第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

R^n 上无奇点 C^1 流的强极限跟踪性*

朱玉峻， 郑宏文
(河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)

摘 要：本文证明了 R^n 上无奇点 C^1 流的双曲集附近具有强极限跟踪性.

关键词：渐近伪轨；强极限跟踪性；C^1 流；双曲集.
分类号：AMS(2000) 37C50/CLC number：O193
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0285-06

1 引 言

跟踪性是动力系统中重要的动力性质之一. 从上世纪七十年代至今三十多年的时间里，人们对跟踪性的研究取得了很多重要的成果[1-3]. 如今，跟踪性的研究仍是国际上动力系统研究的热门课题[4,5]. 极限跟踪性是一类特殊的跟踪性，从数值计算的角度来看，如果一个动力系统具有极限跟踪性就意味着：当用某种数值计算的方法来近似地刻划该系统，并且精度逐步提高(即随着时间趋于无穷，单步误差趋于零)时，则通过数值计算得到的轨道必然趋近于一条真正的轨道. 在[4,6,7]中，S. Yu. Pilyugin 等对极限跟踪性进行了研究. 本文对 R^n 上的 C^1 流引入了极限跟踪性的概念，并证明了无奇点流在其双曲集附近具有强极限跟踪性.

以下恒设 $\varphi=\{\varphi_t\}$ 为 R^n 上的 C^1 向量场 X 生成的 C^1 流，$D\varphi$ 为相应的切丛 $TR^n=R^{2n}$ 上的切流.

设 W 为 R^n 的一个子集，$T>0$. 我们称映射 $\Phi:R\to R^n$ 为流 φ 在 W 上的一个渐近 T-伪轨，如果 $\Phi(R)\subset W$，且 $\lim\limits_{|\tau|\to+\infty}\sup\limits_{|t|\leqslant T}|\varphi_t(\Phi(\tau))-\Phi(\tau+t)|=0$.

记 $\mathrm{Re}p=\{\alpha:R\to R\,|\,\alpha$ 为保持零点的保向同胚$\}$，$\mathrm{Re}p$ 中的元素称为重新参数化. 另外，对任意的 $\epsilon>0$，记 $\mathrm{Re}p(\epsilon)=\{\alpha\in\mathrm{Re}p\,|\,|\frac{\alpha(t)-\alpha(s)}{t-s}-1|\leqslant\epsilon,t\neq s\}$.

定义 设 T,δ 为两个正常数，W 为 R^n 的一个子集.

我们称流 φ 在 W 上关于 T 具有极限跟踪性，如果对 W 上任意一个渐近 T-伪轨 Φ，存在点 $p\in M$ 及 $\alpha\in\mathrm{Re}p$，使得 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}|\varphi_{\alpha(t)}(p)-\Phi(t)|=0$.

* 收稿日期：2002-04-25
基金项目：国家自然科学基金(10371030)和河北师范大学青年基金(L2000q22)资助项目.
作者简介：朱玉峻(1972-)，博士，讲师.

我们称流φ在W上关于(T,δ)具有强极限跟踪性，如果存在常数$L>0$，使得对W上任意一个渐近T-伪轨Φ，若$\sup\limits_{\tau\in R}\sup\limits_{|t|\leqslant T}|\varphi_t(\Phi(\tau))-\Phi(\tau+t)|\leqslant\eta\leqslant\delta$，则存在点$p\in M$及$\alpha\in \mathrm{Re}p(L\eta)$，使得

$$\sup_{t\in R}|\varphi_{\alpha(t)}(p)-\Phi(t)|\leqslant L\eta,\text{且}\lim_{|t|\to+\infty}|\varphi_{\alpha(t)}(p)-\Phi(t)|=0.$$

集合Λ称为流φ的双曲集，如果Λ为φ的紧致不变集，且存在常数$C>0,0<\lambda_0<1$，以及Λ上连续的空间族E^s,E^u使得

(1) E^s,E^u为$D\varphi$不变的，即$D\varphi_t(p)E^s_p=E^s_{\varphi_t(p)},D\varphi_t(p)E^u_p=E^u_{\varphi_t(p)},t\in R,p\in\Lambda$.

(2) 对$p\in\Lambda$我们有

$$E^s_p\oplus E^u_p=R^n,\text{如果 }X(p)=0,$$

$$E^s_p\oplus E^u_p\oplus\langle X(p)\rangle=R^n,\text{如果 }X(p)\neq 0.$$

其中$\langle X(p)\rangle$为由$X(p)$生成的一维子空间.

