第24卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 1
2004年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 2004

不同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列的强收敛速度 *

吴 群 英
(桂林工学院数理系，广西 桂林 541004)

摘　要：讨论了 $\tilde{\rho}$ 混合序列的强收敛性，获得了与独立情形几乎一致的结果，推广了著名的 Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律.

关键词：$\tilde{\rho}$ 混合序列；强收敛；矩条件.
分类号：AMS(2000) 60F15/CLC number：O211.4.91
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)01-0173-07

1　引言与引理

设 $\{X_i;i\in N\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{B},P)$ 上的随机变量序列，$\mathscr{F}_S=\sigma(X_i;i\in S\subset N)$ 为 σ-域，在 $\mathscr{B}$ 中给定 σ-域 $\mathscr{F},\mathscr{R}$，令 $\rho(\mathscr{F},\mathscr{R})=\sup\{|\mathrm{corr}(X,Y)|;X\in L_2(\mathscr{F}),Y\in L_2(\mathscr{R})\}$，其中 $\mathrm{corr}(X,Y)=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}}$ 为相关系数，Bradley[1](1990) 引入如下的相依系数：对 $k\geqslant 0$，令

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(\mathscr{F}_S,\mathscr{F}_T);\text{有限子集 } S,\ T\subset N,\ \text{且 } \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}. \tag{1}$$

显然 $0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，且 $\tilde{\rho}(0)=1$.

定义　对随机序列 $\{X_i;i\in N\}$，如存在 $k\in N$，使 $\tilde{\rho}(k)<1$，则称 $\{X_i;i\in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列.

注　在极限性质的讨论中，对 $\tilde{\rho}$ 混合序列 $\{X_i;i\in N\}$，即存在 $k_0\in N$，使 $\tilde{\rho}(k_0)<1$，如 $k_0>1$，可考虑 $\{X_i\}$ 的 k_0 个子列 $\{X_{k_0i+j};i\in N\}$，$j=0,1,2,\cdots,k_0-1$，而每一个子列的 $\tilde{\rho}(1)$ 即为原序列的 $\tilde{\rho}(k_0)$，因此，对 $\tilde{\rho}$ 混合序列，可不失一般性假设 $\tilde{\rho}(1)<1$.

$\tilde{\rho}$ 混合与通常的 ρ 混合有一定的类似，但并不相同，它们互不包含，事实上，在通常的 ρ 混合系数 $\rho(k)$ 中，(1) 式的 S,T 分别是 $[1,n]$ 和 $[n+k,\infty]$ 中的子集；另外，$\tilde{\rho}$ 混合只要求存在某 $k_0\in N$，使 $\tilde{\rho}(k_0)<1$，在这一点上要比 ρ 混合的要求 $\rho(k)\to 0,k\to\infty$ 弱得多. 下面给出一个是 $\tilde{\rho}$ 混合，但不是 ρ 混合的实例.

例　令

* **收稿日期**：2001-02-01
基金项目：广西自然科学基金(桂科基 0339071)及广西教育厅科研项目(桂教科研[2003]22号)资助.
作者简介：吴群英(1961-)，女，博士，教授.

$$\sum_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n, \quad n \in N.$$

容易算出 $\sum_n$ 的所有顺序主子式都大于零，由矩阵正定性判别法则知，对一切 $n \in N$，$\sum_n$ 均为正定的. 设 $\{X_i; i \in N\}$ 为随机变量序列，对任意 $n \in N$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，服从以 $(0,0,\cdots,0)$ 为均值，以 $\sum_n$ 为相关矩阵的正态分布. 显然有 $\tilde{\rho}(1) = 1/2 < 1$，所以 $\{X_i; i \in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合随机变量序列. 但由 $\rho(n) = 1/2, \forall\, n \in N$，知 $\{X_i; i \in N\}$ 不是 ρ 混合随机变量序列. 因此，$\tilde{\rho}$ 混合是一类极为广泛的相依混合序列，对其进行研究是很有价值的，文[1－2]研究了它的弱极限定理，文[3－6]讨论了它的部分和的收敛性质，本文进一步讨论了它的强收敛性，所得结果推广和改进了文[3－4]相应的结果，且几乎达到独立情形的 Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律[7].

本文以"$\ll$"表示通常的大"O"，log 表示以 2 为底的对数.

