第 24 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 24 No. 2
2004 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2004

BCYB 代数的常个体及 ZY3 代数的简化刻画*

杨　永　保
(西北师范大学数学系，兰州 730070)

摘　要：证明了在等价意义下，BCYB 代数有常个体，同时还简化了 ZY3 代数的刻画规则.

关键词：BCYB 代数；ZY3 代数；常个体.
分类号：AMS(2000) 06F35/CLC number：O153.1
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0343-04

文[1]引入了 BCY 代数，其中关系"$\leqslant$"和"$=$"分别是拟序关系和等价关系. 而这些年正在发展着的 BCI 代数、BCK 代数，"$\leqslant$"和"$=$"分别表示偏序关系和通常的相等关系. 相比之下，BCY 代数的关系"$\leqslant$"和"$=$"要弱的多. 另一方面，BCI 代数、BCK 代数都含有一个常个体"0"(即极小元)，而 BCY 代数无常个体，特别需要指出的是 BCY 代数的字问题是能行可解的. 因此，BCY 代数系统的研究更具有普遍意义.

本文讨论的问题是 BCY 代数系统中的两类代数，BCYB 代数与 ZY3 代数，使用的记号及术语均见文[1]，[2].

BCY 代数的公理(模式)与原始规则有下列五个：

P1　$t \leqslant t$　(自反性)；

P2　$s \leqslant t, t \leqslant u \vdash s \leqslant u$(可传性)；

S1　$s \leqslant t, u \leqslant w \vdash s \dot{-} w \leqslant t \dot{-} u$(替换规则)；

S2　$(s \dot{-} t) \dot{-} (s \dot{-} u) \leqslant u \dot{-} t$；

S3　$s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$.

在 BCY 代数的公理上添加

S4　$s \dot{-} t \leqslant s$，

便得到 BCYB 代数(见文[1])，即 BCYB 代数一定是 BCY 代数，且由以上六条规则刻画.

需要说明的是，在 BCY 代数中：① 变元为项；② 若 s, t 为项，则 $s \dot{-} t$ 为项；③ 只有这些才是项，又若 s, t 为项，则 $s \leqslant t$ 为关系式，$s = t$ 表示关系 $s \leqslant t$ 且 $t \leqslant s$，这里的等号"$=$"仅仅表示等价关系，并非相等关系. 规则 $s = t \vdash u = w$ 指由 s 与 t 的等价推出 u 与 w 等价，即由 $s \leqslant t$

* 收稿日期：2001-08-24
基金项目：西北师范大学知识与科技创新工程资助项目(NWNU-KJCXGC-212)
作者简介：杨永保(1953-)，副教授.

和 $t \leqslant s$ 推出 $u \leqslant w$ 和 $w \leqslant u$.

我们知道BCYB代数与BCY代数的共同之处就是都没有常个体“0”. 因此,次序关系就不能用相等关系来定义,只有使用拟序关系(再由拟序关系定义等价关系),但是我们发现BCYB代数在等价意义下有一个常个体“0”. 若 $X = \{x,t,u,\cdots\}$ 是一个BCYB代数,则对任意的项 $x \in X$,有 $0 \leqslant x$,这是BCYB代数的一个很重要的特性.

定理1 设 $X = \{s,t,u,\cdots\}$ 是一BCYB代数,那么在项的等价意义下,有项 θ 属于 X,对任意的 $x \in X$,使得 $\theta \leqslant x$.

证明 首先证明BCYB代数的两条性质.

(a) $s \leqslant t \vdash u \dot{-} t \leqslant u \dot{-} s$(加头);

(b) $s \dot{-} t \leqslant u \vdash s \dot{-} u \leqslant t$.

据P1,$u \leqslant u$,若 $s \leqslant t$,据 $S1$,$u \dot{-} t \leqslant u \dot{-} s$,(a) 成立.

若 $s \dot{-} t \leqslant u$,据P1,(a),$s \dot{-} u \leqslant s \dot{-} (s \dot{-} t)$,再据S3,$s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$,再据P2,$s \dot{-} u \leqslant t$,(b) 成立.

