第 24 卷第 1 期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 24 No. 1
2004 年 2 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2004

$I(L)$ 型诱导空间的可数性*

刘 智 斌， 赵 彬
（陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西 西安 710062）

摘 要：本文证明了 (L^X,δ) 与其 $I(L)$ 型诱导空间 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 的权，特征，浓度，Lindelöf 度相等，(L^X,δ) 为 Lindelöf 空间当且仅当 $(I(L)^X,\sigma(\delta))$ 为 Lindelöf 空间，且给出了 (L^X,δ) 与 $(I(L^X),\omega(\delta))$ 的稠密集，稀疏集，第一纲集，第二纲集，Baire 性质之间的关系.

关键词：$I(L)$ 型诱导空间；权；特征；浓度；Lindelöf 度.
分类号：AMS(2000) 54D30，06D10/CLC number：O175.8
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)01-0134-05

诱导空间在模糊拓扑学的研究中占有重要的地位. 文[1]，[2] 引入了 $I(L)$ 型诱导空间，并且讨论了它的一系列基本性质，尤其对它的良紧性得到了非常漂亮的结果[1]. 本文讨论了 (L^X,δ) 与其 $I(L)$ 型诱导空间 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 的权，特征，浓度，Lindelöf 度，胞腔度等之间的关系.

一个 L-fuzzy 拓扑空间 (L^X,δ) 的 $I(L)$ 型诱导空间是一个对 $(I(L)^X,\omega(\delta))$，其中 $\omega(\delta)=\{\mu\in I(L)^X:\sigma_t(\mu)\in\delta,t\in I\}$，$\sigma_t(\mu)=R_t\circ\mu=\mu(t+)=\vee\{\mu(s):s>t\}$，$\omega_t(\mu)=L_t\circ\mu=\mu(t-)=\wedge\{\mu(s):s<t\}$.

$$\forall\, t\in I,\alpha\in L,\text{令 }\lambda_{\alpha,t}(s+)=\begin{cases}1, & s<0,\\ \alpha, & 0\leqslant s<t,\\ 0, & t\leqslant s.\end{cases}$$

本文仅考虑权 (W)，特征 (χ)，浓度 (d) 均 $\geqslant\omega$ 的情形，其中 ω 表示第一无限基数. 其它一些基本概念与符号参见文[1,2,3,4].

引理 1[2] 设 $\lambda\in I(L)$，则 λ 是 $I(L)$ 中的分子当且仅当存在 $\alpha\in M(L)$ 和 $t\in L$，使 $\lambda=\lambda_{\alpha,t}$.

定义 1[2] 映射 $*:L^X\to I(L)^X$ 如下：

$$\forall\,\gamma\in L^X,x\in X,\quad \gamma^*(x)(t+)=\begin{cases}1, & t<0,\\ \gamma(x), & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t\geqslant 1,\end{cases}$$

* 收稿日期：2001-12-10
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271069)；高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目(教人司[2000] 26 号)
作者简介：刘智斌(1965-)，博士研究生，副教授.

映射 $\hat{t}:X \to I(L)$ 如下：

$$\forall x \in X,\quad \hat{t}(x)(s+) = \begin{cases} 1, & s < t, \\ 0, & s \geqslant t. \end{cases}$$

引理 2　任取 $\lambda \in I(L)$，则 $\lambda(t+) = \bigvee_{s>t,s\in Q} \lambda(s)$，$\lambda(t-) = \bigwedge_{s<t,s\in Q} \lambda(s)$.

证明　$\lambda(t+) = \bigvee_{s>t} \lambda(s) \geqslant \bigvee_{s>t,s\in Q} \lambda(s)$. 反过来，$\forall\, s \in I, s > t$，则存在 $s_0 \in (t,s), s_0 \in Q$，有 $\lambda(s_0) \geqslant \lambda(s)$. 故 $\bigvee_{s>t,s\in Q} \lambda(s) \geqslant \bigvee_{s>t} \lambda(s)$，所以 $\lambda(t+) = \bigvee_{s>t,s\in Q} \lambda(s)$.

