第 24 卷第 1 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 1
2004 年 2 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2004

Banach 空间中一类 K 正定算子方程的可解性及其迭代构造*

高改良，　周海云
(军械工程学院应用数学与力学研究所，河北 石家庄 050003)

摘　要：设 X 为 Banach 空间，$A: D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K—正定算子满足 $D(A)=D(K)$，则存在常数 $\beta>0$，$\forall\ x\in D(A)$，$\|Ax\|\le\beta\|Kx\|$，而且方程 $Ax=f(\forall\ f\in X)$ 有唯一解. 设 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ 为 $[0,1]$ 中实数列，定义迭代序列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 如下：

$$\begin{cases} x_0\in D(A), \\ x_{n+1}=x_n+c_n y_n, & n\geqslant 0, \\ y_n=K^{-1}f-K^{-1}Ax_n, & n\geqslant 0, \end{cases}$$

则 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 强收敛于方程 $Ax=f$ 的唯一解.

关键词：K-正定算子；可闭算子；可解性；迭代构造.
分类号：AMS(2000) 47H09, 47H10/CLC number：O177.91
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)01-0149-06

1　引言与预备知识

设 H 为 Hilbert 空间，H_1 为 H 的一个稠密子空间，称算子 $A: D(A)\supseteq H_1\to H$ 为连续 H_1- 可逆的是指 $\overline{R(A)}=H$ 且 A 在 $R(A)$ 上有一个有界逆 A^{-1}. 称线性无界算子为 $A: D(A)\subset H\to H$ 为 K- 正定的，如果 $\overline{D(A)}=H$，存在一个连续 $D(A)$- 可逆的闭线性算子 $K: D(A)\subseteq D(K)$ 以及常数 $C>0$ 使得

$$(Au,Ku)\geqslant C\|Ku\|^2,\forall\ u\in D(A). \tag{1}$$

明显地，K-正定算子类包含正定算子与可逆算子作为其子类(分别取 $K=I$ 与 A). Petryshyn[8] 指出，适当地选取 K，奇数阶微分算子和弱椭圆偏微分算子可纳入 K-正定算子类，而且当 K-正定算子有界而 K 本身亦为正定算子时，K-正定算子类形成对称算子的一个子类(见[8, P. 149 Lemma 1.5]和[9]).

Petryshyn[8] 在一个复可分 Hilbert 空间中研究了算子方程证明了下面的结果.

定理 P　设 H 为复可分 Hilbert 空间，$A: D(A)=D(K)\subset H\to H$ 为 K-正定算子，则存

---

* 收稿日期：2001-08-31
作者简介：高改良(1965-)，硕士，副教授.

在常数 $\theta>0$ 使得

$$\| Au \| \leqslant \theta \| Ku \|, \quad \forall\, u \in D(K), \tag{2}$$

而且,算子 A 为闭算子,$R(A)=H$,$\forall\, f\in H$,方程 $Au=f$ 有唯一解.

最近,Chidume 和 Aneke[2]扩展 K-正定算子的概念到实可分 Banach 空间,并证明了一个类似于定理 P 的结果.

定理 CA 设 E 为实可分的 Banach 空间,其共轭空间 E^* 为严格凸的. 设 $A: D(A)=D(K)\subset E\to E$ 为 K- 正定算子. 假设 $\forall\, x,y\in D(A)$,

$$\langle Ax, j(Ky)\rangle = \langle Kx, j(Ay)\rangle, \tag{3}$$

则存在常数 $\alpha>0$ 使得 $\forall\, x\in D(A)$,有

$$\| Ax \| \leq \alpha \| Kx \|, \tag{4}$$

而且,算子 A 为闭算子,$R(A)=E$,$\forall\, h\in E$,方程 $Ax=h$ 有唯一解.

我们立刻注意到,在定理 CA 的证明中,可分的假设并未用到;在 $D(K)$中引入广义对偶并非必需;条件(3)即使是在实 Hilbert 空间亦未必成立.

本文目的是在任意 Banach 空间中研究算子方程 $Au=f$ 的可解性及其解的迭代构造问题,所得结果从本质上推广了 Petryshyn[8],Chidume 和 Aneke[2],Moore[7]以及 Chidume 和 Osilike[3]等相应结果.

设 X 为 Banach 空间,X^* 为其共轭空间. 正规对偶映象 $J: X\to 2^{X^*}$ 定义为

$$Jx = \{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\langle x, x^*\rangle = \| x^* \|^2 = \| x \|^2\},$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 X 与 X^*之间的广义对偶组,而 Re 代表实部.

