & u \notin \{g_1, \cdots, g_\rho\}, \\ 0, & u = g_1, \cdots, g_\rho \end{cases} \tag{3.2}
$$

是相关的带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解. 反之,如果 $\tau(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 是 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解并使(1.6)式成立,则由(3.1)所定义出的 $f(\lambda)$ 是 BNP ($N[a,b]$) 问题的解且有积分表示(1.1),其中

$$
\mathrm{d}\sigma_f(u) = a(u)\mathrm{d}\tau(u), \quad a \leqslant u \leqslant b. \tag{3.3}
$$

证明 首先假设 $f(\lambda)$ 是 BNP ($N[a,b]$) 问题的解且有积分表示(1.1),由引理 2.1 知,

$$
\int_a^b \frac{1}{(u-g_\xi)^{2m_\xi}} \mathrm{d}\sigma_f(u) < \infty, \quad \xi = 1, \cdots, \rho, \tag{3.4}
$$

于是有 $\sigma_f(g_\xi) = 0, \xi = 1, \cdots, \rho$,并且由(1.3)知

$$
\int_a^b \frac{1}{a(u)} \mathrm{d}\sigma_f(u) < \infty.
$$

由于对所有的 $u \in [a,b]$(除 $u = g_\xi, \xi = 1, \cdots, \rho$ 外), $a(u) > 0$,所以由(3.2)式定义出的 $\tau(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 是分布函数且具有有界变差. 因 $f(\lambda)$ 有表达式(1.1),再考虑到(3.2),那么如下定义的

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}(\lambda) &\equiv \int_a^b \frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau(u) = \int_a^b \frac{a(u)}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau(u) - a(\lambda)\int_a^b \frac{1}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau(u) \\
&= f(\lambda) - a(\lambda)\int_a^b \frac{1}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau(u)
\end{aligned}
$$

是一个关于 λ 的次数不超过 $2n-1$ 的多项式,满足插值条件(1.2a)－(1.2d)与(1.2a′). 因此,按唯一性, $\hat{\omega}(\lambda)$ 必与 BNP ($N[a,b]$) 问题的 Hermite 插值多项式 $\omega(\lambda)$ 相等. 另一方面,我们令

$$
\varphi(\lambda) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau(u)}{u-\lambda} \in N[a,b],
$$

则由(1.1)和(1.4),对充分大的 $|z|$ 且 $z \in S_\epsilon(t)$, $\varphi(\lambda)$ 有渐近展开式

$$
\varphi(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{a(\lambda)} - \frac{\omega(\lambda)}{a(\lambda)} = -\frac{h_0}{\lambda} - \frac{h_1}{\lambda^2} - \cdots - \frac{h_{2n-1}}{\lambda^{2n}} - \cdots.
$$

由文献[9]之定理 1,我们推出

$$
\int_a^b u^k \mathrm{d}\tau(u) = h_k, \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-1.
$$

因此, $\tau(u)$ 是带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解.

反之,假设 $\tau(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 是 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解并使(1.6)式成立. 令 $\mathrm{d}\sigma_f(u) = a(u)\mathrm{d}\tau(u), a \leqslant u \leqslant b$,那么 $d\sigma_f(u) \geqslant 0, a \leqslant u \leqslant b$. 从(3.1)确定出 $f(\lambda)$ 满足插值条件(1.2a)－(1.2c). 从引理 2.3 推出 $f(\lambda)$ 也满足插值条件(1.2d). 下证 $f(\lambda) \in N[a,b]$. 设 $h_0, h_1, \cdots, h_{2n-1}$ 由(1.5)式定义给出,我们在次数不超过 $2n-1$ 的多项式空间 $\mathscr{H}$ 上定义一个线性泛函 $\mathscr{L}_u$,使得 $\mathscr{L}_u\{u^j\} = h_j, j = 0, 1, \cdots, 2n-1$. 于是我们可以推出

$$
\int_a^b \frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau(u) = \mathscr{L}_u\left\{\frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\right\} = \omega(\lambda).
$$

则

$$
f(\lambda) = \omega(\lambda) + a(\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau(u)}{u-\lambda}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u) + a(\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau(u)}{u-\lambda} \\
&= \int_a^b \frac{a(u)}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau(u) \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}\sigma_f(u)}{u-\lambda} \in N[a,b].
\end{aligned}
$$

定理证毕.