同理可证 $\lambda(t-) = \bigwedge_{s<t,s\in Q} \lambda(s)$.

定义 2　$\forall\, \mu \in L^X, x \in X, t \in I$，定义映射 $\Delta t: L^X, \to I(L)^X$ 如下：

$$\mu^{\Delta t}(x)(s+) = \begin{cases} 1, & s < 0, \\ \mu(x), & 0 \leqslant s < t, \\ 0, & s \geqslant t. \end{cases}$$

引理 3　设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，若 $\mu \in \delta$，则 $\mu^{\Delta t} \in \omega(\delta)$.

引理 4　设 $A \in I(L)^X$，则 $A = \bigvee_{t\in I,t\in Q} (\sigma_t(A))^{\Delta t}$.

证明　$\forall\, x \in X, s \in I$，由引理 2 知只须证 $A = \bigvee_{t\in I} (\sigma_t(A))^{\Delta t}$. 由于 $\bigvee_{t\in I} (\sigma_t(A))^{\Delta t}(x)(s+)$ $= \bigvee_{t>s} (\sigma_t(A))^{\Delta t}(x)(s+) = \bigvee_{t>s} \sigma_t(A)(x) = \bigvee_{t>s} A(x)(t+) = \bigvee_{t>s} \bigvee_{r>t} A(x)(r) = \bigvee_{r>s} A(x)(t) =$ $A(x)(s+)$. 所以 $A = \bigvee_{t\in I,t\in Q} (\sigma_t(A))^{\Delta t}$.

定理 1　设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，则 $W(L^X, \delta) = W(I(L)^X, \omega(\delta))$.

证明　先证 $W(L^X, \delta) \leqslant W(I(L)^X, \omega(\delta))$. 设 $W(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$，则存在 $\omega(\delta)$ 的基 Ψ 且 $|\Psi| \leqslant k$. 取 $t \in I$，令 $\Phi = \{\sigma_t(B): B \in \Psi\}$，则 $|\Phi| \leqslant k$ 且 $\Phi \subset \delta$. 现证 Φ 即为 δ 的基. 事实上，$\forall\, \mu \in \delta$，由文[2]定理 1.5 知 $\mu^* \in \omega(\delta)$，则存在 $\Psi_\mu \subset \Psi$ 使得 $\mu^* = \bigvee \Psi_\mu$. 令 $\Phi_\mu = \{\sigma_t(A): A \in \Psi_\mu\}$，由文[2]定理 1.4 知 $\mu = \sigma_t(\mu^*) = \sigma_t(\bigvee \Psi_\mu) = \bigvee \{\sigma_t(A): A \in \Psi_\mu \subset \Psi\} = \bigvee \Phi_\mu$，即 Φ 为 δ 的基. 所以 $W(L^X, \delta) \leqslant k$，进而知 $W(L^X, \delta) \leqslant W(I(L)^X, \omega(\delta))$.

现证 $W(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant W(L^X, \delta)$. 设 $W(L^X, \delta) \leqslant k$，则存在 (L^X, δ) 的基 Φ 且 $|\Phi| \leqslant k$. $\forall\, \mu \in \omega(\delta), t \in I$ 有 $\sigma_t(\mu) \in \delta$，则存在 $\Phi_t \subset \Phi$ 使得 $\sigma_t(\mu) = \bigvee \Phi_t$. 由定义 1 知有 $\sigma_t(\mu)^{\Delta t} = \bigvee \{\beta_{ti}^{\Delta t}: \beta_{ti} \in \Phi_t\}$. 令 $\Psi = \{\beta_{ti}^{\Delta t}: \beta_{ti} \in \Phi_t, t \in I, t \in Q\}$，则 $|\Psi| \leqslant \omega \times k = k$. 现证 Ψ 即为 $\omega(\delta)$ 的基. 由引理 3 知 $\forall\, t \in Q, t \in I, \beta_{ti} \in \Phi$ 有 $\beta_{ti}^{\Delta t} \in \omega(\delta)$，由引理 4 知对于 $\mu \in \omega(\delta)$，$\mu = \bigvee_{t\in I,t\in Q} \sigma_t(\mu)^{\Delta t} = \bigvee_{t\in I,t\in Q} (\bigvee \{\beta_{ti}^{\Delta t}: \beta_{ti} \in \Phi_t\})$，所以 Ψ 构成 $\omega(\delta)$ 的基，故 $W(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$，进而得 $W(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant W(L^X, \delta)$. 综上得 $W(L^X, \delta) = W(I(L)^X, \omega(\delta))$.