(3) $|D\varphi_t(p)v|\leqslant C\lambda_0^t|v|,v\in E^s_p,t\geqslant 0,\quad |D\varphi_t(p)v|\leqslant C\lambda_0^{-t}|v|,v\in E^u_p,t\leqslant 0$，

我们称C,λ_0为Λ的双曲常数，E^s,E^u为Λ上的双曲构造.

本文的主要定理为

定理 设Λ为流φ的双曲集，且对任意$p\in\Lambda$，有$X(p)\neq 0$. 则对任意的$T>0$，存在Λ的邻域W_T和正常数δ_T，使得流φ在W_T上关于(T,δ_T)具有强极限跟踪性.

以下恒设Λ为φ的双曲集，C,λ_0为相应的双曲常数，且对任意$p\in\Lambda,X(p)\neq 0$.

2 准备工作

命题 设$T_1,T_2>0$. 若流φ在Λ的邻域W_{T_1}上关于(T_1,δ_{T_1})（这里δ_{T_1}为某个正常数）具有强极限跟踪性，则存在Λ的邻域W_{T_2}及$\delta_{T_2}>0$使得流φ在W_{T_2}上关于(T_2,δ_{T_2})具有强极限跟踪性.

证明 设流φ在Λ的邻域W_{T_1}上关于(T_1,δ_{T_1})具有强极限跟踪性，且相应常数为L_{T_1}. 注意到当$T_2\geqslant T_1$时，命题显然成立. 故下面仅考虑$T_2<T_1$的情形. 不妨设W_{T_1}有界（必要时缩小W_{T_1}，使之有界即可），设向量场X在W_{T_1}上的 Lipschitz 常数为L_0.

首先注意以下事实：若对$s\in[0,t]$有$\varphi_s(x),\varphi_s(y)\in W_{T_1}$，且$|x-y|<\delta$，则$|\varphi_t(x)-\varphi_t(y)|\leqslant\delta e^{L_0t}$. 事实上，设$f(t)=\varphi_t(x)-\varphi_t(y)$. 于是

$$f(t)=f(0)+\int_0^t f'(s)\mathrm{d}s=(x-y)+\int_0^t[X(\varphi_s(x))-X(\varphi_s(y))]\mathrm{d}s.$$

两边取范数，得$|f(t)|\leqslant\delta+L_0\int_0^t|f(s)|\mathrm{d}s$. 由 Gronwall 不等式，得$|f(t)|\leqslant\delta e^{L_0t}$.

取Λ的邻域W_{T_2}，使得$\varphi_t(x)\in W_{T_1},\forall\, x\in W_{T_2},|t|\leqslant T_1+T_2$. 记$L'=(1+e^{L_0T_2}+e^{2L_0T_2}+\cdots+e^{mL_0T_2}$，$m=[T_1/T_2]$，$\delta_{T_2}=\delta_{T_1}/L'$，$L_{T_2}=L_{T_1}L'$，则流$\varphi$在$W_{T_2}$上关于$(T_2,\delta_{T_2})$具有强极限跟踪性. 事实上，设$\Phi:R\to W_{T_2}$为流$\varphi$的一个渐近$T_2$-伪轨，且满足$\sup\limits_{\tau\in R}\sup\limits_{|t|\leqslant T_2}|\varphi_t(\Phi(\tau))-\Phi(\tau+t)|\leqslant\eta\leqslant\delta_{T_2}$，则$\varphi$也为流$\varphi$在$W_{T_1}$上的一个渐近$T_1$-伪轨，且满足$\sup\limits_{\tau\in R}\sup\limits_{|t|\leqslant T_1}|\varphi_t(\Phi(\tau))-\Phi(\tau+t)|\leqslant L'\eta\leqslant L'\delta_{T_2}=\delta_{T_1}$. 由于流$\varphi$在$W_{T_1}$上关于$(T_1,\delta_{T_1})$具有强极限跟踪性，于是，

存在点 x 及重新参数化 $\alpha \in \mathrm{Rep}(L_{T_1}L'\eta) = \mathrm{Rep}(L_{T_2}\eta)$，使得

$$\sup_{t\in R}|\varphi_{\alpha(t)}(x) - \Phi(t)| \leqslant L_{T_1}L'\eta = L_{T_2}\eta, \text{且} \lim_{|t|\to+\infty}|\varphi_{\alpha(t)}(x) - \Phi(t)| = 0.$$

下面，我们将描述流在其双曲集附近的性态[4].