引理[4]　设 $\{X_i; i \in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_i = 0, E|X_i|^q < \infty, q \geq 2$，则存在仅依赖于 $\tilde{\rho}$ 的常数 c，使对 $\forall\, n \geq 1, \forall\, a \geq 0$，有

$$E \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(a)|^q \leq c \log^q n \{ (\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2)^{q/2} + \sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q \}.$$

其中 $S_n(a) = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i$. 特别，当 $a = 0$ 时，记 $S_n \triangleq S_n(0) = \sum_{i=1}^{n} X_i$，有

$$E \max_{1 \leq j \leq n} |S_j|^q \leq c \log^q n \{ (\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)^{q/2} + \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q \}.$$

2　定理及其证明

定理 1　设 $\{X_i; i \in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，存在某 r. v. X，使对任意 $x > 0$ 及 $i \geq 1$，有 $P(|X_i| \geq x) \leq P(|X| \geq x)$，$E|X|^r < \infty, 0 < r \leq 2$；且当 $1 \leq r \leq 2$ 时，$EX_i = 0$，则有当 $0 < r < 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = o(n^{1/r}) \quad \text{a. s.} \tag{2}$$

当 $1 \leq r \leq 2$ 时，对 $\forall\, \alpha > 1$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = o(n^{1/r} \log^{\alpha} n) \quad \text{a. s.} \tag{3}$$

当 $0 < r < 1$ 时，定理 1 达到了独立情形的 Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律；当 $1 \leq r \leq 2$ 时，(3) 式的右边比独立情形的结果多因子 $\log^{\alpha} n$，如对矩条件稍作加强，则可去出这一因子，即有

定理 2　设 $\{X_i; i \in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_i = 0$，存在某 r. v. X，使对任意 $x > 0$ 及 $i \geq 1$，有 $P(|X_i| \geq x) \leq P(|X| \geq x)$，且存在 $\beta > r$，使 $E(|X|^r \log^{\beta} |X|) < \infty$ 时，则有

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = o(n^{1/r}) \quad \text{a.s.}$$

注 定理 1,2 改进了文[3－4]的相应结果，几乎达到了独立情形的结果，且还讨论了 $r=2$ 的情形.

定理 1 的证明 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，因为

$$\frac{|S_n|}{n^{1/r}} \leqslant \max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}}, \quad \frac{|S_n|}{n^{1/r}\log^{\alpha} n} \leqslant \max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}k^{\alpha}},$$

所以要证(2),(3)式，只需证明，当 $0<r<1$ 时，

$$\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}} \to 0 \quad \text{a.s.} \ (k \to \infty);$$

当 $1 \leqslant r \leqslant 2$ 时，

$$\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{|S_n|}{2^{k/r}k^{\alpha}} \to 0 \quad \text{a.s.} \ (k \to \infty).$$

记 $X^k = XI_{(|X|^r \leqslant 2^{k+1})}$，$X_i^k = X_i I_{(|X_i|^r \leqslant 2^{k+1})}$，$S_n^k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$，当 $0<r<1$ 时，$a_k = 2^{k/r}$ 或当 $1 \leqslant r \leqslant 2$ 时，$a_k = 2^{k/r}k^{\alpha}$，由 Borel-Cantelli 引理，只需证明：$\forall\ \varepsilon>0$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} |S_n| > a_k\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(\bigcup_{i=1}^{2^{k+1}} |X_i|^r > 2^{k+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} P(\max_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} |S_n^k| > a_k\varepsilon)$$
$$\triangleq I_1 + I_2 < \infty. \tag{4}$$

先证 $I_1<\infty$，

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} P(|X_i|^r > 2^{k+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} P(|X|^r > 2^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} \sum_{j=k}^{\infty} P(2^j \leqslant |X|^r < 2^{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} 2^{k+1} P(2^j \leqslant |X|^r < 2^{j+1}) \\ &\ll \sum_{j=1}^{\infty} 2^j P(2^j \leqslant |X|^r < 2^{j+1}) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} E|X|^r P(2^j \leqslant |X|^r < 2^{j+1}) \ll E|X|^r < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

下证 $I_2<\infty$，先证明

$$P(|X_i^k| \geqslant x) \leqslant P(|X^k| \geqslant x), \quad \forall\ x>0, \forall\ k \in N. \tag{6}$$

