第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

一类混合单调算子的不动点的存在唯一性*

许 绍 元[1,2]
(1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；2. 淮北煤炭师范学院数学系，安徽 淮北 235000)

摘 要：该文引入了φ凹-($-\psi$)凸算子，统一处理了一类具有某种凹凸性的混合单调算子，在非紧非连续条件下，得到了算子的不动点的存在唯一性和迭代收敛性，进而得到了具有α凹-Guo凸，凹-Guo凸，u_0凹-凸，u_0凹-($-\alpha$)凸或α_1凹-($-\alpha_2$)凸等性质的混合单调算子的新不动点定理.

关键词：锥与半序；φ凹-($-\psi$)凸算子；混合单调算子；Guo凸算子；不动点.
分类号：AMS(2000) 47H10/CLC number：O177.91
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0305-07

1 引言与定义

混合单调算子[1]是一类重要的非线性算子，广泛存在于非线性微分方程和积分方程研究中，研究混合单调算子一般需要考虑算子的某种紧性，连续性或凹凸性. 例如，文[1,2]要求算子具有某种紧性或连续性；[3－6]则要求算子具有某种凹凸性，从而彻底删去了紧性或连续性条件，得到了不动点存在唯一的好结果，其中[3－5]讨论了混合单调算子$A(x,y)$关于x与y具有相同类型的凹凸性，[6]则研究了$A(x,y)$关于x与y具有不同类型的凹凸性. 然而，在现有文献中，对于关于x与y具有某种凹凸性的二元算子$A(x,y)$，其不动点的存在唯一性研究尚未形成统一的方法. 本文引入φ凹-($-\psi$)凸算子后，统一处理了这些具有凹凸性(无论凹凸性类型是否相同)的混合单调算子，在非紧非连续假设下，采用单调迭代技巧，得到了不动点的存在唯一性和迭代收敛性，进而得到了具有α凹-Guo凸，凹-Guo凸，u_0凹-凸，u_0凹-($-\alpha$)凸或α_1凹-($-\alpha_2$)凸等性质的混合单调算子的新不动点定理.

设E是实Banach空间，θ是E中的零元，P是E中的锥[7,8]，$\leqslant$是由P定义的半序，即$\forall\ x,y\in P$若$y-x\in P$，则$x\leqslant y$. 锥P称为正规锥，如果存在常数$M>0$，使得$\theta\leqslant x\leqslant y(x,y\in E)$蕴含$\|x\|\leqslant M\|y\|$；$P$称为体锥，如果$P$中含有内点，即$\dot{P}\neq\phi$.

设$D\subset E$. $A:D\times D\to E$称为混合单调算子，如果$A(x,y)$关于x单调递增，关于y单调递减，即$x_i,y_i\in D(i=1,2)$，$x_1\leqslant x_2$，$y_2\leqslant y_1$蕴含$A(x_1,y_1)\leqslant A(x_2,y_2)$. 若存在$x\in D$，使

* 收稿日期：2002-07-08
基金项目：国家自然科学基金(10171116)，广东省自然科学基金(011221)，安徽省教育厅重点科研项目(2003kj047zd)资助.
作者简介：许绍元(1964-)，博士研究生，副教授.

$A(x,x)=x$,则称 x 为 A 的不动点.

设 $u,v\in E$ 且 $u<v$. 称 $[u,v]=\{x\in E|u\leqslant x\leqslant v\}$ 为序区间. 设 $h>\theta$,记 $P_h=\{x\in E|\exists\ \lambda,\mu>0$ 使得 $\lambda h\leqslant x\leqslant \mu h\}$,显然若 P 是体锥,$h\in\dot{P}$,则 $P_h=\dot{P}$. 设 $u_0>\theta$,称 $A:P\to P$ 为 u_0- 凹算子[7],如果满足

(i) A 是 u_0- 正的,即 $A(P\backslash\{\theta\})\subset P_{u_0}$;

(ii) $\forall\ x\in P_{u_0}$,$0<t<1$,存在 $\eta=\eta(t,x)>0$ 使得

$$A(tx)\geqslant(1+\eta)tAx, \tag{1}$$

并称 $\eta=\eta(t,x)$ 为 A 的特性函数.