定义 3　任取 $\mu \in L^X, x \in X, t \in I$，定义映射 $*t: L^X \to I(L)^X$ 如下：

$$\mu^{*t}(x)(s-) = \begin{cases} 1, & s \leqslant t, \\ \mu(x), & t < s \leqslant 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases}$$

引理 5　设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，任取 $\mu \in \delta', t \in I$ 有 $\mu^{*t} \in \omega(\delta)'$.

定理 2　设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，则 $\chi(L^x, \delta) = \chi(I(L)^X, \omega(\delta))$.

证明　先证 $\chi(L^X, \delta) \leqslant \chi(I(L)^X, \omega(\delta))$. 设 $\chi(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$，$\forall\, x_{\lambda_{a,t}} \in M^*(I(L)^X)$，

$\alpha \in M(L)$，存在 $x_{\lambda_{\alpha,t}}$ 的闭远域基 $\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 使得 $|\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})| \leqslant k$. 取 $A \in \eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$，由 $x_{\lambda_{\alpha,t}} \not\leq A$ 知存在 $s \leqslant t, s \in Q$ 使得 $\omega_s(x_{\lambda_{\alpha,t}})(x) = \alpha \not\leq \omega_s(A)(x)$，即 $x_\alpha \not\leq \omega_s(A) \in \delta'$. 令 $\eta_0(x_\alpha) = \{\omega_s(A): A \in \eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}}), x_\alpha \not\leq \omega_s(A), s \in I, s \in Q\}$. 则 $|\eta_0(x_\alpha)| \leqslant k \times \omega = k$. 现证 $\eta_0(x_\alpha)$ 为 x_α 的闭远域基. 事实上，$\forall\, \beta \in \eta^-(x_\alpha)$，由 $\alpha \not\leq \beta(x)$，有 $\lambda_{\alpha,t} \not\leq \beta^*(x)$. 由文[2]定理1.5知 $\beta^* \in \eta^-(x_{\lambda_{\alpha,t}})$. 由 $\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 为 $x_{\lambda_{\alpha,t}}$ 的闭远域基知有 $A \in \eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 使 $\beta^* \leqslant A$，则 $\forall\, s \in Q, s \in I$ 有 $\beta = \omega_s(\beta^*) \leqslant \omega_s(A) \in \eta_0(x_\alpha)$. 所以 $\eta_0(x_\alpha)$ 为 x_α 的闭远域基，故 $\chi(L^X, \delta) \leqslant k$，进而得 $\chi(L^X, \delta) \leqslant \chi(I(L)^X, \omega(\delta))$.

