第24卷第2期
2004年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 2
May 2004

无穷矩阵环上的导子*

崔石花[1]，　牛凤文[2]
(1. 天津大学理学院，天津 300072；2. 吉林大学数学研究所，吉林 长春 130012)

摘　要：讨论无穷矩阵环上的导子，证明了环 R 上有限个元素不为零的无穷矩阵环的每个导子均可表示为两个特殊导子之和.

关键词：导子；无穷矩阵环.
分类号：AMS(2000) 16N60/CLC number：O153.3
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0353-06

设 R 是有1结合环，d 是 R 到 R 的映射，且对任意 $x,y\in R$ 均有

$$d(x+y)=d(x)+d(y),$$
$$d(xy)=d(x)y+xd(y),$$

则称 d 为 R 上的导子. 特别地，对 $a\in R$，映射

$$\mathrm{In}(a):R\to R,$$
$$\mathrm{In}(a):x\mapsto[a,x]=ax-xa,$$

称为 R 上由 a 引出的内导子.

一般意义下的导子和特殊的内导子的关系，一直是结合代数和非结合代数理论中引人注目的讨论课题，见文献[4].

1995年，S. Jøndrup 在文献[1]中证明了 R 上 n 阶全阵环和三角矩阵环上的每个导子均为一个内导子和 R 的一个诱导导子之和，给有限矩阵环上的导子一个很明确的刻画.

对于无穷维线性代数理论中经常出现的一些无穷矩阵环，人们当然希望有类似的整齐结论. 本文利用结合环扩张理论技巧，对一类重要的无穷矩阵环上的导子给出了分解式.

用 A 代表 R 上所有只有有限个元素不为零的矩阵构成的结合环，用 S 代表每列只有有限个元素不为零的矩阵(即列有限矩阵)构成的结合环，相应地，用 T 代表行有限矩阵环.

本文将用环 A 的 Martindale 扩环 $S\cap T$ 中元素引出的 X-Inner[3]把 A 的导子表达出来，即有

定理1　设 R 是有1环，d 是 A 上的导子，则

$$d(X)=[a,X]+X^{\delta},\quad\forall X\in A,$$

* 收稿日期：2001-10-12
作者简介：崔石花(1976-)，女，硕士，助教.

这里 $\alpha\in S\cap T$，δ 是 R 上的导子.

可以看出，对于有限矩阵环 $M_n(R)$上的导子，它对应由 $M_n(R)$的元素引出的内导子，而无穷矩阵环 A 上的导子对应的是扩环 $S\cap T$ 元素引出的 X-Inner，不一定是 A 中元引出的内导子.

为此，先证

引理 2 设 d 是 A 上的导子，且 $d(X)=[\alpha,X]+X^{\delta}$，这里 α 是 R 上的无穷矩阵，δ 是 R 上的导子，则 $\alpha\in S\cap T$.

证明 记 $\alpha=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$，则

$$d(e_{11})=[\alpha,e_{11}]+e_{11}^{\delta}=[\alpha,e_{11}]=\begin{pmatrix}0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots\\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots\\ a_{31} & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

因为 $d(e_{11})\in A$，所以 $d(e_{11})$只有有限个元素不为零，故 a_{1i}，a_{i1}不能有无穷多个非零，因此存在 n_1，使得 $a_{1n}=a_{n1}=0$，当 $n>n_1$. 又

$$d(e_{22})=[\alpha,e_{22}]=\sum_{i=1}^{\infty}(a_{i2}e_{i2}-a_{2i}e_{2i}),$$

同样存在 n_2，使得 $a_{2n}=a_{n2}=0$，当 $n>n_2$.

X 依次取 e_{33}，e_{44}，…时，知 α 的每一行，每一列非零元素都是有限的，因此 $\alpha\in S\cap T$.

定理 1 的证明 设

$$A_n=\left\{\begin{pmatrix}X_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| X_n\subseteq M_n(R)\right\},$$

记 $d_n=d|_{A_n}$，类似于文献[1]的证明方法，对任意 n，可以证明下式成立，

$$d_n(X)=[\alpha_n,X]+X^{\delta_n},\quad 对任意 X\in A_n,$$

这里 α_n 是 R 上的无穷矩阵，δ_n 是 R 上的导子.

记 $\alpha_n=(a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{\infty}$，对于 $e_{11}\in A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，

$$d(e_{11})=d_1(e_{11})=[\alpha_1,e_{11}]+e_{11}^{\delta_1},$$
$$d(e_{11})=d_2(e_{11})=[\alpha_2,e_{11}]+e_{11}^{\delta_2},$$

两式相减得$[\alpha_1-\alpha_2,e_{11}]=0$，于是有 $a_{1i}^{(1)}=a_{1i}^{(2)}$，$a_{i1}^{(1)}=a_{i1}^{(2)}$，$i=2,3,\cdots$. 同理，对于 d_1，d_3，有$[\alpha_1-\alpha_3,e_{11}]=0$，从而得知 α_1，α_3 的第一行，第一列的元素除 e_{11}位置外均相同. 由归纳法，对任意 n 而言，α_1，α_n 的第一行，第一列元素除 e_{11}位置外均相同.

对于 $e_{22}\in A_2\subseteq A_3\subseteq A_4\subseteq\cdots$，由 $d_2(e_{22})=d(e_{22})=d_3(e_{22})$，有$[\alpha_2-\alpha_3,e_{22}]=0$. 从而得知 α_2，α_3 的第二行，第二列的元素除 e_{22}位置外均相同. 由归纳法，对任意 n 而言，α_2，α_n 的第二行，第二列元素除 e_{22}位置外均相同.