算子 $A:D\subset E\to E$ 称为凸的[9],如果对任意 $x,y\in D$,$x\leqslant y$,$x\in[0,1]$有

$$A(tx+(1-t)y)\leqslant tAx+(1-t)Ay;$$

A 称为凹算子,如果 $-A$ 是凸的.

设算子 $A:\dot{P}\to\dot{P}$,$0\leqslant\alpha<1$. A 称为 α 凹($(-\alpha)$凸)算子[7,8],如果满足

$$A(tx)\geqslant t^{\alpha}Ax(A(tx)\leqslant t^{-\alpha}Ax),\forall\ x\in\dot{P},0<t<1.$$

定义 1 设 $A:D\subset E\to E$,称 A 为 Guo-凸算子,若$\forall\ x\in D$ 以及 $0<t<1$,$\exists\ \eta=\eta(t,x)>0$,使得

$$A(tx)\leqslant[t(1+\eta)]^{-1}Ax \tag{2}$$

成立,其中 η 称为 A 的特性函数.

定义 2 设 $A:D\times D\to E$ 是二元算子,称 A 是 φ凹-$(-\psi)$凸算子,如果存在函数 $\varphi:(0,1]\times D\to(0,+\infty)$以及 $\psi:(0,1]\times D\to(0,+\infty)$,满足当 $0<t<1$,$x\in D$ 时有 $t<\varphi(t,x)\psi(t,x)<1$,并且使得以下两个条件成立:

$$(\mathrm{H_1})\quad A(tx,y)\geqslant\varphi(t,x)A(x,y),\forall\ t\in(0,1),(x,y)\in D\times D \tag{3}$$

$$(\mathrm{H_2})\quad A(x,ty)\leqslant\frac{1}{\psi(t,y)}A(x,y),\forall\ t\in(0,1),(x,y)\in D\times D. \tag{4}$$

2 主要结果

引理 1 设 P 是 E 中的正规锥,$u_0,v_0\in E$,$u_0<v_0$,$A:[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to E$ 是混合单调算子. 若 A 是 φ凹-$(-\psi)$凸算子,且满足

(i) 存在 $r_0>0$,使得 $u_0\geqslant r_0v_0$;

(ii) $u_0\leqslant A(u_0,v_0)$,$A(v_0,u_0)\leqslant v_0$; (5)

(iii) $\varphi(t,x)$,$\psi(t,x)$关于 x 同时递增(或递减),关于 x 左连续.

则 A 在$[u_0,v_0]$中有唯一不动点 x^*,对任何 $x_0,y_0\in[u_0,v_0]$,作迭代序列

$$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1}),y_n=A(y_{n-1},x_{n-1}) \tag{6}$$

都有 $x_n\to x^*$,$y_n\to x^*(n\to\infty)$.

证明 先证不动点的存在性和迭代收敛性. 令

$$u_n=A(u_{n-1},v_{n-1}),v_n=A(v_{n-1},u_{n-1}),n=1,2\cdots \tag{7}$$

由题设可知

$$u_0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_2\leqslant v_1\leqslant v_0.$$

显然 $0<r_0\leqslant 1$，不妨 $r_0\neq 1$. 由 $u_0\geqslant r_0v_0$ 以及 A 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸混合单调算子，易知

$$u_1 = A(u_0,v_0) \geqslant A(r_0v_0,v_0) \geqslant \varphi(r_0,v_0)A(v_0,v_0), \tag{8}$$

$$v_1 = A(v_0,u_0) \leqslant A(v_0,r_0v_0) \leqslant A(v_0,v_0)/\psi(r_0,v_0). \tag{9}$$

由(8)(9)，有 $u_1\geqslant r_1v_1$，其中 $r_1=\varphi(r_0,v_0)\psi(r_0,v_0)$. 据归纳法，易见

$$u_n \geqslant r_nv_n, n = 1,2\cdots, \tag{10}$$

其中 $r_n=\varphi(r_{n-1},v_{n-1})\psi(r_{n-1},v_{n-1})$. 显然数列 $\{r_n\}$ 严格递增且 $\{r_n\}\subset(0,1)$. 设 $r_n\to r(n\to\infty)$，则 $r=1$. 否则 $0<r<1$，于是由条件(iii)，不妨 $\varphi(t,x)$，$\psi(t,x)$ 都关于 x 单调递增，则

$$r_n = \varphi(r_{n-1},v_{n-1})\psi(r_{n-1},v_{n-1}) \geqslant \varphi(r_{n-1},u_0)\psi(r_{n-1},u_0). \tag{11}$$