下证 $\chi(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant \chi(L^X, \delta)$. $\forall\, x_{\lambda_{\alpha,t}} \in M^*(I(L)^X)$. 设 $\chi(L^X, \delta) \leqslant k$，则 x_α 有闭远域基 $\eta_0(x_\alpha)$，且 $|\eta_0(x_\alpha)| \leqslant k$. 令
$\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}}) = \{B^{*r}: B \in \eta_0(x_\alpha), r < t, r \in I, r \in Q\}$，则 $|\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})| \leqslant \omega \times k = k$. 易于验证 $x_{\lambda_{\alpha,t}} \not\leq B^{*r}$，即 $\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 为 $x_{\lambda_{\alpha,t}}$ 的闭远域族. 现证 $\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 为 $x_{\lambda_{\alpha,t}}$ 的闭远域基. 事实上，$\forall\, A \in \eta^-(x_{\lambda_{\alpha,t}})$，有 $\lambda_{\alpha,t} \not\leq A(x)$，则存在 $r \leqslant t, r \in I, r \in Q$ 使得 $\alpha = \lambda_{\alpha,t}(r-) \not\leq A(x)(r-)$，即 $\alpha \not\leq \omega_r(A)(x)$，因此 $\omega_r(A) \in \eta^-(x_\alpha)$. 由 $\eta_0(x_\alpha)$ 为 x_α 的闭远域基知有 $B \in \eta_0(x_\alpha)$ 使得 $\omega_r(A) \leqslant B$. 易于验证 $A \leqslant B^{*r} \in \eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$（引理5）. 所以 $\eta_0(x_{\lambda_{\alpha,t}})$ 为 $x_{\lambda_{\alpha,t}}$ 的闭远域基，由此得 $\chi(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$，进而知 $\chi(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant \chi(L^X, \delta)$.

综上得 $\chi(L^X, \delta) = \chi(I(L)^X, \omega(\delta))$.

定理 3 设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，$(I(L)^X, \omega(\delta))$ 为其 $I(L)$ 型诱导空间，则

(1) $A \in L^X$ 是稠密集当且仅当 $A^* \in I(L)^X$ 是稠密集.

(2) A 是稀疏集当且仅当 A^* 是稀疏集.

证明 (1) 设 A 是 (L^X, δ) 中的稠密集，假设 $(A^*)^- \neq 1$，则存在 $x \in X, t \in I$ 使得 $(A^*)^-(x)(t-) = \omega_t((A^*)^-)(x) \neq 1$. 由文[2]定理1.5知 $\omega_t((A^*)^-) \in \omega(\delta)'$ 且 $\omega_t((A^*)^-) \geqslant \omega_t(A^*) = A$. 故 $A^- \leqslant \omega_t((A^*)^-) \neq 1$，与 A 是稠密集矛盾. 所以 A^* 是 $(I(L)^X, \omega(\delta))$ 中的稠密集.

反之，设 A^* 是 $(I(L)^X, \omega(\delta))$ 中的稠密集. 假设 $A^- \neq 1$，由文[2]定理1.5知 $(A^-)^* \in \omega(\delta)'$ 且 $(A^-)^* \neq 1$，则 $(A^*)^- \leqslant (A^-)^* \neq 1$，矛盾，所以 A 是稠密集.

(2) 类似可证.

定理 4 设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间，则 $d(L^X, \delta) = d(I(L)^X, \omega(\delta))$.

证明 先证 $d(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant d(L^X, \delta)$. 设 $d(L^X, \delta) \leqslant k$，则存在 $A \in L^X, A = \vee \Phi, \Phi \subset M^*(L^X)$，$|\Phi| \leqslant k$ 且 $A^- = (\vee \Phi)^- = 1$. 令 $\Psi = \{x_\alpha^{t\Delta}: x_\alpha \in \Phi, t \in I, t \in Q\}$，则 $|\Psi| \leqslant \omega \times k = k$. 下证 $A^* = \vee \Psi$. 事实上，任取 $x \in X, s \in I$，由引理2知 $(\vee \Psi)(x)(s+) = \vee \{x_\alpha^{t\Delta}(x)(s+): x_\alpha \in \Phi, t \in I, t \in Q\} = \vee \{x_\alpha(x): x_\alpha \in \Phi\} = (\vee \Phi(x)) = A(x)$. 所以 $A^* = \vee \Psi$. 由定理3知 A^* 是 $(I(L)^X, \omega(\delta))$ 中的稠密集，即 $(A^*)^- = 1$，所以 $d(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$.