取 Λ 的充分大的有界邻域 W_0，使得存在某正常数 N，满足 $N \geqslant \max\{\sup_{x\in W_0}|X(x)|, 1\}$. 设向量场 X 在 W_0 上的 Lipschitz 常数为 L_0. 另取 $T > 0$，使得 $C\lambda_0^T \leqslant \lambda_0$. 记 $f = \varphi_T$.

引理 1（[4]之引理 1.5.1） 对任意的 $\varepsilon > 0, \lambda_0 < \lambda < 1$，存在 Λ 的邻域 $W = W(\varepsilon, \lambda), \delta > 0$，以及 Λ 上空间族 E^s, E^u 到 W 上的连续延拓（不妨仍记为 E^s, E^u），使得

(1) $E^s_x \oplus E^u_x \oplus \langle X(x)\rangle = T_xM, x \in W$.

(2) 对 $x, y \in W, |y - f(x)| \leqslant \delta$，映射 $\Pi^s_y Df(x): E^s_x \to E^s_y$ 为同构，且满足以下不等式

$$\| \Pi^s_y Df(x)|_{E^s_x} \| \leqslant \lambda, \| \Pi^u_y Df(x)|_{E^s_x} \| \leqslant \varepsilon;$$

映射 $\Pi^u_y Df(x): E^u_x \to E^u_y$ 为同构，且满足以下不等式

$$\| \Pi^u_y Df(x)|_{E^u_x} \| \geqslant \frac{1}{\lambda}, \| \Pi^s_y Df(x)|_{E^u_x} \| \leqslant \varepsilon,$$

(3) 如果 $g(x) = \varphi^{T'}(x), |T' - T| \leqslant 1$，则对 $x, y \in W, |y - g(x)| < \delta$，成立不等式

$$\| \Pi^0_y Dg(x)|_{E^s_x \oplus E^u_x} \| \leqslant \varepsilon.$$

这里 Π^s_x, Π^u_x 和 Π^0_x 分别为从 T_xM 到 E^s_x, E^u_x 和 $\langle X(x)\rangle$ 的投射.

我们对 $\varepsilon = 0, \lambda_0 < \lambda < 1$，取定 Λ 的邻域 $W_1 = W(1, \lambda) \subset W_0$，由于 W_0 有界，不妨设以上所取的 N 还满足

$$\| \Pi^s_x \|, \| \Pi^u_x \| \leqslant N, \quad x \in W_1,$$

$$\| D\varphi_t(x) - D\varphi_{t'}(x) \| \leqslant N|t - t'|, \quad x \in W_1, |t|, |t'| \leqslant T + 1.$$

对 $x \in W_1$，令 $Z(x) = E^s_x + E^u_x$. 在证明中，我们将用 $\Sigma(x)$ 记过 x 点且平行于 $Z(x)$ 的 $n - 1$ 维双曲超平面，注意到 $\Sigma(x)$ 与 $X(x)$ 横截相交.

对 $x, y \in W_1$，记 $d(x, \Sigma(y))$ 为 x 与 $\Sigma(y)$ 的垂直距离，$\Sigma_b(x)$ 为 $\Sigma(x)$ 中以 x 为中心，b 为半径的球.

引理 2[[4]之引理1.5.2—引理1.5.4] 存在 $K_1 > 1, \delta_1 > 0, 0 < \varepsilon_0 < 1, b > 0$，使得：

(1) 对任意的 $p, z \in W_1$，若 $|f(p) - z| \leqslant \delta_1$，则在 $\Sigma_b(p)$ 上存在 C^1 函数 $\tau(x)$，使得 $g(x) := \varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma_b(z)$，且有以下不等式：

$$|\tau(x) - T| \leqslant \min\{K_1 d(f(x), \Sigma(z)), \varepsilon_0\},$$

$$|g(x) - z| \leqslant K_1|f(x) - z|.$$

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \delta_1$，以及 Λ 的邻域 $W' \subset W(\varepsilon, \lambda)$，使得对任意的 $p, z \in W'$，若 $|f(p) - z| \leqslant \delta$，则 $\| Dg(p) - Df(p))|_{Z(p)} \| \leqslant \varepsilon$.

为证定理，下面引入一个 Banach 空间列之间映射序列的跟踪引理[4].

