第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

偶数阶时滞微分方程的单调解*

欧阳自根[1]， 李永昆[2]
(1. 南华大学数理学院，湖南 衡阳 421001；2. 云南大学数学系，云南 昆明 650091)

摘 要：使用一种新技巧，研究了两类偶数阶时滞微分方程的单调正解的存在性，得到了方程存在单调正解的一些充要条件和充分条件。

关键词：时滞微分方程；非负解；单调正解.
分类号：AMS(2000) 34K26,35B05/CLC number：O175.2
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0321-07

1 引 言

考察高阶时滞微分方程

$$(r(t)x^{(n-1)}(t))'+q(t)x(\lambda t)=0,\ t\geqslant t_0, \tag{1.1}$$

及

$$(r(t)x^{(n-1)}(t))'+q(t)x(t-\sigma)=0,\ t\geqslant t_0. \tag{1.2}$$

本文总假设：

(A_1) n 为偶数，$r(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty))$，$q(t)\in C([t_0,\infty)(t_0,\infty))$，且 $q(t)$ 在任意区间 (t_1,∞) 上不恒为 0；

(A_2) $o<\lambda<1$；

(A_3) $\sigma\geqslant 0$；

(A_4) $r(t)$ 非减，且 $\int^{\infty}\frac{1}{r(t)}\mathrm{d}t=\infty$.

有关低阶方程的单调解的存在性已有一些研究[1,3,4]，最近 $W.T.Li$ 及 $X,L.Fan$[2] 研究了下述方程及积分不等式：

$$[r(t)(y'(t)^{\alpha}]'+q(t)(y(t))^{\alpha}=0,\quad t\geqslant t_0, \tag{1.3}$$

$$w(t)\geqslant\int_t^{\infty}w(s)F(w(s),r(s),\alpha)\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}q(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant t_0. \tag{1.4}$$

其中 $F(x,y,z)=z(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$.

---

* 收稿日期：2001-11-13
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19875083)
作者简介：欧阳自根(1965-)，博士研究生，副教授.

文[2]指出，若$\int^{\infty} q(t)\mathrm{d}t$存在，则(1.3)有非减正解$y(t)$的充要条件是(1.4)有一个非负的连续解$w(t)$. 本文就方程(1.1)，(1.2)的单调正解的存在性进行了研究，利用一种新技巧，得到了方程存在单调解的充要条件.

为了方便起见，我们引入下列积分不等式

$$w(t) \geqslant \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{l-1}(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!} \frac{s^{n-2}}{r(s)} w^2(s)\mathrm{d}s + \int_t^{\infty} q(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant t_0, \tag{1.5}$$

$$w(t) \geqslant \int_t^{\infty} \frac{\sigma^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!} \frac{s^{n-2}}{r(s)} w^2(s)\mathrm{d}s + \int_t^{\infty} q(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant t_0. \tag{1.6}$$

其中l是$\{0,1,\cdots,n-1\}$中的某个数，当n是奇数时，l为偶数，当n是偶数时，l为奇数.

2 几个引理

我们首先引入一个引理

引理 2.1[5] 设$x(t)$是R^+中同号的n次可微函数，$y^{(n)}(t)$在任一区间(t_1,∞)上不恒为零，且

$$y^{(n)}(t)y(t) \leqslant 0. \tag{2.1}$$

则当n是偶数时，存在一个正数$l \in \{1.3.5\cdots,n-1\}$；当$n$是奇数时，存在一个正数$l \in \{0.2.4.\cdots,n-1\}$使得

$$\begin{aligned} & y(t)y^{(j)}(t) > 0, j = o,1,\cdots,l, \\ & (-1)^{n+j-1}y(t)y^{(j)}(t) > 0, j = l+1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

引理 2.2 若$x(t)$是方程(1.1)或方程(1.2)的一个正解，则最终有$x^{(n)}(t) \leqslant 0, x^{(n-1)}(t) > 0$.

利用文献[1]中引理2，引理3类似的方法可以得到证明.