现证 $d(L^X, \delta) \leqslant d(I(L)^X, \omega(\delta))$. 设 $d(I(L)^X, \omega(\delta)) \leqslant k$，则存在 $B \in I(L)^X, B = \vee \Psi_0$，$\Psi_0 \subset M^*(I(L))$，$|\Psi_0| \leqslant k$ 且 $B^- = (\vee \Psi_0)^- = 1$. 下证 $\forall\, t \in I, \sigma_t(B)$ 即为 (L^X, δ) 的稠密集，假若 $(\sigma_t(B))^- \neq 1$，则 $\forall\, x \in X, s \in I$，令

$$A(x)(s-) = \begin{cases} 1, & s < t, \\ (\sigma_t(B))^-(x), & t \leqslant s < 1, \\ 0, & s \geqslant 1. \end{cases}$$

显然 $A\in\omega(\delta)'$ 且 $B\leqslant A, A\neq 1$，由此得 $B^-\leqslant A\neq 1$，矛盾，所以 $\sigma_t(B)$ 为稠密集. 由文[2]定理1.4知 $\sigma_t(B)=\sigma_t(\vee\Psi_0)=\vee\{\sigma_t(\varphi):\varphi\in\Psi_0\}$，其中 $\sigma_t(\varphi)$ 或为 L^X 中的分子或为零. 所以 $|\sigma_t(B)|\leqslant k$. 由此得 $d(L^X,\delta)=d(I(L)^X,\omega(\delta))$.

定义 4[5,6] 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，令

$$L(L^X,\delta)=\omega\times\min\{k:(L^X,\delta)\text{ 的任一开复盖存在基数}\leqslant k\text{ 的子复盖}\}$$

称它为 (L^X,δ) 的 lindelöf 度.

定理 5 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，则 $L(L^X,\delta)=L(I(L)^X,\omega(\delta))$.

证明 先证 $L(L^X,\delta)\leqslant L(I(L)^X,\omega(\delta))$. 设 $L(I(L)^X,\omega(\delta))\leqslant k$. 取 $\varphi\subset\delta$，$\vee\varphi=1$，令 $\Psi=\{A^*:A\in\varphi\}$，由文[2]定理1.5知 $\Psi\subset\omega(\delta)$ 且 $\vee\Psi=1$. 由 $L(I(L)^X,\omega(\delta))\leqslant k$ 知存在 $\Psi_0\subset\Psi$ 且 $|\Psi_0|\leqslant k$，$\vee\Psi_0=1$. 令 $\varphi_0=\{A:A^*\in\Psi_0\}$，则 $|\varphi_0|\leqslant k$ 且 $\vee\varphi_0=\vee\{\sigma_t(A^*):A^*\in\Psi_0\}=\sigma_t(\vee\Psi_0)=\sigma_t(1)=1$ 以及 $\varphi_0\subset\varphi$. 由此得 $L(L^X,\delta)\leqslant k$，所以 $L(L^X,\delta)\leqslant L(I(L)^X,\omega(\delta))$.

现证 $L(I(L)^X,\omega(\delta))\leqslant L(L^X,\delta)$. 设 $L(L^X,\delta)\leqslant k$，$\Psi\subset\omega(\delta)$ 且 $\vee\Psi=1$，则 $\forall r\in Q$，$0\leqslant r<1$ 有 $\sigma_r(\vee\Psi)=\vee\{\sigma_t(\varphi):\varphi\in\Psi\}=1$. 令 $\Phi_r=\{\sigma_r(\varphi):\varphi\in\Psi\}$，则 Φ_r 为 (L^X,δ) 的开复盖. 由 $L(L^X,\delta)\leqslant k$ 知存在 $\Phi_r^0\subset\Phi_r$ 使得 $\vee\Phi_r^0=1$ 且 $|\Phi_r^0|\leqslant k$. 令 $\Psi_r=\{\varphi:\sigma_r(\varphi)\in\Phi_r^0,\varphi\in\Psi\}$，则 $|\Psi_r|\leqslant k$. 令 $\Psi_0=\bigcup_{r\in I,r\in Q}\Psi_r$，则 $|\Psi_0|\leqslant\omega\times k=k$ 且 $\Psi_0\subset\Psi$，下证 $\vee\Psi_0=1$. 事实上，$\forall t\in I, x\in I$，由引理2知 $\sigma_t(\vee\Psi_0)(x)=(\vee\Psi_0)(x)(t+)=\bigvee_{r\in I}(\vee\Psi_r)(x)(t+)\geqslant(\vee\Psi_t)(x)(t+)=\sigma_t(\vee\Psi_t)(x)=\bigvee_{\sigma_t(\varphi)\in\Phi_t^0}\sigma_t(\varphi)(x)=(\vee\Phi_t^0)(x)=1$. 由此得 $\vee\Psi_0=1$，所以 $L(I(L)^X,\omega(\delta))\leqslant k$，进而得 $L(I(L)^X,\omega(\delta))\leqslant L(L^X,\delta)$. 综上得 $L(L^X,\delta)=L(I(L)^X,\omega(\delta))$.