下面考虑 BNP ($N[a,b]$ 问题与相关的带约束条件的 Hausdorff 矩量问题的可解性准则.

令 y 是插值点生成的向量:

$$
y=(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{\tau_1\text{次}},\cdots,\underbrace{\lambda_\theta,\cdots,\lambda_\theta}_{\tau_\theta\text{次}},\underbrace{\lambda_{\theta+1},\cdots,\lambda_{\theta+1}}_{\tau_{\theta+1}\text{次}},\cdots,\underbrace{\lambda_{\theta+s},\cdots,\lambda_{\theta+s}}_{\tau_{\theta+s}\text{次}},\underbrace{\lambda_{\theta+s+1},\cdots,\lambda_{\theta+s+1}}_{\tau_{\theta+s+1}\text{次}},\cdots,
$$

$$
\underbrace{\lambda_{\theta+s+t},\cdots,\lambda_{\theta+s+t}}_{\tau_{\theta+s+t}\text{次}},\underbrace{\lambda_{\theta+s+t+1},\cdots,\lambda_{\theta+s+t+1}}_{\tau_{\theta+s+t+1}\text{次}},\cdots,\underbrace{\lambda_{\theta+s+t+\rho},\cdots,\lambda_{\theta+s+t+\rho}}_{\tau_{\theta+s+t+\rho}\text{次}}),
$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_\theta,\tau_1,\cdots,\tau_\theta$ 如前,而

$$
\lambda_j=\begin{cases} u_{j-\theta} \\ u_{j-\theta-s} \\ g_{j-\theta-s-\rho} \end{cases} \text{与 } \tau_j=\begin{cases} \alpha_{j-\theta/2} & \theta+1\leqslant j\leqslant\theta+s, \\ \beta_{j-\theta-s/2,} & \theta+s+1\leqslant j\leqslant\theta+s+t, \\ m_{j-\theta-s-\rho/2} & \theta+s+t+1\leqslant j\leqslant\theta+s+t+\rho. \end{cases}
$$

令 $L_y=(L_{ij})_{i,j=1}^{\theta+s+t+\rho}$ 是由 BNP ($N[a,b]$) 问题的 Hermite 插值多项式 $\omega(\lambda)$ 与相关的 y 和 $\bar{y}$ 生成的 BNP ($N[a,b]$) 问题的广义块 Loewner 矩阵,其中 $L_{ij}=(l_{ij}^{kl})_{k,l=0}^{\tau_i-1,\tau_j-1}\in C^{\tau_i\times\tau_j}$,而每个元素 l_{ij}^{kl} 由下面高阶差商给出

$$
l_{ij}^{kl}=[\overbrace{\lambda_i,\cdots,\lambda_i}^{k+1\text{次}}\overbrace{\lambda_j,\cdots,\lambda_j}^{l+1\text{次}}]_\omega=\begin{cases}\dfrac{1}{k!\,l!}\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial\lambda^k\partial\mu^l}\left[\dfrac{\omega(\lambda)-\omega(\mu)}{\lambda-\mu}\right]_{\lambda=\lambda_i,\mu=\bar{\lambda}_j}, & \lambda_i\neq\bar{\lambda}_j, \\ \dfrac{1}{(k+l+1)!}\omega^{(k+l+1)}(\lambda_i), & \lambda_i=\bar{\lambda}_j. \end{cases}
$$

令

$$
b(\lambda)=\prod_{j=1}^{\theta+s+t+\rho}(\lambda-\lambda_j)^{\tau_j},
$$

$$
b_{ik}(\lambda)=b(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{k+1},\quad i=1,\cdots,\theta+s+t+\rho,\quad k=0,1,\cdots,\tau_i-1.
$$

从[5]之定理 3.3,我们有

$$
L_{y\bar{y}}(\omega(\lambda))=W_y(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}W_y^*, \tag{3.6}
$$

其中 $W_y\in C^{n\times n}$ 是非奇异的,W_y^* 是 W_y 的共轭转置,且由下列确定:

$$
\mathrm{col}[\mathrm{col}\,[b_{ik}(\lambda)]_{k=0}^{\tau_i-1}]_{i=1}^{\theta+s+t+\rho}=W_y\,\mathrm{col}\,[\lambda^i]_{i=0}^{n-1}. \tag{3.7}
$$