定义[2] 设 X 为 Banach 空间,$A: D(A)\subseteq X\to X$ 为线性无界算子,$\overline{D(A)}=X$,称 A 为 K-正定的,如果存在一个连续 $D(A)$-可逆的闭线性算子 $K: D(K)\supseteq D(A)\to X$ 和常数 $c>0$ 使得对 $u\in D(A)$,有某 $j(Ku)\in J(Ku)$满足不等式

$$\langle Au, j(Ku)\rangle \geqslant c\| Ku \|^2. \tag{5}$$

称算子 $A: D(A)\subset X\to X$ 为可闭的,若$\forall\, \{x_n\}\subset D(A)$,$x_n\to\theta$ 和 $Ax_n\to h$,则 $h=\theta$. 称 $A: D(A)\subset X\to X$ 为闭算子,如果$\forall\, \{x_n\}\subset D(A)$,$x_n\to x$ 和 $Ax_n\to f$,必有 $x\in D(A)$与 $Ax=f$.

对于线性算子而言,闭算子一定是可闭的,但反之不真. 如果算子 A 的定义域 $D(A)$为闭的,则二者等价. Petryshyn[8]证明复可分 Hilbert 空间中的 K-正定算子是可闭的;Chidume 和 Aneke[2]证明满足条件(3)的-正定算子是可闭的.

为证本文主要结果,我们需要下面引理. 以下恒设 X 为 Banach 空间.

引理 1 设 $A: D(A)\subset x\to X$ 为 K 正定算子,$D(A)=D(K)$,则 $R(K)=X$.

证明 因 K 为连续 $D(A)$-可逆的闭线性算子,故$\overline{R(K)}=X$. 设 $y\in X$ 任意给定,则存在$\{x_n\}\subset D(K)=D(A)$,使得 $Kx_n\to y(n\to\infty)$. 而 K 在 $R(K)$上具有有界逆,即存在 $r>0$,使得 $\| K^{-1}x \|\leqslant r\| x \|$,$\forall\, x\in R(K)$,从而 $\| x \|\leqslant r\| Kx \|$,$\forall\, x\in D(K)$,这推出$\{x_n\}$为 Cauchy 列. 设 $x_n\to x(n\to\infty)$,又 K 为闭算子,故 $x\in D(K)$且 $Kx=y\in R(K)$,这表明 $R(K)=X$.

引理 2 设 $A: D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K-正定算子,则存在常数 $\beta>0$ 使得:

$$\| Ax \| \leqslant \beta\| Kx \|, \quad \forall\, x \in D(A) = D(K).$$

证明 在 $D(K)$内引入范数 $\|\cdot\|_K$, $\| x \|_K \overset{\triangle}{=} \| Kx \|$,$\forall\, x\in D(K)$,则 $(D(K), \|\cdot\|_K)$ 为 Banach 空间. 事实上,设为$\{x_n\}_{n\geqslant 0}\subset D(K)$ 为 Cauchy 列,即 $\| x_n - x_m \|_K \to 0(m,n\to$

∞)，由定义知，$\| Kx_n - Kx_m \| \to 0(m,n\to\infty)$，这表明$\{Kx_n\}_{n\geq 0}$为 Cauchy 列. 设 $Kx_n \to y(n\to\infty)$. 因 K 具有有界逆，故$\{x_n\}$ 亦为 Cauchy 列. 设 $x_n \to x(n\to\infty)$. 又 K 为闭算子，故 $x\in D(K)$ 且 $Kx=y$，从而有

$$\| x_n - x \|_K = \| K(x_n - x) \| = \| Kx_n - Kx \| \to 0(n\to\infty).$$

这表明$\{x_n\}_{n\geq 0}$按范数 $\|\cdot\|_K$ 在 $D(K)$中收敛，故$(D(K),\|\cdot\|_K)$为完备的赋范线性空间. 因 $A:D(K)\to X$ 为可闭的，故 $A:D(K)\to X$ 为闭算子. 由闭图象定理知，A 为连续算子，即存在常数 $\beta>0$ 使得 $\| Ax\| \leqslant \beta \| Kx \|$，$\forall\, x\in D(K)$，从而有

$$\| Ax \| \leqslant \beta \| Kx \|, \quad \forall\, x\in D(K)=D(A).$$

引理 3 设 $A:D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K-正定算子，$D(A)=D(K)$，则 $A:D(A)\to X$ 为闭算子.

证明 设$\{x_n\}\subset D(A)$，$x_n\to x$ 且 $Ax_n\to y(n\to\infty)$，要证 $x\in D(A)$且 $Ax=y$.