定义 5[5] 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，$\mathscr{R}\subset\delta\backslash\{0\}$，如果 $\mathscr{R}$ 中任何两个不同元素之交为零，则称 $\mathscr{R}$ 为 (L^X,δ) 的胞腔集族. 令 $C(L^X,\delta)=\omega\cdot\sup\{|\mathscr{R}|:\mathscr{R}\text{ 是 }(L^X,\delta)\text{ 中的胞腔集族}\}$，称它为 (L^X,δ) 的胞腔度.

定理 6 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，则 $C(L^X,\delta)\leqslant C(I(L)^X,\omega(\delta))$.

定理 7 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，则 $A\in L^X$ 为第一纲集当且仅当 $A^*\in I(L)^X$ 为第一纲集.

证明 设 A 是第一纲集，$A=\bigvee_{i=1}^{\infty}A_i$，其中 $(A_i^-)^0=0, i=1,2,\cdots$，由定理3以及文[2]定理1.4知 $A^*=\bigvee_{i=1}^{\infty}A_i^*$，且 A_i^* 为稀疏集. 所以 A^* 是第一纲集. 反之，设 A^* 是第一纲集，则 $A^*=\bigvee_{i=1}^{\infty}B_i$，$B_i$ 为稀疏集. 由文[2]定理1.4知 $A=\sigma_t(A^*)=\bigvee_{i=1}^{\infty}\sigma_t(B_i)$，其中 $\sigma_t(B_i)$ 为稀疏集，这是因为若 $(\sigma_t(B_i)^-)^0=C_i\neq 0$，则 $C_i\leqslant\sigma_t(B_i)^-$，而 $\sigma_t(B_i)\leqslant\sigma_t(B_i^-)\leqslant\omega_t(B_i^-)\in\delta'$，故 $C_i\leqslant\sigma_t(B_i^-)\leqslant\omega_t(B_i^-)$. 易于验证 $C_i^*\in\omega(\delta)$ 且 $C_i^*\leqslant B_i^-$，即 $(B_i^-)^0\geqslant C_i^*\neq 0$，与 B_i 为稀疏集矛盾. 故 $\sigma_t(B_i)$ 为稀疏集. 所以 A 是第一纲集.

定理 8 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，则 (L^X,δ) 为 Lindelöf 空间当且仅当 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 为 Lindelöf 空间.

证明 设 (L^X,δ) 是 Lindelöf 空间. 设 Ψ 是 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 的 $\lambda_{a,t}$- 远域族 $(\alpha\in M(L))$，对

任意的高为 $\lambda_{a,t}$ 的分子 $x_{\lambda_{a,t}}$，存在 $\varphi\in\Psi$ 使得 $x_{\lambda_{a,t}}\not\leq\varphi$. 则存在 $s<t$ 使得 $\omega_s(x_{\lambda_{a,t}})=x_a\not\leq\omega_s(\varphi)$ 为闭集. 令 $\Phi=\{\omega_s(\varphi):\varphi\in\Psi,s\in I\}$，则 Φ 构成 (L^X,δ) 的 a- 远域族. 由于 (L^X,δ) 是 Lindelöf 空间，Φ 有可数子族 Φ_0 构成 a- 远域族. 令 $\Psi_0=\{\varphi:\omega_s(\varphi)\in\Phi_0,\varphi\in\Psi\}$，易知 Ψ_0 为 Ψ 的可数子族且为 $\lambda_{a,t}$- 远域族. 所以 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 为 Lindelöf 空间.