在(11)中令 $n\to\infty$ 得

$$r \geqslant \lim_{s\to r-}\varphi(s,u_0)\psi(s,u_0) = \varphi(r,u_0)\psi(r,u_0) > r,$$

矛盾，故 $r=1$. 于是 $\forall\ n,p\geqslant 1$ 有

$$\theta \leqslant v_n - u_n \leqslant v_n - r_nv_n = (1-r_n)v_n \leqslant (1-r_n)v_0;$$

$$\theta \leqslant u_{n+p} - u_n \leqslant v_n - u_n, \theta \leqslant v_n - v_{n+p} \leqslant v_n - u_n.$$

由 P 的正规性易见 $v_n-u_n\to 0(n\to\infty)$，故 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列. 因此 $\exists\ u^*,v^*\in E$ 使 $u_n\to u^*$，$v_n\to v^*(n\to\infty)$ 且 $u^*=v^*$. 记 $x^*=u^*=v^*$，由(6)及 A 的混合单调性不难归纳出

$$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n, u_n \leqslant y_n \leqslant v_n, n = 0,1,2.\cdots. \tag{12}$$

在(12)中令 $n\to\infty$，得 $x_n\to x^*(n\to\infty)$，$y_n\to x^*(n\to\infty)$ 且 $u_n\leqslant x^*\leqslant v_n$，$n=0,1,2,\cdots$. 下证 $A(x^*,x^*)=x^*$. 一方面，

$$A(x^*,x^*) \geqslant A(u_n,v_n) = u_{n+1} \to x^*, A(x^*,x^*) \geqslant x^*.$$

另一方面，

$$A(x^*,x^*) \leqslant A(v_n,u_n) = v_{n+1} \to x^*, A(x^*,x^*) \leqslant x^*,$$

即 $A(x^*,x^*)=x^*$，故 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有不动点 x^*.

再证不动点的唯一性. 若存在 $\bar{x}\in[u_0,v_0]$ 使 $A(\bar{x},\bar{x})=\bar{x}$，由 A 的混合单调性有 $A(u_0,v_0)\leqslant A(\bar{x},\bar{x})\leqslant A(v_0,u_0)$，即 $u_1\leqslant\bar{x}\leqslant v_1$. 不难归纳出 $\forall\ n\geqslant 1$ 有，$u_n\leqslant\bar{x}\leqslant v_n$，令 $n\to\infty$ 得，$x^*\leqslant\bar{x}\leqslant x^*$，即 $\bar{x}=x^*$. □

利用引理 1 即可得到若干具有某种凹凸性(无论凹凸类型是否相同)的混合单调算子的不动点的存在唯一性.

定理 1 设 P 是正规体锥，$A:\dot{P}\times P$ 是混合单调算子，且满足

(i) $\exists\ u_0,v_0\in\dot{P}$，使得

$$u_0 \leqslant A(u_0,v_0), A(v_0,u_0) \leqslant v_0);$$

(ii) 对固定 y，$A(\cdot,y):\dot{P}\to P$ 是 α 凹的；对固定 x，$A(x,\cdot):P\to P$ 是 Guo-凸的，其特性函数为 $\eta=\eta(t,y)$ 满足(2)；

(iii) $\eta(t,y)$ 关于 y 单调，关于 t 左连续，并且有

$$\frac{1}{t^{\alpha}} - 1 < \eta(t,y) < \frac{1}{t^{1+\alpha}} - 1, \forall\ (t,x) \in (0,1)\times(u_0,v_0). \tag{13}$$

则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一不动点 x^*，且 $\forall\ (x_0,y_0)\in[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]$，迭代序列(6)，都有 $x_n\to$

$x^*, y_n \to x^* (n \to \infty)$.