由 K-正定算子的定义知，$\forall\, x\in D(A)=D(K)$有

$$\| Ax \| \geqslant c \| Kx \|. \tag{6}$$

(6)式表明$\{Kx_n\}_{n\geq 0}$为 Cauchy 列. 设 $Kx_n\to f(n\to\infty)$，因 K 为闭算子，故 $x\in D(K)=D(A)$且 $Kx=f$. 由引理 2 知，$\| Ax_n - Ax \| \leqslant \beta \| Kx_n - Kx \| \to 0(n\to\infty)$，从而 $Ax=y$.

引理 4 设 $A:D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K-正定算子，$D(A)=D(K)$，则 $R(A)=X$，从而 $\forall\, f\in X$，方程 $Ax=f$ 有唯一解.

证明 由引理 1 知 $K:D(K)\to X$ 是满射的，而 K 在 $R(K)=X$ 上具有有界逆，从而 $K:D(K)\to K$ 也是一对一的. 因此 $K:D(K)=D(A)\to X$ 为一一对应，故 $K^{-1}:X\to D(K)$是定义在全空间 X 上线性算子，从而 $AK^{-1}:X\to X$ 也是定义在全空间 X 上线性算子. 另一方面，因 A 为 K-正定的，故存在常数 $c>0$ 使得$\forall\, x\in D(A)$，存在某 $j(Kx)\in J(Kx)$满足

$$\langle Ax, j(Kx)\rangle \geqslant c \| Kx \|^2. \tag{7}$$

在(7)中令 $x=K^{-1}y$，$y\in X$ 得

$$\langle AK^{-1}y, j(y)\rangle \geqslant c \| y \|^2. \tag{8}$$

(8)式表明 $AK^{-1}:X\to X$ 为强增生线性算子. 由引理 2 知，存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\| Ax \| \leqslant \beta \| Kx \|, \quad \forall\, x\in D(A)=D(K). \tag{9}$$

在(9)中用 $K^{-1}y$ 替换 x 得

$$\| AK^{-1}y \| \leqslant \beta \| y \|, \quad \forall\, y\in X. \tag{10}$$

这表明 $AK^{-1}:X\to X$ 也是 Lipschitz 连续的. 因此 $AK^{-1}:X\to X$ 为 Lipschitz 连续的强增生线性算子，由增生算子理论知，方程 $AK^{-1}x=f(\forall\, f\in X)$有唯一解 $q\in X$，即 $AK^{-1}q=f$，令 $p=K^{-1}q\in D(A)$，则 $Ap=f$，引理 4 证完.

引理 5[10] $\forall\, x,y\in X$，$j(x+y)\in J(x+y)$，有 $\| x+y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle$.

2 主要结果

定理 1 设 X 为 Banach 空间，$A:D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K 正定算子，$D(A)=D(K)$. 则存在常数 $\beta>0$ 使得$\forall\, x\in D(A)$，有

$$\| Ax \| \leqslant \beta \| Kx \|, \tag{11}$$

而且 A 为闭算子，$R(A)=X$，$\forall f\in X$，方程 $Ax=f$ 有唯一解.

证明 由引理 2—4 立得.

定理 2 设 X 为任意 Banach 空间，$A: D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K- 正定算子，$D(A)=D(K)$，假设 $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 $[0,1]$ 中实数列满足 (i) $c_n\to 0(n\to\infty)$，(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\infty$，$\forall x_0\in D(A)$，迭代地定义序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 如下：

$$\begin{cases}x_0\in D(A),\\ x_{n+1}=x_n+c_ny_n, n\geqslant 0,\\ y_n=K^{-1}f-K^{-1}Ax_n, n\geqslant 0,\end{cases} \tag{I}$$

则 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 强收敛于方程 $Ax=f$ 的唯一解.

证明 由定理 1 知，$\forall f\in X$，方程 $Ax=f$ 有唯一解，记为 $x^*\in D(A)$，即 $Ax^*=f$. 由引理 1 知 $K(D(K))=X$，而假设 $D(K)=D(A)$，故 $K(D(A))=X$，从而 $D(A)=K^{-1}(X)$ 故存在 $u\in X$ 使 $x^*=K^{-1}u$ 于是 $Ax^*=AK^{-1}u=f$. 因 A 为 K- 正定的，故存在常数 $c>0$ 使 $\forall x\in D(A)$，存在某 $j(Kx)\in J(Kx)$ 满足

$$\langle Ax, j(Kx)\rangle\geqslant c\|Kx\|^2. \tag{12}$$

在(12)中令 $x=K^{-1}y$，$y\in X$ 得

$$\langle AK^{-1}y, j(y)\rangle\geqslant c\|y\|^2. \tag{13}$$

(13)式表明 $AK^{-1}: X\to X$ 为强增生线性算子. 由定理 1 中(11)式知 $\|AK^{-1}x\|\leqslant\beta\|x\|$，这表明 $AK^{-1}: X\to X$ 也是 Lipschitz 的. 因此 $AK^{-1}: X\to X$ 为 Lipschitz 强增生线性算子，从而方程 $AK^{-1}x=\theta$ 有唯一零点 $x=\theta$.