因而

$$
L_{y\bar{y}}((\lambda-a)\omega(\lambda))=L_{y\bar{y}}((\lambda-a)\omega(\lambda)-h_0a(\lambda))=W_y(h_{i+j+1}-ah_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}W_y^*,
$$

$$
L_{y\bar{y}}((b-\lambda)\omega(\lambda))=L_{y\bar{y}}((b-\lambda)\omega(\lambda)-h_0a(\lambda))=W_y(bh_{i+j}-h_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}W_y^*.
$$

用 $V[a,b;\mathbf{h}]$ 来表示矩量为 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 的截断 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解集.我们引入正交多项式序列[4]如下:

$$
D_0(t)=\frac{1}{\sqrt{h_0}},D_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\triangle_k\triangle_{k-1}}}\det\,\|h_\nu h_{\nu+1}\cdots h_{\nu+k-1}t^\nu\|_{\nu=0}^{k},\quad k=1,2,\cdots,n, \tag{3.8}
$$

其中 $\triangle_k=\det\,(h_{i+j})_{i,j=0}^{k}>0,k=1,2,\cdots,n$(添加适当的 h_{2n},它们在下面行列式的展开式中消

失[4,6]，因而不影响行列式的值）. 再引入共轭多项式序列：

$$C_k(\lambda)=\int_a^b \frac{D_k(t)-D_k(\lambda)}{t-\lambda}\mathrm{d}\tau(t),\quad k=1,2,\cdots,n, \tag{3.9}$$

其中 $\tau(t)\in V[a,b;\mathbf{h}]$.

为了下一节 BNP $(N[a,b])$ 问题的求解，对向量 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$，我们按[4]的方法引入拟正交多项式 $\underline{Q}(\lambda)$，$\overline{Q}(\lambda)$ 和共轭多项式 $\underline{P}(\lambda)$，$\overline{P}(\lambda)$ 分别如下：

$$\underline{Q}(\lambda)=D_n(\lambda),\overline{Q}(\lambda)=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} D_{n+1}(\lambda) & D_n(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) \\ D_{n+1}(a) & D_n(a) & D_{n-1}(a) \\ D_{n+1}(b) & D_n(b) & D_{n-1}(b) \end{vmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\underline{P}(\lambda)=C_n(\lambda),\overline{P}(\lambda)=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} C_{n+1}(\lambda) & C_n(\lambda) & C_{n-1}(\lambda) \\ D_{n+1}(a) & D_n(a) & D_{n-1}(a) \\ D_{n+1}(b) & D_n(b) & D_{n-1}(b) \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

其中 h_{2n} 以一种非本质的方式进入 $\overline{Q}(\lambda)$ 与 $\overline{P}(\lambda)$ 的表达式中.

由[7]引理 2 知，如果矩量 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 在 $[a,b]$ 上是严格正的，且 $\tau(u)\in V[a,b;\mathbf{h}]$，而 $r(\lambda)\in N[a,b]\cup\{\infty\}$ 为对应的参数函数. 那么对某个 $g_\xi(\xi=1,\cdots,p)$ 来说，$\tau(\{g_\xi\})=0$ 相当于 $\underline{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$. 因此，边界插值点 $g_1,\cdots,g_p$ 均不是 $\tau(u)$ 的质量分布点当且仅当 $\underline{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$，其中 $\underline{Q}(\lambda)$，$\overline{Q}(\lambda)$ 由(3.10)所给. 而由[7]引理 3 知，如果矩量 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 在 $[a,b]$ 上是奇异非负的，且 $\tau(u)\in V[a,b;\mathbf{h}]$，则 $\tau(\{g_\xi\})=0$ 相当于 $D_r(g_\xi)\neq 0$，$r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$，$\xi=1,\cdots,p$，其中 $D_r(\lambda)$ 由(3.8)所给. 因此，由定理 3.1 与[7]的相关结论，我们有下面等价的可解条件.

定理 3.2 令 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 是 BNP $(N[a,b])$ 问题的 Hankel 向量. 那么下列各款等价：

(1) BNP $(N[a,b])$ 问题是可解的；

(2) 以 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 为矩量且满足约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)是可解的；

(3) 两个 n 阶 Hankel 矩阵正定：$(h_{i+j+1}-ah_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}>0$，$(bh_{i+j}-h_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}>0$ 且 $\underline{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$，其中 $\underline{Q}(\lambda)$，$\overline{Q}(\lambda)$ 如(3.10)所给，此时有无穷多解；或这两个 Hankel 矩阵非负定且其中有一个为奇异的，且(3.8)式中 $D_r(\lambda)$ 满足 $D_r(g_\xi)\neq 0$，$r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$，$\xi=1,\cdots,p$，此时有唯一解.