引理 2.3 假设引理2.1成立，则对任意的λ，$(0<\lambda<1)$，满足

$$|y'(\lambda t)| \geqslant \frac{\lambda^{l-1}(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!} t^{n-2} |y^{(n-1)}(t)|, \tag{2.3}$$

$$|x'(t-\sigma)| \geqslant \frac{\sigma^{n-1}}{2^{l-1}!(n-1-l)!} t^{l-1} |x^{(n-1)}(t)|. \tag{2.4}$$

证明 我们只需证明(2.3).(2.4)的证明是类似的道理. 设$x(t)>0$，则由引理2.2知$y^{(n)}(t) \leqslant 0, y^{(n-1)}(t) > 0$，由引理2.1知，存在一个非负整数$l$，$1 \leqslant l \leqslant n-1$，使得(2.2)成立，由泰勒公式有

$$x'(s) = x'(t_n) + x''(t_n)(s-t_n) + \cdots + \frac{x^{(l)}(s^*)}{(l-1)!}(s-t_n)^{l-1} \geqslant \frac{x^{(l)}(s^*)}{(l-1)!}(s-t_n)^{l-1}.$$

这里$t_n \leqslant s^* \leqslant s$，因$x^{(l+1)}(s) < 0, s \in (t_n,\infty)$，得

$$x'(s) \geqslant \frac{\lambda^{(l)}(s)}{(l-1)!}(s-t_n)^{l-1}, \quad s > t_n.$$

令$\lambda t = s$，$0<\lambda<1$，则当t充分大时，存在一个$T \geqslant t_n$使得$\lambda - \frac{t_n}{t} > \frac{\lambda}{2}$，这样

$$x'(\lambda t) \geqslant \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\left(\lambda - \frac{t_n}{t}\right)^{l-1} x^{(l)}(\lambda t) \geqslant \frac{\lambda^{l-1}}{(l-1)!2^{l-1}} t^{l-1} x^{(l)}(\lambda t). \tag{2.5}$$

同时再次利用泰勒公式

$$x^{(l)}(\lambda t)=x^{(l)}(t)+(-1)\frac{x^{(l+1)}(t)}{l!}(t-\lambda t)+\cdots+$$
$$(-1)^{n-l-1}\frac{x^{(n-1)}(t^*)}{(n-l-1!)}(t-\lambda t)^{n-l-1}.$$

这里 $\lambda t\leqslant t^*\leqslant t$,这样由引理 2.1 得

$$x^{(l)}(\lambda t)\geqslant\frac{x^{(n-1)}(t^*)}{(n-l-1)!}(t-\lambda t)^{n-l-1}\geqslant\frac{x^{(n-1)}(t)}{(n-l-1)!}(t-\lambda t)^{n-l-1}$$
$$=\frac{(1-\lambda)^{n-l-1}}{(n-l-1)!}t^{n-l-1}x^{(n-1)}(t).$$

由 (2.5) 得

$$x'(\lambda t)\geqslant\frac{\lambda^{l-\lambda}(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}t^{n-2}x^{(n-1)}(t).$$

类似地可以证明 $x(t)<0$ 的情况,从而(2.3) 成立.

3 主要结论

我们先讨论方程(1.1) 的单调正解的存在性.

定理 3.1 设$\int^\infty q(s)\mathrm{d}s$ 存在,则方程(1.1) 有最终非减正解 $x(t)$ 当且仅当存在 l 满足(2.1) 使得(1.5) 有一个最终非负连续解 $w(t)$.

证明 若方程(1.1) 有一个非减正解 $x(t)$,令

$$w(t)=\frac{r(t)x^{(n-1)}(t)}{x(\lambda t)},t\geqslant t_0,\tag{3.1}$$

则 $w(t)$ 非负且满足

$$w'(t)=-q(t)-\frac{r(t)x^{(n-1)}(t)}{x(\lambda t)}\cdot\frac{\lambda x'(\lambda t)}{x(\lambda t)}.\tag{3.2}$$

由引理 2.3 即可得到

$$w'(t)\leqslant-q(t)-\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}t^{n-2}r^{-1}(t)w^2(t).\tag{3.3}$$

即有

$$w'(t)+\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}t^{n-2}r^{-1}(t)w^2(t)+q(t)\leqslant 0.$$

两边从 t 到 ∞ 求积分即得出

$$w(t)\geqslant\int_t^\infty\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}s^{n-2}r^{-1}(s)w^2(s)\mathrm{d}s+\int_t^\infty q(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant t_0$$

有一个非负连续解.