证明 由题设,易知 $A:[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to P$ 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸算子,其中

$$\varphi(t,x) = t^a, \psi(t,y) = [1+\eta(t,y)]t, x,y \in [u_0,v_0], 0 < t < 1. \tag{14}$$

事实上,$\forall\ x,y\in[u_0,v_0]$,$0<t<1$,有

$$A(tx,y) \geqslant t^a A(x,y) = \varphi(t,x)A(x,y),$$

$$A(x,ty) \leqslant \frac{1}{t[1+\eta(t,y)]}A(x,y) = \frac{1}{\psi(t,y)}A(x,y).$$

其中 $\varphi(t,x)$,$\psi(t,y)$ 满足(14),再由(13)式即知 $t<\varphi(t,x)\psi(t,x)<1$;又由 $u_0,v_0\in\dot{P}$,即知存在 $r_0>0$,使得 $u_0\geqslant r_0v_0$. 由引理1即知定理1结论成立. □

定理 2 设 P 是正规体锥,$A:P\times\dot{P}\to\dot{P}$ 是混合单调算子,且满足

(i) $\exists\ u_0,v_0\in\dot{P}$,使得

$$u_0 \leqslant A(u_0,v_0), A(v_0,u_0) \leqslant v_0;$$

(ii) 对固定 y,$A(\cdot,y):P\to\dot{P}$ 是凹的;对固定 x,$A(x,\cdot):P\to P$ 是Guo-凸的,其特性函数 $\eta=\eta(t,x)$ 满足(2).

(iii) $\eta(t,x)$ 关于 x 单调,关于 t 左连续,并且 $\exists\ \varepsilon>0$,使得 $A(\theta,v_0)\geqslant\varepsilon A(v_0,u_0)$,满足 $\forall\ (t,x)\in(0,1)\times[u_0,v_0]$,都有

$$\frac{1}{t+\varepsilon(1-t)} - 1 < \eta(t,x) < \frac{1}{t^2+\varepsilon t(1-t)} - 1. \tag{15}$$

则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一不动点 x^*,且 $\forall\ (x_0,y_0)\in[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]$,迭代序列(6)都有 $x_n\to x^*, y_n\to x^*(n\to\infty)$.

证明 可以验证 $A:[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to P$ 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸算子,且满足引理1的全部条件,其中

$$\varphi(t,x) = t+\varepsilon(1-t), \psi(t,y) = [1+\eta(t,y)]t, t\in(0,1), x,y\in[u_0,v_0]. \tag{16}$$

事实上 $\forall\ x,y\in[u_0,v_0]$,$0<t<1$,由题设有

$$\begin{aligned}A(tx,y) &= A[tx+(1-t)\theta,y] \geqslant tA(x,y)+(1-t)A(\theta,y)\\ &\geqslant tA(x,y)+(1-t)A(\theta,v_0) \geqslant tA(x,y)+\varepsilon(1-t)A(v_0,u_0)\\ &\geqslant tA(x,y)+\varepsilon(1-t)A(x,y) = \varphi(t,x)A(x,y)\end{aligned}$$

$$A(x,ty) \leqslant \frac{1}{[1+\eta(t,y)]t}A(x,y) = \frac{1}{\psi(t,y)}A(x,y);$$

其中 $\varphi(t,x)$,$\psi(t,y)$ 满足(16). 再由(15)式即知 $t<\varphi(t,x)\psi(t,x)<1$,于是 A 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸算子;又由 $u_0,u_0\in\dot{P}$,即知存在 $r_0>0$,使得 $u_0\geqslant r_0v_0$,因此由引理1即知定理2结论成立. □

定理 3 设 P 是正规体锥,$u_0>\theta$,$A:P\times\dot{P}\to\dot{P}$ 是混合单调算子,且满足

(i) $\exists\ u,v\in P_{u_0}$,使得

$$u \leqslant A(u,v), A(v,u) \leqslant v;$$

(ii) 对固定 y,$A(\cdot,y):P\to\dot{P}$ 是 u_0-凹的,其特性函数 $\eta=\eta(t,x)$ 满足(1);对固定 x,$A(x,\cdot):\dot{P}\to\dot{P}$ 是 $(-\alpha)$ 凸的;

(iii) $\eta(t,x)$ 关于 x 单调,关于 t 左连续,并且有

$$\frac{1}{t^{\alpha}}-1<\eta(t,x)<\frac{1}{t^{1+\alpha}}-1, \forall\ (t,x)\in(0,1)\times(u,v). \tag{17}$$

则 A 在 $[u,v]$ 中有唯一不动点 x^*，且 $\forall\ (x_0,y_0)\in[u,v]\times[u,v]$，迭代序列(6)都有 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*$，$(n\to\infty)$.