当 $0<x\leqslant 2^{(k+1)/r}$ 时，有

$$\{|X_i^k| \geqslant x\} = \{|X_i| I_{(|X_i|^r \leqslant 2^{k+1})} > x\} = \{x < |X_i| \leqslant 2^{(k+1)/r}\} \cup \{|X_i| > 2^{(k+1)/r}\} = \{|X_i| > x\},$$

同样可得 $\{|X^k| \geqslant x\} = \{|X| \geqslant x\}$，所以由定理条件 $P(|X_i| \geqslant x) \leqslant P(|X| \geqslant x)$ 即得(6)成立；

当 $x>2^{(k+1)/r}$ 时，有

$$\{|X_i^k| \geqslant x\} = \{|X_i| I_{(|X_i|^r \leqslant 2^{k+1})} > x\} = \varphi, \{|X^k| \geqslant x\} = \{|X| I_{(|X|^r \leqslant 2^{k+1})} > x\} = \varphi,$$

所以有 $P(|X_i^k|\geqslant x)=P(|X^k|\geqslant x)=0$，(6)也成立.

1) 当 $0<r<1$ 时，由[8](P5，定理 2.2)及(6)得

$$E|X_i|I_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1})}=E|X_i^k|=\int_0^\infty P(|X_i^k|>x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^\infty P(|X^k|>x)\mathrm{d}x=E|X^k|=E|X|I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1})},\tag{7}$$

由此有

$$\begin{aligned}I_2&\ll\sum_{k=1}^\infty 2^{-k/r}E\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k|\leqslant\sum_{k=1}^\infty 2^{-k/r}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E|X_i^k|\\&\ll\sum_{k=1}^\infty 2^{(1-1/r)k}E|X|I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1})}\\&=\sum_{k=1}^\infty 2^{(1-1/r)k}\sum_{j=1}^{k}E|X|P(2^j\leqslant|X|^r<2^{j+1})\\&=\sum_{j=1}^\infty\sum_{k=j}^\infty 2^{(1-1/r)k}E|X|P(2^j\leqslant|X|^r<2^{j+1})\\&\ll\sum_{j=1}^\infty 2^{(1-1/r)j}E|X|^r2^{(j+1)(1-r)/r}P(2^j\leqslant|X|^r<2^{j+1})\\&\ll\sum_{j=1}^\infty E|X|^rP(2^j\leqslant|X|^r<2^{j+1})=E|X|^r<\infty.\end{aligned}\tag{8}$$

2) 当 $1\leqslant r\leqslant 2$ 时，先证 $\dfrac{\max\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|ES_n^k|}{a_k}\to 0,k\to\infty$，由 $EX_i=0$ 得，

$$|EX_i^k|=|EX_iI_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1})}|=|EX_i-EX_iI_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1})}|=|EX_iI_{(|X_i|^r>2^{k+1})}|$$

$$\leqslant E|X_i|I_{(|X_i|^r>2^{k+1})},$$

由此类似于(7)式的证明得，

$$|EX_i^k|\leqslant E|X|I_{(|X|^r>2^{k+1})},$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\max\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|ES_n^k|}{a_k}&\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}|EX_i^k|}{2^{k/r}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}|EX_iI_{(|X_i|^r>2^{k+1})}|}{2^{k/r}}\\&\leqslant\frac{2^{k+1}E|X|I_{(|X|>2^{(k+1)/r})}}{2^{k/r}}\\&\ll\frac{2^kE|X|^rI_{(|X|>2^{(k+1)/r})}}{2^{k/r}2^{(r-1)(k+1)/r}}\\&\ll E|X|^rI_{(|X|>2^{(k+1)/r})}\\&\to 0,\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

所以当 k 充分大时，有 $\dfrac{\max\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|ES_n^k|}{a_k}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，因此

$$I_2\ll\sum_{k=1}^\infty P(\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k-ES_n^k|>2^{k/r}k^\alpha\varepsilon/2)$$