设 $\{H_k\}^{+\infty}_{-\infty}$ 为 Banach 空间序列，$|\cdot|$ 为 H_k 上范数，$\|\cdot\|$ 为 H_k 上线性算子的范数. 考虑映射序列：$\varphi_k: H_k \to H_{k+1}, v \mapsto A_k v + \omega_{k+1}(v), k \in \mathbf{Z}$，其中 A_k 为线性算子.

记 $B = \{\{v_k\}^{+\infty}_{-\infty} | v_k \in H_k, \sup_{k\in Z}|v_k| < +\infty, \lim_{|k|\to+\infty}|v_k| = 0\}$. 对任意 $\bar{v} = \{v_k\}^{+\infty}_{-\infty} \in B$，令 $\| \bar{v} \|_B = \sup_{k\in Z}|v_k|$. 于是 $(B, \|\cdot\|_B)$ 作成一个 Banach 空间. 由[4]之引理 1.3.1 及定理 1.3.1 可得如下定理.

定理 A 假设

(a) 存在常数 $0<\lambda<1, N\geqslant 1$ 以及投射 $P_k, Q_k: H_k\to H_k, k\in Z$(记 $S_k=P_kH_k, U_k=Q_kH_k$),使得

(a_1) $\|P_k\|, \|Q_k\|\leqslant N, P_k+Q_k=I$.

(a_2) $\|A_k|_{S_k}\|\leqslant\lambda, A_kS_k\subset S_{k+1}$.

(b) 若 $U_{k+1}\neq\{0\}$,则存在线性映射 $B_k: U_{k+1}\to H_k$,使得 $B_kU_{k+1}\subset U_k, \|B_k\|\leqslant\lambda$, $A_kB_k|_{U_{k+1}}=I$.

(c) 存在常数 $K,\Delta>0$,使得

$$|\omega_{k+1}(v)-\omega_{k+1}(v')|\leqslant K|v-v'|,\quad |v|,|v'|\leqslant\Delta;$$

并且成立不等式 $KN_1<1$,其中 $N_1=N\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$. 令 $L=\dfrac{N_1}{1-KN_1}, \delta_0=\dfrac{\Delta}{L}$. 如果对映射序列 $\{\varphi_k\}_{-\infty}^{+\infty}$,有 $\{\varphi_k(0)\}_{-\infty}^{+\infty}\in B$,且 $\|\{\varphi_k(0)\}\|_B\leqslant\delta\leqslant\delta_0$. 则存在 $\bar v=\{v_k\}_{-\infty}^{+\infty}\in B$,使得 $\varphi_k(v_k)=v_{k+1}$,且 $\|\bar v\|_B\leqslant L\delta$.

3 定理的证明

设 Φ 为流 φ 在 W_T 中的一个渐近 T- 伪轨,且满足

$$\sup_{\tau\in R}\sup_{|t|\leqslant T}|\varphi_t(\Phi(\tau))-\Phi(\tau+t)|<\delta\leqslant\delta_T, \tag{*}$$

这里的 W_T 及 $\delta_T<\delta_1$ 待定.

令 $x_k=\Phi(kT), H_k=Z(x_k), A_k=A_k^s+A_k^u$, 其中 $A_k^s=\Pi^s_{x_{k+1}}Df(x_k)\Pi^s_{x_k}, A_k^u=\Pi^u_{x_{k+1}}Df(x_k)\Pi^u_{x_k}$. 并设

$$P_k=\Pi^s_{x_k}|_{Z(x_k)}, Q_k=\Pi^u_{x_k}|_{Z(x_k)}, S_k=P_kH_k=E^s_{x_k}, U_k=Q_kH_k=E^u_{x_k}.$$

对任意 $k\in\mathbf{Z}$,以及充分小的 $v\in H_k$ 定义 $\varphi_k(v)=g(x_k+v)-x_{k+1}$,其中,$g$ 的定义见引理 2. 于是,φ_k 把 H_k 中包含 x_k 的一个小邻域映到 H_{k+1} 中,且有

$$\begin{aligned}\varphi_k(v)=&A_kv+\{[g(x_k+v)-x_{k+1}-Dg(x_k)v]+\\&[Dg(x_k)-Df(x_k)]v+[Df(x_k)-A_k]v\}\\=:&A_kv+\omega_{k+1}(v).\end{aligned}$$