下面证明 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}\subset D(A)$.

因 $K^{-1}: X\to D(A)$，故 $\forall n\geqslant 0$，$y_n\in D(A)$，由(I)知，$x_0\in D(A)$，假设对某 $n\geqslant 0$，我们将证明 $x_{n+1}\in D(A)$，事实上，因 $D(A)$ 为 X 的线性子空间，故有：$x_{n+1}=x_n+c_ny_n\in D(A)$. 由归纳法知，$\forall n\geqslant 0$，$x_n\in D(A)$，令 $u_n=Kx_n$，$\forall n\geqslant 0$. 则(I)式变为

$$u_n=Kx_0\in X,$$

$$u_{n+1}=u_n-c_n(AK^{-1}u_n-f), n\geqslant 0.$$

应用[6, Corollary7]知，$\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 强收敛于方程 $AK^{-1}y=f$ 的唯一解 u，从而 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 强收敛于方程 $Ax=f$ 的唯一解 $x^*=K^{-1}u$.

下面研究更一般的迭代格式之收敛性.

定理 3 设 X 为任意 Banach 空间，$A: D(A)\subset X\to X$ 为可闭的 K- 正定算子，$D(A)=D(K)$. 假设 $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{d_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 $[0,1]$ 中两个实数列满足下述条件：

(i) $c_n\to 0, d_n\to 0(n\to\infty)$； (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\infty$，

$\forall x_0\in D(A)$，迭代地定义序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 如下：

$$\begin{cases}x_0\in D(A),\\ y_n=x_n-d_n(K^{-1}Ax_n-K^{-1}f), n\geqslant 0,\\ x_{n+1}=x_n-c_n(K^{-1}Ay_n-K^{-1}f), n\geqslant 0,\end{cases} \tag{II}$$

则 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 强收敛于方程 $Ax=f$ 的唯一解.

证明 由定理 1 知，$\forall f\in X$，方程 $Ax=f$ 有唯一解 $x^*=f\in D(A)$. 由数学归纳法可证，

$\forall\ n\geqslant 0, x_n\in D(A)$，从而(Ⅱ)是良定的.

记 $\sigma_n=K^{-1}Ay_n-K^{-1}f, r_n=K^{-1}Ax_n-K^{-1}f$. 则

$$K\sigma_n= Ay_n - f = Ax_n - f - d_n(AK^{-1}Ax_n - AK^{-1}f) = Kr_n - d_nAr_n, \tag{14}$$

$$Kr_{n+1}= Ax_{n+1} - f = A_n - f - c_n(AK^{-1}Ay_n - AK^{-1}f) = Kr_n - c_nA\sigma_n. \tag{15}$$

令 $z_n=Kr_n, \mu_n=K\sigma_n$，则由(14)与(15)式得：

$$\begin{cases} z_0 \in X, \\ z_{n+1} = z_n - c_nAK^{-1}\mu_n, n \geqslant 0, \\ \mu_n = z_n - d_nAK^{-1}z_n. \end{cases} \tag{Ⅲ}$$

由定理 1 知，$AK^{-1}: X\to X$ 为 Lipschitz 强增生算子. 设其 Lipschitz 常数为 $\beta>0$，强增生常数为 $c>0$.