反之,若(1.5) 有一个非负连续解 $w(t)$,则$\int_t^\infty\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}\frac{s^{n-2}}{r(s)}w^2(s)\mathrm{d}s$ 收敛,定义算子

$$
(Tw)(t)=\begin{cases}\int_t^{\infty}\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!}\frac{s^{n-2}}{r(s)}w^2(s)\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}q(s)\mathrm{d}s, t\geqslant T,\\(Tw)(T),\qquad t_0\leqslant t<T.\end{cases}\tag{3.4}
$$

我们只须考察 $t\geqslant T$ 时的情况. 显然 $(Tw)(t)\in C((t_0,\infty),(0,\infty))$, 由(1.5)知

$$
(Tw)(t)\leqslant w(t), t\geqslant T,
$$

再定义一个序列:

$$
w_0(t)=\int_t^{\infty}q(s)\mathrm{d}s,\tag{3.5}
$$

以及

$$
w_{n+1}(t)=(Tw_n)(t), t\geqslant T, n=0,1,\cdots\tag{3.6}
$$

不难验证

$$
w_0(t)<w_1(t)\leqslant w_2(t)\leqslant\cdots\leqslant w_n(t)\leqslant\cdots\leqslant w(t), n\geqslant 0, t\geqslant t_0.
$$

再定义

$$
w(t)=\lim_{n\to\infty}w_n(t), t\geqslant t_0.
$$

由勒贝格控制收敛定理得到, 存在一个 w^* 满足

$$
w^*=Tw^*, w_0(t)<w^*(t)\leqslant w(t).
$$

从而由(3.4)及上式有

$$
w^*(x)=\int_t^{\infty}\frac{\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}s^{n-2}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!r(s)}w^2(s)\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}q(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant T.\tag{3.7}
$$

由于 $w^*(t)$ 最终非负, 则总存在一个正的函数 $x(t)$, 使得 $x^{(n-1)}(t)\geqslant 0$, 且满足

$$
w^*(t)=\frac{r(t)x^{(n-1)}(t)}{x(\lambda t)}.
$$

因 n 是偶数, 则存在奇数 n^*, 使得当 $k\leqslant n^*$ 时,

$$
x^{(k)}(t)\geqslant 0;
$$

当 $k<n^*\leqslant n-1$ 时,

$$
(-1)^{k-1}x^{(k)}(t)\geqslant 0.
$$

从而 $x(t)$ 最终为正, 且 $x(t)$ 最终非减, 由上式及(3.7)式有

$$
\begin{aligned}
w^{*\prime}(t)&=\frac{(r(t)x^{(n-1)}(t))'}{x(\lambda t)}-\frac{r(t)x^{(n-1)}(t)}{x(\lambda t)}\cdot\frac{\lambda x'(\lambda t)}{x(\lambda t)}\\
&=\frac{-\lambda^l(1-\lambda)^{n-l-1}t^{n-2}}{2^{l-1}(l-1)!(n-l-1)!r(t)}w^2(t)+q(t).
\end{aligned}
$$

再由引理 2.3 可知上式转化为

$$
\frac{(r(t)x^{(n-1)}(t))'}{x(\lambda t)}+q(t)\leqslant 0,
$$

从而

$$
(r(t)x^{n-1}(t))'+q(t)x(\lambda t)\leqslant 0\tag{3.8}
$$

有最终非减正解.