证明 由题设，易知 $A:[u,v]\times[u,v]\to P$ 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸算子，其中 $\varphi(t,x)=[1+\eta(t,x)]t$，$\psi(t,y)=t^{\alpha}$，$t\in(0,1)$，$x,y\in[u,v]$. 又由 $u,v\in P_{u_0}$，即知 $\exists\ r_0>0$，使得 $u\geqslant r_0v$. 由引理 1 即知定理 3 结论成立. □

定理 4 设 P 是正规体锥，$u_0>\theta$，$A:P\times P\to P$ 是混合单调算子，且满足

(i) $\exists\ u,v\in P_{u_0}$，$u<v$ 使

$$u\leqslant A(u,v),A(v,u)\leqslant v;$$

(ii) 对固定 y，$A(\cdot,y):P\to P$ 是 u_0- 凹的，其特性函数 $\eta=\eta(t,x)$ 满足(1)；对固定 x，$A(x,\cdot):P\to P$ 是凸的.

(iii) $\eta(t,x)$ 关于 x 单调，关于 t 左连续，并且 $\exists\ \varepsilon>0$，使得 $A(u,v)\geqslant\varepsilon A(v,\theta)$，满足 $\forall\ (t,x)\in(0,1)\times[u,v]$，有

$$\frac{(1-t)(1-\varepsilon)}{\varepsilon}<\eta(t,x)<\frac{1-t}{\varepsilon t}. \tag{18}$$

则 A 在 $[u,v]$ 中有唯一不动点 x^*，且 $\forall\ (x_0,y_0)\in[u,v]\times[u,v]$，迭代序列(6)都有 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*(n\to\infty)$.

证明 可以验证 $A:[u,v]\times[u,v]\to P$ 是 φ 凹-$(-\psi)$ 凸算子，且满足引理 1 的全部条件，其中

$$\varphi(t,x)=[1+\eta(t,x)]t,\psi(t,y)=\frac{\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)t},t\in(0,1),x,y\in[u,v]. \tag{19}$$

事实上，$\forall\ t\in(0,1)$，$(x,y)\in[u,v]\times[u,v]$，由题设有

$$\begin{aligned}
&A(tx,y)\geqslant[1+\eta(t,x)]tA(x,y);\\
&A(x,ty)=A(x,ty+(1-t)\theta)\leqslant tA(x,y)+(1-t)A(x,\theta)\\
&\qquad\leqslant tA(x,y)+(1-t)A(v,\theta)\leqslant tA(x,y)+\frac{1-t}{\varepsilon}A(u,v)\\
&\qquad\leqslant tA(x,y)+\frac{1-t}{\varepsilon}A(x,y)=\frac{1}{\psi(t,y)}A(x,y),
\end{aligned}$$

其中 $\varphi(t,x)$，$\psi(t,y)$ 满足(19)，再由(18)式即知 $t<\varphi(t,x)\psi(t,x)<1$；由 $u,v\in P_{u_0}$，即知 $\exists\ r_0>0$，使得 $u\geqslant r_0v$；故由引理 1 即知定理 4 结论成立. □

类似地，由引理 1，我们有

定理 5 设 P 是正规体锥，$A:\dot{P}\times\dot{P}\to\dot{P}$ 是混合单调算子，且满足

(i) 对固定 y，$A(\cdot,y):\dot{P}\to\dot{P}$ 是 α_1 凹算子，对固定 x，$A(x,\cdot):\dot{P}\to\dot{P}$ 是 $(-\alpha_2)$ 凸算子，其中 $0\leqslant\alpha_1+\alpha_2<1$.

(ii) $\exists\ u_0,v_0\in\dot{P}$，$u_0<v_0$ 使得

$$u_0\leqslant A(u_0,v_0),A(v_0,u_0)\leqslant v_0.$$

则 A 在 $[u_0,v_0]$ 中有唯一不动点 x^*，且 $\forall\ (x_0,y_0)\in[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]$，迭代序列(6)都有 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*(n\to\infty)$.

注 1 Guo-凸算子广泛存在于非线性微分方程和积分方程研究中[10]，因此研究具有 Guo-凸性质的算子的不动点存在唯一性具有重要意义.

注 2 定理 1 与定理 2 解决了混合单调算子 $A(x,y)$关于 x α 凹，关于 yGuo-凸和 $A(x,y)$关于 x 凹，关于 yGuo-凸时，A 的不动点存在唯一性问题；定理 3 与定理 4 得到了混合单调算子 $A(x,y)$关于 x u_0-凹，关于 y 凸或$(-\alpha)$凸时，A 的不动点存在唯一性与迭代收敛性.