由S4,$s \dot{-} x \leqslant s$,据(b),$s \dot{-} s \leqslant x$. 这说明当 x 遍历 X 时,$s \dot{-} s$ 是 X 的一个下界. 显然,对 $t \in X$,也有 $t \dot{-} t \leqslant x$. 因此,对 X 中的项 $s,t,u,\cdots$,讲,$s \dot{-} s, t \dot{-} t, u \dot{-} u,\cdots$ 都是 X 的下界,它们是等价的. 事实上,由S4,$s \dot{-} (t \dot{-} t) \leqslant s$,据(b)得,$s \dot{-} s \leqslant t \dot{-} t$,同理,$t \dot{-} t \leqslant s \dot{-} s$,故 $s \dot{-} s = t \dot{-} t$,即 $s \dot{-} s$ 与 $t \dot{-} t$ 是等价的. 令 $s \dot{-} s = \theta$,于是在项的等价意义下,对任意的 $x \in X$,有 $\theta \leqslant x$. □

文[2]在BCY代数的基础上又给出了各种ZY3代数,本文探讨了ZY3代数的公理系统,给出了两个简化刻画.

ZY3代数的基本概念与项的组成都同BCY代数,但它有一个常个数“0”,故是BCY代数的加强系统. 但还是弱于BCI代数、BCK代数.

ZY3代数的公理(模式)与原始规则有:

P1 $t \leqslant t$(自反性);

P2 $s \leqslant t, t \leqslant u \vdash s \leqslant u$(可传性);

S1 $s \leqslant t, u \leqslant w \vdash s \dot{-} w \leqslant t \dot{-} u$(替换规则);

S2 $(s \dot{-} t) \dot{-} (s \dot{-} u) \leqslant u \dot{-} t$;

S3 $s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$;

Z1 $t \dot{-} 0 \leqslant t$;

Z2 $t \leqslant t \dot{-} 0$.

ZY3代数是由BCY代数添加公理Z1,Z2得到,它是由以上七条公理刻画的,实际上我们可看出,由P2,Z1,Z2可推出P1来. 事实上,据Z2,Z1,$t \leqslant t \dot{-} 0$,$t \dot{-} 0 \leqslant t$,据P2,$t \leqslant t$.

下面我给出一个等价的刻画系统,它是由六条公理来刻画的,去掉了较复杂的替换规则S1.

定理2 代数系统 $\langle X; \dot{-}, \leqslant, 0 \rangle$ 是ZY3代数的充分必要条件是它满足

P2 $s \leqslant t, t \leqslant u \vdash s \leqslant u$(可传性);

(a) $s \leqslant t \vdash u \dot{-} t \leqslant u \dot{-} s$(加头);

S2 $(s \dot{-} t) \dot{-} (s \dot{-} u) \leqslant u \dot{-} t$;

S3 $s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$;

Z1 $t \dot{-} 0 \leqslant t$.

Z2 $t \leqslant t \dot{-} 0$.

证明 必要性. 若 X 是 ZY3 代数，则一定是 BCY 代数，于是 X 满足 P1，即 $t \leqslant t$. X 也满足 S1，即 $s \leqslant t, u \leqslant w \mid\!- s \dot{-} w \leqslant t \dot{-} u$.

已知 $u \leqslant u$，若 $s \leqslant t$，据 S1，$u \dot{-} t \leqslant u \dot{-} s$；(a) 成立. P2，S2，S3，Z1，Z2 显然是成立的.

充分性. 若 X 满足 P2，(a)，S2，S3，Z1，Z2. 要证 X 满足 P1，S1.

由 Z1，Z2 得，$t \leqslant t \dot{-} 0$，$t \dot{-} 0 \leqslant t$. 据 P2，$t \leqslant t$，P1 成立.

再证 S1 成立. 先证三个有用的规则.

(b) $s \dot{-} t \leqslant u \mid\!- s \dot{-} u \leqslant t$;

(c) $s \leqslant t \mid\!- s \dot{-} t \leqslant 0$;

(d) $s \leqslant t \mid\!- s \dot{-} u \leqslant t \dot{-} u$.

若 $s \dot{-} t \leqslant u$，据 P1，(a)，$s \dot{-} u \leqslant s \dot{-} (s \dot{-} t)$. 据 S3，$s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$，据 P2，$s \dot{-} u \leqslant t$，(b) 成立.