(4) 两个 n 阶 Loewner 矩阵正定：$L_{y\bar{y}}((\lambda-a)\omega(\lambda))>0$，$L_{y\bar{y}}((b-\lambda)\omega(\lambda))>0$ 且 $\underline{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$，其中 $\underline{Q}(\lambda)$，$\overline{Q}(\lambda)$ 如(3.10)所给，此时有无穷多解；或这两个 Loewner 矩阵非负定且其中有一个为奇异的，且(3.8)式中 $D_r(\lambda)$ 满足 $D_r(g_\xi)\neq 0$，$r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$，$\xi=1,\cdots,p$，此时有唯一解.

4 BNP $(N[a,b])$ 问题的解

关于不确定（多解）情形，我们有以下结论.

定理 4.1 如果 Hausdorff 矩量问题(1.5)的矩量 $h_0, h_1, \cdots, h_{2n-1}$ 所构成的两个 Hankel 矩阵 $(h_{i+k+1} - ah_{i+k})_{i,k=0}^{n-1}$ 与 $(bh_{i+k} - h_{i+k+1})_{i,k=0}^{n-1}$ 是 Hermite 正定的，那么带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题有无穷多个解，它的通解 $\tau(u)$ 可参数化表示为：

$$\int_a^b \frac{d\tau(u)}{\lambda - u} = \frac{\underline{P}(\lambda) - r(\lambda)\overline{P}(\lambda)}{\underline{Q}(\lambda) - r(\lambda)\overline{Q}(\lambda)}, \quad \lambda \notin [a,b], \tag{4.1}$$

其中 $\underline{Q}(\lambda), \overline{Q}(\lambda), \underline{P}(\lambda)$ 与 $\overline{P}(\lambda)$ 由(3.10)与(3.11)所给，参数 $r(\lambda) \in N[a,b] \cup \{\infty\}$ 按如下方式确定；或者(1)$r(\lambda) \equiv \infty$ 从而$\overline{Q}(g_\xi) \neq 0, \xi = 1, \cdots, \rho$；或者(2)$r(\lambda) \in N[a,b]$，它有积分表示 $r(\lambda)\int_a^b (u-\lambda)^{-1} d\sigma_r(u)$，并满足当$\overline{Q}(g_\xi) = 0$ 时，$\sigma_r(\{g_\xi\}) = 0$；当$\overline{Q}(g_\xi) \neq 0$ 时，下述条件之一成立：

(i) $r(\lambda)$ 在 g_ξ 处有非切极限 $r(g_\xi)$ 且$\underline{Q}(g_\xi) - r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi) \neq 0$；

(ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(u-g_\xi)^2} d\sigma_r(u) = +\infty$.

证明 首先假设 $r(\lambda) \in N[a,b]$ 且有表示

$$r(\lambda) = \int_a^b \frac{d\sigma_r(u)}{u - \lambda}.$$

下证由

$$\Phi(\lambda) \equiv \int_a^b \frac{d\tau(u)}{u - \lambda} = -\frac{\underline{P}(\lambda) - r(\lambda)\overline{P}(\lambda)}{\underline{Q}(\lambda) - r(\lambda)\overline{Q}(\lambda)} \tag{4.2}$$

唯一确定的分布函数 $\tau(u)$ 是满足约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题的解. 当对某个 ξ，$\overline{Q}(g_\xi) \neq 0$ 时，用引理 2.2 知：若 $r(\lambda)$ 满足条件(i)，则

$$-\tau(\{g_\xi\}) = \lim_{\lambda \to g_\xi} (\lambda - g_\xi)\Phi(\lambda) = 0;$$

若 $r(\lambda)$ 满足条件(ii)，如果 $\sigma_r(\{g_\xi\}) \neq 0$，则 $\lim_{\lambda \to g_\xi} r(\lambda) = \infty$，于是 $\Phi(g_\xi) = -\dfrac{\overline{P}_{(g_\xi)}}{\overline{Q}_{(g_\xi)}}$，因而 $\overline{Q}_{(g_\xi)} \neq 0$ 蕴涵着 $\tau(\{g_\xi\}) = 0$. 如果 $\sigma_r(\{g_\xi\}) = 0$，我们仍有 $\tau(\{g_\xi\}) = 0$. 否则的话，设如果 $\sigma_r(\{g_\xi\}) \neq 0$，但由于

$$\lim_{\lambda \to g_\xi} (\lambda - g_\xi)(\underline{P}(\lambda) - r(\lambda)\overline{P}(\lambda)) = -\overline{P}(g_\xi)\sigma_r(\{g_\xi\}) = 0,$$