现在估计

$$\begin{aligned}\| \mu_n - z_{n+1} \| &\leqslant c_n \| AK^{-1}\mu_n \| + d_n \| AK^{-1}z_n \| \\ &\leqslant c_n\beta \| \mu_n \| + d_n\beta \| z_n \| \leqslant [c_n\beta(1 + \beta) + d_n\beta] \| z_n \| .\end{aligned} \tag{16}$$

记 $e_n=c_n\beta(1+\beta)+d_n\beta$，由假设知 $e_n\to 0(n\to\infty)$，因而我们可以选取足够大的自然数 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时 $e_n\leqslant\frac{c}{2\beta}$. 不失一般性，假设$\forall\ n\geqslant 0, e_n\leqslant\frac{c}{2\beta}$，应用引理 5 与(Ⅲ)得

$$\begin{aligned}\| z_{n+1} \|^2 &\leqslant \| z_n \|^2 - 2c_n < AK^{-1}\mu_n, j(z_{n+1}) > \\ &\leqslant \| z_n \|^2 + 2c_n \| AK^{-1}\mu_n - AK^{-1}z_{n+1} \| \| z_{n+1} \| - 2cc_n \| z_{n+1} \|^2 \\ &\leqslant \| z_n \|^2 + 2\beta c_ne_n \| z_n \| \| z_{n+1} \| - 2cc_n \| z_{n+1} \|^2 \\ &\leqslant (1 + \frac{c}{2}c_n) \| z_n \|^2 - \frac{3}{2}cc_n \| z_{n+1} \|^2,\end{aligned}$$

移项整理得

$$\| z_{n+1} \|^2 \leqslant (1 - \frac{cc_n}{1 + \frac{3}{2}cc_n}) \| z_n \|^2. \tag{17}$$

因 $c_n\to 0(n\to\infty)$，故$\frac{c}{1+\frac{3}{2}cc_n}\to c>\frac{c}{2}(n\to\infty)$，从而对充分大的 $n\geqslant 0$，不妨设$\forall\ n\geqslant 0$，有

$$\frac{c}{1 + \frac{3}{2}cc_n} \geqslant \frac{c}{2}. \tag{18}$$

将(18)代入(17)式得

$$\| z_{n+1} \|^2 \leqslant (1 - \frac{c}{2}c_n \| z_n \|^2 \leqslant \exp\{- \frac{c}{2}\sum_{j=0}^{n}c_j\} \| z_0 \|^2 \to 0(n \to \infty).$$

从而 $Kr_n\to\theta(n\to\infty)$，即 $Ax_n\to f(n\to\infty)$，因 A 是可逆的，故 $x_n\to A^{-1}f(n\to\infty)$.

注 1 当 A 为有界算子时，并假设方程 $Ax=f$ 有解，则本文所有结果中迭代收敛部分在任意赋范线性空间中成立.

参考文献：

[1] BROWDER F E. *Functional analysis and partial differential equations* [J]. Math. Ann., 1959, **138**:

55—59.
[2] CHIDUME C E, ANEKE S J. *Existence, uniqueness and approximation of a solution for a K-positive definite operator equation* [J]. Appl. Anal., 1993, **50**: 285—294.
[3] CHIDUME C E, OSILIKE M O. *Approximation of a solution for a K-positive definite operator equation* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **210**: 1—7.
[4] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
[5] DUNN J C. *Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type* [J]. J. Funct. Anal., 1978, **27**: 38—50.
[6] CHIDUME C E, OSILIKE M O. *Nonlinear accretive and pseudo-contrctive operator equations in Banach spaces* [J]. Nonl. Anal., 1998, **31**: 779—789.
[7] MOORE C. *Iterative approximation of the solution to a K-accretive operator equation in certain Banach spaces* [J]. Indian J. Pure. Appl. Math., 1990, **21**: 1087—1093.
[8] PETRYSHYN W V. *Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert spaces* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**: 136—175.
[9] REID T. *Symmetrizable completely continuous linear transformation in Hilbert space* [J]. Duke Math., 1951, **18**: 41—56.
[10] PETRYSHYN W V. *A characterization of strictly convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings* [J]. J. Funct. Anal., 1970, **6**: 282—291.

Solvability and Iterative Construction of Solution for a Class of K-Positive Definite Operator Equations in Banach Spaces

GAO Gai-liang, ZHOU Hai-yun
(Inst. of Appl. Math. & Mech., Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: Let X be a Banach space, and $A: D(A)\subset X\to X$ a closeable and K-positive definite operator with $D(A)=D(K)$. Then there exists a constant $\beta>0$ such that for any $x\in D(A)$, $\|Ax\|\leqslant\beta\|Kx\|$. Furthermore, the operator A is closed, $R(A)=X$, and the equation $Ax=f$, for any $f\in X$, has a unique solution. Let $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ be a real sequence in $[0,1]$. Define the sequence $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ iteratively by (I) $x_{n+1}=x_n+c_ny_n, y_n=K^{-1}f-K^{-1}Ax_n$, with $x_0\in D(A)$. It is proved that the sequence (I) converges strongly to the unique solution of the equationin $Ax=f$ in X.

Key words: K-positive definite operator; closeable operator; solvability; iterative construction.