记 $\omega_{k+1}(v)=\omega_{k+1}^{(1)}(v)+\omega_{k+1}^{(2)}(v)+\omega_{k+1}^{(3)}(v)$,其中

$$\omega_{k+1}^{(1)}(v)=g(x_k+v)-x_{k+1}-Dg(x_k)_v,$$

$$\omega_{k+1}^{(2)}=Dg(x_k)-Df(x_k),$$

$$\omega_{k+1}^{(3)}=Df(x_k)-A_k.$$

下面对充分小的 $v,v'\in H_k$ 来估计 $|\omega_{k+1}(v)-\omega_{k+1}(v')|$. 依 $\omega_{k+1}^{(i)}(i=1,2,3)$的定义可以得到

$$\begin{aligned}|\omega_{k+1}^{(1)}(v)-\omega_{k+1}^{(1)}(v')|&\leqslant\sup_{u\in J_{vv'}}\|D\omega_{k+1}^{(1)}(u)\|\cdot|v-v'|\\&=\sup_{u\in J_{vv'}}\|Dg(x_k+u)-Dg(x_k)\|\cdot|v-v'|,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $J_{vv'}=\{u=tv+(1-t)v'\,|\,t\in[0,1]\}$.

$$\|\omega_{k+1}^{(2)}\|=\|Dg(x_k)-Df(x_k)\|, \tag{2}$$

$$\|\omega_{k+1}^{(3)}\| = \|Df(x_k) - A_k\|$$
$$= \|(\Pi^s_{x_{k+1}} + \Pi^0_{x_{k+1}} + \Pi^u_{x_{k+1}})Df(x_k)(\Pi^s_{x_k} + \Pi^u_{x_k}) - (A^s_k + A^u_k)\|$$
$$\leqslant \|\Pi^s_{x_{k+1}}Df(x_k)\Pi^u_{x_k}\| + \|\Pi^u_{x_{k+1}}Df(x_k)\Pi^s_{x_k}\| + \|\Pi^0_{x_{k+1}}Df(x_k)|_{E^s_{x_k}\oplus E^u_{x_k}}\|. \quad (3)$$

取定 $K>0$，使之满足 $KN_1<1(N_1 = N\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda})$. 对估计式(1)应用 Dg 的一致连续性，存在 $\Delta>0$，使得 $|\omega_{k+1}^{(1)}(v) - \omega_{k+1}^{(1)}(v')| \leqslant \dfrac{K}{3}|v-v'|, |v|, |v'| \leqslant \Delta$. 对估计式(2)应用引理 2，存在 $0<\delta_2<1$ 以及 Δ 的邻域 $W_T' \subset W(\dfrac{K}{3},\lambda)$ 使得对如上定义的 $x_k,(k\in Z)$，若 $x_k, x_{k+1}\in W_T'$ 且 $|f(x_k) - x_{k+1}|\leqslant\delta_2$，则 $\|\omega_{k+1}^{(2)}\| \leqslant \dfrac{K}{3}|v-v'|$；对估计式(3)应用引理 1，存在 $\delta_3>0$ 以及 Δ 的邻域 $W_T''\subset W(\dfrac{K}{9},\lambda)$，使得若 $x_k,x_{k+1}\in W_T''$ 且 $|f(x_k)-x_{k+1}|\leqslant\delta_3$，则 $\|\omega_{k+1}^{(3)}\|\leqslant \dfrac{K}{3}|v-v'|$.

令 $W_T = W'_T \cap W''_T$，于是当 $x_k, x_{k+1}\in W_T$ 且 $|f(x_k)-x_{k+1}|\leqslant\delta_4=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ 时有
$$|\omega_{k+1}(v) - \omega_{k+1}(v')| \leqslant K|v-v'|, \quad |v|, |v'|\leqslant\Delta.$$

应用定理 A，对 $\{\varphi_k\}_{-\infty}^{+\infty}$，存在 $\delta_0>0, L$(相对于 λ, N, Δ)，使得定理 A 的结论成立. 取
$$\delta_T = \min\{\frac{\delta_0}{K_1}, \frac{\delta_4}{1+K_1Le^{L_0T}}\},$$
此处 K_1 的意义见引理 2，L_0 为向量场 X 在 W_0 上的 Lipschitz 常数. 由引理 2，对满足条件(*)的任意渐近伪轨 Φ 有 $|\varphi_k(0)|\leqslant K_1\delta\leqslant K_1\delta_T\leqslant\delta_0$. 由定理 A，存在向量 $\bar v = \{v_k\}_{-\infty}^{+\infty}\in B$，使得 $\varphi_k(v_k) = v_{k+1}$，且 $\|\bar v\|_B\leqslant L_1\delta$，其中 $L_1 = K_1L$.