由 (3.8) 式可以得到

$$
x(t)\geqslant\int_T^t\frac{(t-s)^{(n^*-1)}}{(n^*-1)!}\int_s^{\infty}\frac{(u-s)^{n-n^*-2}}{(n-n^*-2)!}\frac{1}{r(u)}\int_u^{\infty}q(v)x(\lambda t)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}s.
$$

设

$$\Omega=\{z\in C((T-\mu,\infty),R^{+})0\leqslant z(t)\leqslant 1\}.$$

作 Ω 上的一个算子如下

$$(Sz)(t)=\begin{cases}\dfrac{t-T+\mu}{\mu}(Sz)(T)+(1-\dfrac{t-T+\mu}{\mu}),T-\mu\leqslant t<T,\\ \dfrac{1}{x(t)}\displaystyle\int_{T}^{t}\dfrac{(t-s)^{n^{*}-1}}{(n^{*}-1)!}\int_{s}^{\infty}\dfrac{(u-s)^{n-n^{*}-2}}{(n-n^{*}-2)!}\dfrac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty}q(v)x(\lambda t)z(\lambda v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}s;t\geqslant T.\end{cases}$$

利用[6]定理1类似的方法可以证得,存在一个最终正的函数 $x(t)$ 是方程

$$(r(t)x^{(n-1)}(t))'+q(t)x(\lambda t)=0$$

的一个最终正解.

再由[1]引理2,引理3可以得到,最终有 $x^{(n-1)}(t)>0,x^{(n)}(t)\leqslant 0$,又因为 n 是偶数,故由引理2.1可以得知 $x'(t)>0$,从而得 $x(t)$ 是方程(1.1)的一个最终非减正解.

我们再考察

$$(R(t)y^{(n-1)}(t))'+Q(t)y(\lambda t)=0,t\geqslant t_{0} \tag{3.9}$$

以及

$$(R(t)y^{(n-1)}(t))'+\lambda(t)Q(t)y(\lambda t)=0,t\geqslant t_{0}, \tag{3.10}$$

其中 $R(t),Q(t)$ 的定义类似于 $r(t),q(t)$,则有

定理 3.2 假设 $r(t)\geqslant R(t)>0,t\geqslant t_{0}$,且

$$\int_{t}^{\infty}q(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{t}^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s<\infty.$$

若(3.9)有一个最终非减正解,则(1.1)也有一个非减正解.

定理3.2的证明利用定理3.1的证明方法类似可以得到.

定理 3.3 设 $\int^{\infty}Q(t)\mathrm{d}t$ 存在,$r(t)\geqslant R(t)>0,t\geqslant t_{0}$,且

$$Q(t)\geqslant q(t),\quad t\geqslant t_{0}, \tag{3.11}$$

进一步假设 $\lambda(t)$ 可微且 $\lambda(t)\geqslant 1,\lambda'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_{0}$,若方程(3.10)有一个最终非减正解 $y(t)$,则(1.1)也有一个最终非减正解.

证明 由假设及定理3.1知

$$u'(t)+\frac{\lambda^{-1}(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!}\frac{t^{n-2}}{r(s)}u^{2}(t)+\lambda(t)Q(t)\leqslant 0. \tag{3.12}$$

有一个非负解 $u(t)$,两边同除以 $\lambda(t)$ 得

$$\frac{u'(t)}{\lambda(t)}+\frac{\lambda^{l-1}(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!}\frac{t^{n-2}}{r(t)}\frac{u^{2}(t)}{\lambda(t)}+q(t)\leqslant 0,$$

从而

$$\frac{u'(t)}{\lambda(t)}+\frac{\lambda^{l-1}(1-\lambda)^{n-1-l}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!}\frac{t^{n-2}}{r(t)}(\frac{u(t)}{\lambda(t)})^{2}+q(t)\leqslant 0. \tag{3.13}$$

令 $w(t)=\dfrac{u(t)}{\lambda(t)}$,从而 $w(t)\geqslant 0$,且有

$$\frac{u'(t)}{\lambda(t)}\geqslant(\frac{u(t)}{\lambda(t)})'=\frac{u'(t)}{\lambda(t)}-\frac{u(t)\lambda'(t)}{\lambda^{2}(t)},$$

代入到(3.13),从而推出

$$w'(t)+\frac{\lambda^{l-1}(1-\lambda)^{n-l-1}}{2^{l-1}(l-1)!(n-1-l)!}\frac{t^{n-2}}{r(t)}w^2(t)+q(t)\leqslant 0$$

有一个非负解.