在引理中取 $\lambda>\max(2,1/(\alpha-1))$，类似于(7)式的证明有 $E|X_i^k|^\lambda\leqslant E|X|^\lambda I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1})}$ 且由 Morkov 不等式，C_r 不等式得

$$
\begin{aligned}
I_2 &\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\lambda k/r}k^{-\alpha\lambda}E\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k-ES_n^k|^\lambda \\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\lambda k/r}k^{-\alpha\lambda}(\log 2^{k+1})^\lambda\Big[\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E|X_i^k-EX_i^k|^\lambda+\Big(\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E(X_i^k-EX_i^k)^2\Big)^{\lambda/2}\Big] \\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\lambda k/r}k^{-\alpha\lambda+\lambda}\Big[2^{k+1}E|X|^\lambda I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1})}+\big(2^{k+1}EX^2I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1})}\big)^{\lambda/2}\Big] \\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}k^{-\lambda(\alpha-1)}\Big[2^{(1-\lambda/r)k}E|X|^r2^{(k+1)(\lambda-r)/r}+2^{-\lambda k/r}\big(2^{k+1}E|X|^r2^{(k+1)(2-r)/r}\big)^{\lambda/2}\Big] \\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\lambda(\alpha-1)}}<\infty.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

综合(4)，(5)，(8)，(9)式，定理 1 得证.

定理 2 的证明 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，与定理 1 类似只需证明：$\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}\frac{|S_n|}{2^{k/r}}\to 0$ a. s. $(k\to\infty)$. 取 $r<\delta<\beta$，记 $X_i^k=X_iI_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1}/(k+1)^\delta)}$，$S_n^k=\sum_{i=1}^{n}X_i^k$，由 Borel-Cantelli 引理，只需证明：$\forall\ \varepsilon>0$

$$
\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n|>2^{k/r}\varepsilon\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\bigcup_{i=1}^{2^{k+1}}|X_i|^r>\frac{2^{k+1}}{(k+1)^\delta}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k|>2^{k/r}\varepsilon\Big)
$$

$$
\triangleq I_1+I_2<\infty.
$$

先证 $I_1<\infty$，由于 $\beta>r\geqslant 1$，所以有

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}P\Big(|X_i|^r>\frac{2^{k+1}}{(k+1)^\delta}\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}2^{k+1}P\Big(|X|^r>\frac{2^{k+1}}{(k+1)^\delta}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}2^{k+1}\sum_{j=k}^{\infty}P\Big(\frac{2^j}{j^\delta}\leqslant|X|^r<\frac{2^{j+1}}{(j+1)^\delta}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}2^{k+1}P\Big(\frac{2^j}{j^\delta}\leqslant|X|^r<\frac{2^{j+1}}{(j+1)^\delta}\Big) \\
&\ll \sum_{j=1}^{\infty}2^jP\Big(\frac{2^j}{j^\delta}\leqslant|X|^r<\frac{2^{j+1}}{(j+1)^\delta}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{j^\delta}(j-\delta\log j)\frac{j^\delta}{j-\delta\log j}P\Big(\frac{2^j}{j^\delta}\leqslant|X|^r<\frac{2^{j+1}}{(j+1)^\delta}\Big) \\
&\ll \sum_{j=1}^{\infty}E|X|^r\log|X|P(2^j\leqslant|X|^r<2^{j+1}) \\
&\ll E|X|^r\log|X|\leqslant E|X|^r\log^\beta|X|<\infty.
\end{aligned}
$$

下证 $I_2<\infty$,先证 $\frac{\max\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|ES_n^k|}{a_k}\to 0, k\to\infty$,由 $EX_i=0$ 得

$$\begin{aligned}|EX_i^k| &= |EX_iI_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1}/(k+1)^\delta)}| = |EX_i - EX_iI_{(|X_i|^r\leqslant 2^{k+1}/(k+1)^\delta)}|\\ &= |EX_iI_{(|X_i|^r>2^{k+1}/(k+1)^\delta)}|\end{aligned}$$

并且注意到 $\beta-\delta+\delta/r>\delta/r>0$,得

$$\begin{aligned}\frac{\max\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|ES_n^k|}{2^{k/r}} &\leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}|EX_i^k|}{2^{k/r}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}|EX_iI_{(|X_i|^r>2^{k+1}/(k+1)^\delta)}|}{2^{k/r}}\\ &\leqslant \frac{2^{k+1}E|X|I_{(|X|^r>2^{k+1}/(k+1)^\delta)}}{2^{k/r}}\\ &\ll \frac{2^kE|X|^r(k+1)^{\delta(r-1)/r}}{2^{k/r}2^{(r-1)(k+1)/r}}\frac{\log^\beta|X|}{(k+1-\delta\log(k+1))^\beta}\\ &\ll \frac{1}{k^{\beta-\delta+\delta/r}}\to 0,\quad k\to\infty,\end{aligned}$$

故

$$I_2\leqslant\sum_{k=1}^\infty P(\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k-ES_n^k|>2^{k/r}k^\alpha\varepsilon/2).$$