由 Z1，$s \dot{-} 0 \leqslant s$. 若 $s \leqslant t$，据 P2，$s \dot{-} 0 \leqslant t$，再据 (a)，$s \dot{-} t \leqslant 0$，(c) 成立. 若 $s \leqslant t$，由 (c)，$s \dot{-} t \leqslant 0$. 据 S2，$(s \dot{-} u) \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t \dot{-} u$. 据 (b)，$(s \dot{-} u) \dot{-} (t \dot{-} u) \leqslant s \dot{-} t$. 据 P2，$(s \dot{-} u) \dot{-} (t \dot{-} u) \leqslant 0$. 再据 (b)，$(s \dot{-} u) \dot{-} 0 \leqslant (t \dot{-} u)$. 据 Z2，$(s \dot{-} u) \leqslant (s \dot{-} u) \dot{-} 0$. 据 P2，$(s \dot{-} u) \leqslant (t \dot{-} u)$，(d) 成立.

现在证 S1 成立. 若 $s \leqslant t, u \leqslant w$，则据 (d) 和 (a) 分别有，$(s \dot{-} u) \leqslant (t \dot{-} u)$，$(s \dot{-} w) \leqslant (s \dot{-} u)$，据 P2，$(s \dot{-} w) \leqslant (t \dot{-} u)$，S1 成立. □

更进一步，我们有

定理 3 ZY3 代数由下列五条规则组成：

P2 $s \leqslant t, t \leqslant u \mid\!- s \leqslant u$（可传性）；

S2 $(s \dot{-} t) \dot{-} (s \dot{-} u) \leqslant u \dot{-} t$;

(b) $s \dot{-} t \leqslant u \mid\!- s \dot{-} u \leqslant t$;

Z1 $t \dot{-} 0 \leqslant t$;

Z2 $t \leqslant t \dot{-} 0$.

证明 只需证明定理 2 与定理 3 等价即可.

定理 2⇒ 定理 3 显然 P2，S2，Z1，Z2 都是定理 2 中的规则，只需证明 (b) 成立即可. 由定理 2 的充分性证明过程知 (b) 成立.

定理 3⇒ 定理 2 只要证明 S3，(a) 成立即可. 由 Z1，Z2，P2 知 $t \leqslant t$，即 P1 成立，据 P1，$s \dot{-} t \leqslant s \dot{-} t$，再据 (b)，$s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$，S3 成立.

据 Z1，$s \dot{-} 0 \leqslant s$，若 $s \leqslant t$，据 P2，$s \dot{-} 0 \leqslant t$ 再据 (b)，$s \dot{-} t \leqslant 0$. 由 S2，$(u \dot{-} t) \dot{-} (u \dot{-} s) \leqslant s \dot{-} t$. 所以，当 $s \leqslant t$ 时，$(u \dot{-} t) \dot{-} (u \dot{-} s) \leqslant 0$. 据 (b)，$(u \dot{-} t) \dot{-} 0 \leqslant u \dot{-} s$. 再据 Z2，P2，$(u \dot{-} t) \leqslant u \dot{-} s$. 这说明，$s \leqslant t \mid\!- (u \dot{-} t) \leqslant u \dot{-} s$，(a) 成立. □

参考文献：

[1] 沈百英. 减法系统Ⅰ—各种 BCY 代数和它们的字问题 [J]. 数学学报, 1986, **29**(1): 112—116.
SHEN bai-ying. *The subtraction system-every BCY algebras and their question of word* [J]. Acta Math. Sinica, 1986, **29**(1): 112—116. (in Chinese)

[2] 沈百英. 含 0 的减法系统——各种 ZY 代数和它们的字问题 [J]. 数学年刊 A 辑, 1986, **7**(1): 113—116.
SHEN bai-ying. *The subtraction system contains the zero-every ZY algebras and their question of word* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1986, **7**(1): 113—116. (in Chinese)

[3] ISEKI K. *On BCI-algbras* [J]. Math. Seminar Notes Kobe Univ., 1980, **8**: 125—130.

Constant Indidual of BCYB Algebra and Simply Characterization of ZY3 Algebra

YANG Yong-bao

(Dept. of Math., Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we prove that there is a constant individual in the sense of equivalence in BCYB algebras. Some simplified characterizations of ZY3 algebra are given.

Key words: BCYB algebra; constant individual; ZY3 algebra.