由定理 3.1 即可得出方程(1.1)有一个非减最终正解. □

利用定理 3.3 类似的方法可以得到下面定理:

定理 3.4 设$\int^{\infty}q(s)\mathrm{d}s$存在,$0<r(t)\leqslant R(t),t\geqslant t_0$,且

$$Q(t)\leqslant q(t),t\geqslant t_0,$$

设$\lambda(t)$是可微函数,$0<\lambda(t)\leqslant 1$,且$\lambda'(t)\leqslant 0,t\geqslant t_0$,若(1.1)具有一个最终非减正解,则(3.10)也有一个最终非减正解.

下面我们讨论方程(1.2)的单调解的存在性.我们引入下列方程:

$$[R(t)y^{n-1}(t)]'+Q(t)y(t-\sigma)=0,\quad t\geqslant t_0,\tag{3.14}$$

$$[R(t)y^{n-1}(t)]'+\lambda(t)Q(t)y(t-\sigma)=0,\quad t\geqslant t_0,\tag{3.15}$$

其中$R(t),Q(t)$的定义类似于$r(t),q(t)$.

利用定理 3.1 至定理 3.4 类似的方法可以证明如下定理.

定理 3.5 假设$\int^{\infty}(s)\mathrm{d}s$存在,则方程(1.2)有一个最终非减正解当且仅当(1.6)有一个最终非负解.

定理 3.6 假设$r(t)\geqslant R(t)>0,t\geqslant t_0$,且

$$\int_t^{\infty}q(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s<\infty,$$

若(3.14)有一个最终非减正解,则(1.2)有一个最终非减正解.

定理 3.7 设$\int^{\infty}Q(t)\mathrm{d}t$存在,$r(t)\geqslant R(t)>0,t\geqslant t_0$,且

$$Q(t)\geqslant q(t),\quad t\geqslant t_0,$$

进一步假设$\lambda(t)$可微且$\lambda(t)\geqslant 1,\lambda'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_0$,若方程(3.15)有一个最终非减正解,则方程(1.2)有一个最终非减正解.

定理 3.8 设$\int^{\infty}q(s)\mathrm{d}s$存在,$0<r(t)\leqslant R(t),t\geqslant t_0$,且

$$Q(t)\leqslant q(t),t\geqslant t_0,$$

设$\lambda(t)$是可微函数,$0<\lambda(t)\leqslant 1$且$\lambda'(t)\leqslant 0,t\geqslant t_0$,若(1.2)具有一个最终非减正解,则(3.15)也有一个最终非减正解.

参考文献:

[1] LI W T, FEI X L. *Classifications and existence of positive solutions of higher-order nonlinear delay differential eguations* [J]. Nonlinear Analysis, 2000, **41**: 433−445.

[2] LI W T, FAN X L. *Monotone solutions of second-order nonlinear differrntial eguations* [J]. Appl. Math. Lett., 2000, **13**: 65−70.

[3] LI W T. *Positive solutions of second order nonlinear differential eguations* [J]. Math. Anal. Appl., 1998, **221**: 326−337.

[4] CHENG S S, ZHANG B G. *Monotone solutions of a class of nonlinear difference equations* [J]. Computers Math. Appl., 1994, **28**(1−3): 71−79.
[5] LADDE G S, LAKSHMIKANTHAM V, ZHANG B G. *Oscillation Theory of Differential Eguations with Deviating Arguments* [M]. Marcel Dekker, New York, 1987.
[6] ZHANG G. *Eventually positive solutions of odd order neutral differenfial equations* [J]. Appl. Math. Lett., 2000, **13**: 55−61.

Monotone Solutions of Even-Order Delay Differential Equations

OUYANG Zi-gen[1], LI Yong-kun[2]

(1. Dept. of Math. & Phys., Nanhua University, Hunan 421001, China;
2. Dept. of Math., Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: This paper deals with the existence of monotone solutions of even-order delay differntial equations. Some necessary and sufficent conditions and sufficient conditions for the equations to have monotone positive solutions are obtained.

Key words: delay differetial equation; nonnegative solution; monotone positive solution.