注 3 定理 5 讨论了混合单调算子 $A(x,y)$ 关于 x α_1 凹，关于 y $(-\alpha_2)$ 凸时算子方程 $A(x,x)=x$ 存在唯一性，其特点并不要求 α_1 与 α_2 相同，这与文献[3]有本质的不同，而且证明技巧也不一样.

注 4 由引理 1 可直接导出文[5]中定理 1 以及[6]中定理 1 和定理 2，因此引理 1 能够统一处理具有某种凹凸性(无论凹凸性是否相同)的混合单调算子.

注 5 在引理 1 中，当 $A(x,y)$与 x 无关(与 y 无关)即得一元减(增)算子的重要不动点定理，从而推广了文[9,11,12]中的有关结论. 因此本文引理 1 推广了[5]定理 1，[6]定理 1 和定理 2，[9]引理 2.1，[11]定理 1 和[12]引理 1.

致谢 衷心感谢周作领教授的悉心指导；同时感谢李国祯教授和贾保国副教授的关心和鼓励.

参考文献：

[1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. *Coupled fixed points of nonlinear operators with Applications* [J]. Nonlinear Analysis. TMA, 1978, **11**(5): 623—632.

[2] SUN Yong. *A fixed point theorem for mixed monotone operators with applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **156**: 240—252.

[3] GUO Da-jun. *Fixed point of mixed monotone operators with applications* [J]. Appl. Anal., 1988, **31**: 215—224.

[4] GUO Da-jun. *Existence and uniqueness of positive fixed point for mixed monotone operators and applications* [J]. Appl. Anal., 1992, **46**(1—2): 91—100.

[5] ZHANG Zhi-tao. *New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **204**(1): 307—310.

[6] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报, 1998, **41**(6): 1121—1126.
ZHANG Zhi-tao. *Fixed Pointoet theorems of mixed monotone operators and its applications* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(6): 1121—1126. (in Chinese).

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科技出版社, 1985.
GUO Da-jun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Sci. Tech. Publishing House, 1985. (in Chinese).

[8] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. *Nonlinear problems in abstract cones* [M]. Academic Press. Inc, Boston and New York, 1988.

[9] 杜一宏. 一类非紧算子的不动点及其应用 [J]. 数学学报, 1989, **32**(5): 618—627.
DU Yi-hong. *Fixed points of a class of noncompact operators and applications* [J]. Acta Math. Sinica, 1989, **32**(5): 618—627. (in Chinese).

[10] 郭大钧. 核物理中一个非线性方程的解 [J]. 科学通报, 1978, **23**: 27—31.

GUO Da-jun. *The solution of a nonlinear in tegral equation in nuclear physics* [J]. Kexue Tongbao, 1978, **23**: 27—31. (in Chinese).

[11] 张志涛. 一类非紧减算子的不动点定理及其应用 [J]. 系统科学与数学, 1998, **18**(4): 422—426.
ZHANG Zhi-tao. *Fixed point theroms of a class of noncompact decreasing operators and applications* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1998, **18**(4): 422—426. (in Chinese).

[12] 李福义,冯锦锋,沈沛龙. 一类减算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报, 1999, **42**(2): 193—196.
LI Fu-yi, FENG Jin-feng, SHEN Pei-long. *Fixed point theorems of some decreasing operators and applications* [J]. Acta Math. Sinica, 1999, **42**(2): 193—196. (in Chinese).

Existence and Uniqueness of Fixed Points of a Class of Mixed Monotone Operators

XU Shao-yuan[1,2]

(1. Mathematical and Computational School of Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;
2. Dept. of Math., Huaibei Coal Industry Teachers' College, Anhui 235000, China)

Abstract: In this paper, the definition of φ-concave-(ψ-)-convex operator is introduced, and a class of mixed monotone operators with certain concavity and convexity properties are discussed. Without any compactness or continuity of the operators, the existence and uniqueness for the fixed point of the operators is obtained. As corollaries, some new results about these operators are produced.

Key words: cone and semiorder; φ-concave-(-ψ)-convex operator; mixed monotone operator; Guo-convex operator; fixed point.