因为 $r<\delta<\beta$,所以 $\delta/r-1>0,\delta/r-1+(\beta-\delta)/2>0$,在引理中取

$$\lambda>\max(2,\frac{1+\delta-\beta}{\delta/r-1},\frac{1}{\delta/r-1+(\beta-\delta)/2}),$$

有 $\lambda(\delta/r-1)-\delta+\beta>1,(\delta/r-1+(\beta-\delta)/2)\lambda>1$,故

$$\begin{aligned}I_2 &\ll \sum_{k=1}^\infty 2^{-\lambda k/r}E\max_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|S_n^k-ES_n^k|^\lambda\\ &\ll \sum_{k=1}^\infty 2^{-\lambda k/r}(\log 2^{k+1})^\lambda[\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E|X_i^k-EX_i^k|^\lambda+(\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E(X_i^k-EX_i^k)^2)^{\lambda/2}]\\ &\ll \sum_{k=1}^\infty 2^{-\lambda k/r}k^\lambda[2^{k+1}E|X|^\lambda I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1}/(k+1)^\delta)}+(2^{k+1}EX^2I_{(|X|^r\leqslant 2^{k+1}/(k+1)^\delta)})^{\lambda/2}]\\ &\ll \sum_{k=1}^\infty k^\lambda 2^{(1-\lambda/r)k}E|X|^r\frac{\log^\beta|X|}{(k+1-\delta\log(k+1))^\beta}\frac{2^{(k+1)(\lambda-r)/r}}{(k+1)^{\delta(\lambda-r)/r}}+\\ &\quad \sum_{k=1}^\infty k^\lambda 2^{-\lambda k/r}(2^{1+k}E|X|^r\frac{\log^\beta n}{(k+1-\delta\log(k+1))^\beta}\frac{2^{(k+1)(2-r)/r}}{(k+1)^{\delta(2-r)/r}})^{\lambda/2}\\ &\ll \sum_{k=1}^\infty(\frac{1}{k^{\lambda(\delta/r-1)-\delta+\beta}}+\frac{1}{k^{(\delta/r-1+(\beta-\delta)/2)\lambda}})\\ &<\infty.\end{aligned}$$

定理 2 证毕.

参考文献:

[1] BRADLEY R C. *Equivalent Mixing Conditions for Random Fields* [M]. Chapel Hill: Technical Report

No. 336, Center for Stochastic Processes, Univ. of North Carolina, 1990.
[2] BRADLLY R C. *On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields* [J]. Theoret Probab, 1992, **5**: 355—374.
[3] BRYC W, SMOLENSKI W. *Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables* [J]. Proceeding of American Math Society, 1993, **119**(2): 629—635.
[4] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用 [J]. 科学通报, 1998, **43**(17): 1823—1827.
YANG Shan-chao. *Moment inequality and its applications for partail sums of a kind of random variables* [J]. Chinese Science Bulletin, 1998, **43**(17): 1823—1827. (in Chinese)
[5] 吴群英, $\tilde{\rho}$ 混合序列的若干收敛性质 [J]. 工程数学学报, 2001, **18**(3): 58—64.
WU Qun-ying. *Convergence properties of $\tilde{\rho}$ mixing random sequences* [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2001, **18**(3): 58—64. (in Chinese)
[6] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性 [J]. 应用数学, 2002, **15**(1): 1—4.
WU Qun-ying. *Convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$ mixing random sequences* [J]. Math. Appl., 2002, **15**(1): 1—4. (in Chinese)
[7] MARCINKIEWICZ ZYGMUND A. *Sur les fonctions independants* [J]. Fund. Math., 1937, **29**: 60—90.
[8] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 北京:高等教育出版社, 1999.
LIN Zheng-yan, LU Chuan-rong, SU Zhong-gen. *Limit Theorems of Probability* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese)

Strong Convergence Rate for $\tilde{\rho}$-Mixing Random Sequences with Different Distributions

WU Qun-ying
(Dept. of Math. & Phys., Guilin Institute of Technology, Guangxi 541004, China)

Abstract: In this paper, we discuss strong convergence for $\tilde{\rho}$-mixing random sequences. These results are simular to those of independent sequences, and extend the Marcinkiewiez-Zygmund strong law.

Key words: $\tilde{\rho}$-mixing random sequence; strong convergence; moment condition.