于是我们推出 $\lim_{\lambda \to g_\xi}(\underline{Q}(\lambda) - r(\lambda)\overline{Q}(\lambda)) = 0$，因此，$r(\lambda)$ 在 g_ξ 处有非切极限

$$r(g_\xi) = \lim_{\lambda \to g_\xi} r(\lambda) = \frac{\underline{Q}(g_\xi)}{\overline{Q}(g_\xi)} \in \mathrm{R}.$$

由于

$$-\tau_N(\{g_\xi\}) = \lim_{\lambda \to g_\xi} (\lambda - g_\xi)\Phi_N(\lambda) = \frac{\overline{P}(g_\xi)\underline{Q}(g_\xi) - \underline{P}(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)}{[\overline{Q}(g_\xi)]^2} \lim_{\lambda \to g_\xi} \frac{\lambda - g_\xi}{r(\lambda) - \dfrac{\underline{Q}(g_\xi)}{\overline{Q}(g_\xi)}} \neq 0,$$

那么 $r(\lambda) - \dfrac{\underline{Q}(g_\xi)}{\overline{Q}(g_\xi)}$ 在 g_ξ 处有非切极限且非零. 因此

$$\frac{r(\lambda) - r(g_\xi)}{\lambda - g_\xi} = \frac{r(\lambda) - \dfrac{\underline{Q}(g_\xi)}{\overline{Q}(g_\xi)}}{\lambda - g_\xi}$$

在g_ξ处有实的非切极限.综上,我们证明了$r(\lambda)$在g_ξ处有实的非切极限且有一阶角导数.由引理2.1得

$$\int_a^b \frac{1}{(u-g_\xi)^2}\mathrm{d}\sigma_r(u) < +\infty, \tag{4.3}$$

这与(ii)矛盾.

下面我们讨论对某个ξ,$\overline{Q}(g_\xi)=0$的情形.我们将证明$\tau(\{g_\xi\})=0$.由$\overline{Q}(g_\xi)=0$推出$\underline{Q}(g_\xi)\neq 0$和$\sigma_r(\{g_\xi\})=-\lim_{\lambda\to g_\xi}(\lambda-g_\xi)r(\lambda)=0$,因此,由引理2.2得

$$\begin{aligned}-\tau(\{g_\xi\}) &= \lim_{\lambda\to g_\xi}(\lambda-g_\xi)r(\lambda)\\ &= \lim_{\lambda\to g_\xi}\frac{(\lambda-g_\xi)\underline{P}(\lambda)-(\lambda-g_\xi)r(\lambda)\overline{P}(\lambda)}{\underline{Q}(\lambda)-(\lambda-g_\xi)r(\lambda)\dfrac{\overline{Q}(\lambda)-\overline{Q}(g_\xi)}{\lambda-g_\xi}}\\ &= \frac{\sigma_r(\{g_\xi\})\overline{P}(g_\xi)}{\underline{Q}(g_\xi)-\sigma_r(\{g_\xi\})\overline{Q}'(g_\xi)}=0\end{aligned}$$

反过来,假设$\tau(u)$,$(a\leqslant u\leqslant b)$是带约束条件(1.6)的Hausdorff矩量问题(1.5)的一个解,我们证明(4.1)中的$r(\lambda)$满足定理中的条件.设$r(\lambda)\neq 0$且对某个ξ,$\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$.下证对此$\xi$,若$r(\lambda)$不满足(i),则一定满足(ii).否则,对此$\xi$,有(4.3)成立.因此$\sigma_r(\{g_\xi\})=-\lim_{\lambda\to g_\xi}(\lambda-g_\xi)r(\lambda)=0$.由于$\overline{Q}(g_\xi)\neq 0$,$\underline{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{Q}(g_\xi)=0$($\underline{P}(g_\xi)-r(g_\xi)\overline{P}(g_\xi)\neq 0$)和

$$\tau(\{g_\xi\})=-\lim_{\lambda\to g_\xi}(\lambda-g_\xi)\Phi(\lambda)=-\lim_{\lambda\to g_\xi}\frac{\underline{P}(\lambda)-r(\lambda)\overline{P}(\lambda)}{\underline{Q}(\lambda)-r(\lambda)\overline{Q}(\lambda)}(\lambda-g_\xi)=0$$