反之，设 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 为 Lindelöf 空间. 设 Φ 是 (L^X,δ) 的 a- 远域族 $(a\in M(L))$. 令 $\Psi=\{\varphi^*:\varphi\in\Phi\}$. 易于验证，$\forall\, t\in I$，$\Psi$ 是 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 的 $\lambda_{a,t}$- 远域族. 由于 $(I(L)^X,\omega(\delta))$ 为 Lindelöf 空间，Ψ 有可数子族 Ψ_0 构成 $\lambda_{a,t}$- 远域族. 令 $\Phi_0=\{\varphi:\varphi^*\in\Psi_0\}$，则对任意 $x_{\lambda_{a,t}}\in M(I(L)^X)$，存在 $\varphi^*\in\Psi_0$ 使得 $x_{\lambda_{a,t}}\not\leq\varphi^*$，则知存在 $s<t$，使得 $a=\omega_s(x_{\lambda_{a,t}})(x)\not\leq\omega_s(\varphi^*)(x)=\varphi(x)$，即 $x_a\not\leq\varphi$. 所以 $\Phi_0\subset\Phi$ 为 (L^X,δ) 的可数远域族，故 (L^X,δ) 为 Lindelöf 空间.

参考文献：

[1] 王戈平. $I(L)$型诱导空间与良紧性 [J]. 科学通报，1989，**35**(5)：333—335.
WANG Ge-ping. *Induced $I(L)$-fuzzy topological spaces and N-compactness* [J]. Chinese Science Bulletin, 1989, **35**(5): 333—335. (in Chinese)

[2] WANG Ge-ping. *Induced $I(L)$-fuzzy topological spaces* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **43**: 69—80.

[3] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，1988.
WANG Guo-jun. *L-fuzzy Topological Spaces* [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1988.

[4] 赵 彬. 诱导空间的权，特征与浓度 [J]. 科学通报，1990，**35**(8)：569—571.
ZHAO Bin. *Weight, characteristic and density of induced spaces* [J]. Chinese Science Bulletin, 1990, **35**(8): 569—571. (in Chinese)

[5] 赵 彬. 诱导空间的网权，Lindelöf 度与胞腔度 [J]. 陕西师范大学学报，1991，**19**(1)：1—4.
ZHAO Bin. *Net weight, Lindelöf degree and cellularity of indeuced spaces* [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 1991, **19**(1): 1—4. (in Chinese)

[6] 王国俊. 格值下半连续函数 [J]. 陕西师范大学学报，1988，**16**(4)：1—7.
WANG Guo-jun. *Lattice-valuer Lower semicontinuous functions* [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 1988, **16**(4): 1—7. (in Chinese)

The Countability of Induced $I(L)$ -fuzzy Topological Spaces

LIU Zhi-bin,　ZHAO Bin

(College of Math. & Information Sci., Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: In this paper, we prove that the weight, character, density, and Lindelöf degree of (L^X,δ) are equal with those of $(I(L)^X,\omega(\delta))$, and that (L^X,δ) is a Lindelöf space if and only if $(I(L)^X,\omega(\delta))$ is a Lindelöf space. We also compare (L^X,δ) and $(I(L)^X,\omega(\delta))$ in respects of the dense set, nowhere dense set, first category set, second category set and Baire property, respectively.

Key words: induced $I(L)$ -fuzzy topological spaces; weight; character; density; Lindelöf degree.