由 φ_k 的定义知道，点列 $\{p_k = x_k + v_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ 位于流 φ 的同一条轨道上. 注意到
$$|p_k - x_k|\leqslant L_1\delta, \lim_{|k|\to\infty}|p_k - x_k| = 0,$$
从而，
$$|f(p_k) - x_{k+1}| \leqslant |f(p_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - x_{k+1}| \leqslant (L_1e^{L_0T}+1)\delta\leqslant\delta_4\leqslant\delta_1,$$
$$\lim_{|k|\to\infty}|f(p_k) - x_{k+1}| = 0.$$
令 $L_2 = K_1(L_1e^{L_0T}+1)$，定义 t_k，使 $p_{k+1} = \varphi_{t_k}(p_k)$. 由引理 2 知
$$|t_k - T|\leqslant K_1(L_1e^{L_0T}+1)\delta = L_2\delta, \lim_{|k|\to\infty}|t_k - T| = 0$$
令
$$\tau_k = \begin{cases} 0, & k=0, \\ \Sigma_0^{n-1}t_i, & k>0, \\ -\Sigma_n^{-1}t_i, & k<0. \end{cases}$$
定义 $\alpha: R\to R$ 如下：
$$\alpha(t) = \begin{cases} T_k, & t = kT, \\ T_k + (t-kT)\dfrac{t_{k+1}}{T}, & k\in[kT,(k+1)T]. \end{cases}$$
可以验证 $\alpha(t)\in \mathrm{Re}p(L_3\delta)$，$(L_3 = \dfrac{L_2}{T})$.

任取 $t \in R$,不妨设 $t \in [kt,(k+1)T]$,令 $t' = t - kT$,由于 $|t'| < T$,我们有

$$|\alpha(t) - T_k - t'| = |t'(\frac{t_{k+1}}{T} - 1)| \leqslant L_2\delta,$$

于是

$$\begin{aligned} &|\varphi_{\alpha(t)}(p_0) - \Phi(t)| \\ &\leqslant |\varphi_{\alpha(t)-T_k}(p_k) - \varphi_{t'}(p_k)| + |\varphi_{t'}(p_k) - \varphi_{t'}(x_k)| + |\varphi_{t'}(x_k) - \Phi(kT + t')| \\ &\leqslant NL_2\delta + L_1 e^{L_0 T}\delta + \delta. \end{aligned}$$

进而,有不等式

$$\lim_{|t| \to +\infty} |\varphi_{\alpha(t)}(p_0) - \Phi(t)| = 0.$$

令 $L_4 = NL_2 + L_1 e^{L_0 T} + 1$,$L_T = \max\{L_3, L_4\}$. 则流 φ 在 W_T 上关于(T, δ_T)具有强极限跟踪性,且相应参数为 L_T.

参考文献:

[1] BOWEN R. *ω-limit sets for Axiom a diffeomorphisms* [J]. J. Diff. Eqns., 1975, **18**: 333—339.

[2] WALTERS P. *On the Pseudo Orbit Tracing Property and its Relationship to Stability* [M]. Springer, Berlin, 1977, 231—244.

[3] THOMAS R F. *Stability properties of one-parameter flows* [J]. Proc. London Math. Soc., 1982, **45**: 479—505.

[4] PILYUGIN S YU. *Shadowing in Dynamical Systems* [M]. Springer, Berlin, 1999.

[5] PALMER K. *Shadowing in Dynamical Systems, Theory and applications* [M]. Klumer Academic Publishers, 2000.

[6] EIROLA T, NEVANLINNA O, PILYUGIN S YU. *Limit shadowing property* [J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 1997, **18**: 75—92.

[7] 朱玉峻,何连法. 两类具有极限跟踪性的双曲系统 [J]. 系统科学与数学, 2003, **23**(3): 321—327.
ZHU Yu-jun, HE Lian-fa. *Two types of hyperbolic systems which have limit shadoving property* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 2003, **23**(3): 321—327. (in Chinese)

Strong Limit Shadowing Property of C^1 Flow on R^n without Singular Point

ZHU Yu-jun, ZHENG Hong-wen

(College of Math. Infor. Sci., Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: The main result of this paper is that there is a neighborhood of the hyperbolic set of a C^1 flow on R^n without singular point on which the flow has the strong limit shadowing property.

Key words: asymptotic pseudo orbit; strong limit shadowing property; C^1 flow; hyperbolic set.