于是我们有

$$\lim_{\lambda\to g_\xi}\frac{r(g_\xi)-\dfrac{\underline{Q}(\lambda)}{\overline{Q}(\lambda)}}{\lambda-g_\xi}=\infty.$$

因此

$$\lim_{\lambda\to g_\xi}\frac{r(g_\xi)-\dfrac{\underline{Q}(\lambda)}{\overline{Q}(\lambda)}}{\lambda-g_\xi}=\lim_{\lambda\to g_\xi}\frac{r(\lambda)-r(g_\xi)}{\lambda-g_\xi}=\infty,$$

这与$r(\lambda)$在g_ξ处有一阶实的角导数矛盾.

最后证对某个ξ,$\overline{Q}(g_\xi)=0$的情形.我们要证$\sigma_r(\{g_\xi\})=0$,其中的$r(\lambda)$由(4.2)给出,用反证法.若对此ξ,我们有$\sigma_r(\{g_\xi\})=-\lim_{\lambda\to g_\xi}(\lambda-g_\xi)r(\lambda)\neq 0$.因$r(g_\xi)\neq 0$,所以

$$\tau(\{g_\xi\})=-\frac{\sigma_r(\{g_\xi\})\overline{P}(g_\xi)}{\underline{Q}(g_\xi)-\sigma_r(\{g_\xi\})\overline{Q}'(g_\xi)}\neq 0,$$

其中$\overline{P}(g_\xi)\neq 0$,$\underline{Q}(g_\xi)-\sigma_r(\{g_\xi\})\overline{Q}'(g_\xi)$有限.上式与(1.6)矛盾.至此,定理证毕.

由定理3.1和4.1以及[7]的相关结论,我们由相关的带约束条件(1.6)的Hausdorff矩量问题的解给出BNP($N[a,b]$)问题多解时通解的参数化描述.

定理4.2 BNP($N[a,b]$)问题的Hankel向量$\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$在$[a,b]$上是严格正的(即矩阵$(h_{i+k+1}-ah_{i+k})_{i,k=0}^{n-1}$与$(bh_{i+k}-h_{i+k+1})_{i,k=0}^{n-1}$是Hermite正定的),那么BNP($N[a,b]$)问题的解$F(\lambda)$可以用线性分式变换的方式表达如下:

$$F(\lambda)=\omega(\lambda)-\frac{a(\lambda)\underline{P}(\lambda)-a(\lambda)r(\lambda)\overline{P}(\lambda)}{\underline{Q}(\lambda)-r(\lambda)\overline{Q}(\lambda)},$$

其中 $\underline{Q}(\lambda),\overline{Q}(\lambda),\underline{P}(\lambda)$ 与 $\overline{P}(\lambda)$ 由(3.10)与(3.11)所给，$\omega(\lambda),a(\lambda)$ 如前，$r(\lambda)$ 遍历 $N[a,b]\cup\{\infty\}$，其取法如定理 4.1 所述.

最后讨论确定(唯一)情形. 由[7]引理3知，如果 BNP ($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 在 $[a,b]$ 上是奇异非负的(即矩阵 $(h_{i+k+1}-ah_{i+k})_{i,k=0}^{n-1}$ 与 $(bh_{i+k}-h_{i+k+1})_{i,k=0}^{n-1}$ 是 Hermite 非负定的，且有一个是奇异的)且 $h_0>0$，令 $r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$，那么相关的带约束条件 (1.6)的 Hausdorff 矩量问题有唯一解 $\tau(u)(a\leqslant u\leqslant b)$ 且由下式唯一确定：

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}\tau(u)}{\lambda-u}=\frac{C_r(\lambda)}{D_r(\lambda)},$$

其中 $C_r(\lambda),D_r(\lambda)$ 分别由(3.9)和(3.8)式给出.

因此，我们通过 BNP ($N[a,b]$) 问题与相关的带约束条件 (1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)解集之间的一一对应以及 Stieltjes 逆公式(见[4,p. 390])：

$$\sigma_F(t_2)-\sigma_F(t_1)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{Im}F(x+i\varepsilon)\mathrm{d}x$$

唯一确定出矩量问题的唯一解 $\tau(u)(a\leqslant u\leqslant b)$. 并且，边界点 $g_1,\cdots,g_\rho$ 均不是分布函数 $\tau(u)$ 的质点，即 $\tau(\{g_\xi\})=0(\xi=1,\cdots,\rho)$ 当且仅当 $D_r(g_\xi)\neq 0,\xi=1,\cdots,\rho$.

由定理 3.1 和 3.2 以及文献[9]的相关分析，我们得出 BNP ($N[a,b]$) 问题的唯一解，进而得出相关的带约束条件 (1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)唯一解的结果.

定理 4.3 (1)如果 BNP ($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 在 $[a,b]$ 上是奇异非负的，那么当 $h_0=0$ 时，BNP ($N[a,b]$) 问题的唯一解是 $\omega(\lambda)$，它是一个次数不大于 1 的多项式；当 $h_0>0$ 并且 $D_r(\lambda)$ 满足 $D_r(g_\xi)\neq 0,\xi=1,\cdots,\rho,r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ 时，BNP ($N[a,b]$) 问题有唯一解 $F(\lambda)$ 可表示为：

$$F(\lambda)=\omega(\lambda)-\frac{a(\lambda)C_r(\lambda)}{D_r(\lambda)},$$

其中 $C_r(\lambda),D_r(\lambda)$ 分别由(3.9)和(3.8)给出.

(2)设带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量为 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$，且在 $[a,b]$ 上是奇异非负的，那么当 $h_0=0$ 时，该矩量问题只有唯一的零 $\tau(u)=0$；当 $h_0>0$ 时，带约束条件 (1.6)的 Hausdorff 矩量问题的唯一解 $\tau(u)$ 可由

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}\tau(u)}{\lambda-u}=\frac{C_r(\lambda)}{D_r(\lambda)}$$

以及 Stieltjes 逆公式唯一确定出，其中 $C_r(\lambda),D_r(\lambda)$ 分别由(3.9)和(3.8)式给出，并且 $D_r(\lambda)$ 满足 $D_r(g_\xi)\neq 0,r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1},\xi=1,\cdots,\rho$.

参考文献：

[1] NUDELMAN A A. *A multipoint matrix moment problem* [J]. Soviet Math. Dokl., 1988, **37**: 167—170.

[2] SARASON D. *Nevanlinna-Pick interpolation with boundary data* [J]. Integral Equations and Operator

Theory, 1998, **30**: 231—250.

[3] CHEN Gong-ning, HU Yong-jian. *Multiple Nevanlinna—Pick interpolation with both interior and boundary data and its connection with the power moment problem* [J]. Linear Algebra and Appl., 2001, **323**: 167—194.

[4] KREIN M G, NUDELMAN A A. *The Markov Moment Problem and Extremal Problems* [M]. Transl. Math. Monographs 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[5] CHEN Gong-ning, ZHAO Bing, ZHANG Hui-ping. *The general rational interpolation problem in the scalar case and its Hankel vector* [J]. Linear Algebra Appl., 1996, **244**: 165—201.

[6] KREIN M G. *The description of all solutions of the truncated power moment problem and some problems of operator theory* [J]. Mat. Issled., 1967, **2**: 114—132; English transl., Amer. Math. Soc. transl., 1970, **95**(2): 219—234.

[7] 吴化璋,陈公宁. $N[a,b]$类中 Nevanlinna-Pick 插值与 Hausdorff 矩量问题 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2002, **38**(3): 316—323.
WU Hua-zhang, CHEN Gong-ning. *The Nevanlinna-Pick interpolation in the class $N[a,b]$ and the Hausdorff moment problem* [J]. Journal of Beijing Normal University (Nat. Sci.), 2002, **38**(3): 316—323. (in Chinese)

The Boundary Nevanlinna-Pick Interpolation In the Class $N[a,b]$

WU Hua-zhang[1,2]

(1. Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230049, China;
2. Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: We solve the BNP ($N[a,b]$) problem and establish one-to-one correspondence between the solutions to the BNP ($N[a,b]$) problem and the solutions to the Hausdorff moment problem with a constrain by using the so-called Hankel vector approach. This enables one to obtain the solvability criteria and the parametrized description of the BNP ($N[a,b]$) problem by those of the Hausdorff moment problem when there exist infinite solutions, and the situation is opposite when there exists exactly one solution.

Key words: $N[a,b]$ class; BNP ($N[a,b]$) problem; Hausdorff moment problem; angle derivative.