总而言之，α_n，α_{n+1}，…的元素除 e_{nn}位置外均相同($n=1,2,\cdots$).

考虑

$$d_1(ae_{11})=[\alpha_1,ae_{11}]+a^{\delta_1}e_{11}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, ae_{11}\right] + ([a_{11}^{(1)}, a] + a^{\delta_1})e_{11}$$

$$= [\bar{\alpha}_1, ae_{11}] + a^{\delta_1}e_{11}.$$

对任意 $X \in A_2$,

$$d_2(X) = [\alpha_2, X] + X^{\delta_2}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} - a_{11}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, X\right] + ([a_{11}^{(2)}(e_{11} + e_{22}), X] + X^{\delta_2})$$

$$= [\bar{\alpha}_2, X] + X^{\delta_2}.$$

用同样的方法处理得

$$d_n(X) = [\bar{\alpha}_n, X] + X^{\delta_n}, \quad \forall X \in A_n (n = 1, 2, \cdots),$$

这里 $\bar{\alpha}_n$ 是 R 上的无穷矩阵,δ_n 是 R 上的导子.

取 $X = e_{12} \in A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4 \subseteq \cdots$,则由

$$d(e_{12}) = d_2(e_{12}) = [\bar{\alpha}_2, e_{12}] + e_{12}^{\delta_2},$$
$$d(e_{12}) = d_3(e_{12}) = [\bar{\alpha}_3, e_{12}] + e_{12}^{\delta_3},$$

知 $a_{11}^{(2)} - a_{22}^{(2)} = a_{11}^{(3)} - a_{22}^{(3)}$. 同理,由

$$d(e_{12}) = d_2(e_{12}) = [\bar{\alpha}_2, e_{12}] + e_{12}^{\delta_2},$$
$$d(e_{12}) = d_4(e_{12}) = [\bar{\alpha}_4, e_{12}] + e_{12}^{\delta_4},$$

知 $a_{11}^{(2)} - a_{22}^{(2)} = a_{11}^{(4)} - a_{22}^{(4)}$. 由归纳法知,$\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \cdots, \bar{\alpha}_n, \cdots$ 的 e_{22} 位置的元素均相同.

取 $X = e_{13} \in A_3 \subseteq A_4 \subseteq A_5 \subseteq \cdots$,对于 d_3, d_4,由 $d_3(e_{13}) = d(e_{13}) = d_4(e_{13})$,有 $a_{11}^{(3)} - a_{33}^{(3)} = a_{11}^{(4)} - a_{33}^{(4)}$. 同理,对于 d_3, d_5,就有 $a_{11}^{(3)} - a_{33}^{(3)} = a_{11}^{(5)} - a_{33}^{(5)}$. 由归纳法知,$\bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4, \cdots, \bar{\alpha}_n, \cdots$ 的 e_{33} 位置的元素均相同.

总而言之,$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_n, \cdots$ 的主对角线元素均相同,因此记成 $a_{11}(=0), a_{22}, \cdots, a_{nn}, \cdots$. 又由前面已证结论,记 $a_{ij} = a_{ij}^{(n)}, i \neq j (i, j = 1, 2, \cdots)$.

令 $\alpha = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$,此时有

$$[\alpha, X] = [\bar{\alpha}_n, X], \quad \forall X \in A_n (n = 1, 2, \cdots).$$

又

$$d_1(ae_{11}) = [\bar{\alpha}_1, ae_{11}] + a^{\delta_1}e_{11} = [\alpha, ae_{11}] + a^{\delta_1}e_{11},$$
$$d_2(ae_{11}) = [\bar{\alpha}_2, ae_{11}] + a^{\delta_2}e_{11} = [\alpha, ae_{11}] + a^{\delta_2}e_{11},$$

两式相减得 $a^{\delta_1 - \delta_2}e_{11} = 0$,即 $a^{\delta_1} = a^{\delta_2}$,任意 $a \in R$,因而 $\delta_1 = \delta_2$. 考虑 d_1, d_3,取 $X = ae_{11}$ 时,有

$$a^{\delta_1 - \delta_3}e_{11} = 0,$$

任意 $a \in R$,因而 $\delta_1 = \delta_3$. 由归纳法知,$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \cdots$,因此记 $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \cdots$.

此时有

$$d(X) = [\alpha, X] + X^{\delta}, \quad \forall X \in A,$$

由引理 2 知,$\alpha \in S \cap T$.

设 K 是域，P 是形如下列矩阵的全体所构成，

$$\begin{pmatrix} L & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad L\in M_n(K),\lambda\in K.$$

由文献[3]知 $Q_r(P)=S,Q_l(P)=T,Q_s(P)=S\cap T$（关于 $Q_r(P),Q_l(P),Q_s(P)$ 参看文献[2]），且上述环 A 是 P 的唯一的非平凡理想.

命题 3 设 R 是半素环，K 是 R 的本质理想，则 $Q_r(K)=Q_r(R)$.

A 作为 P 的双边理想是本质的（因为 $A\cap A\neq 0, A\cap P\neq 0$），由上述命题 3 知，$Q_r(A)=Q_r(P)=S$. 同理可验证 $Q_l(A)=Q_l(P)=T, Q_s(A)=Q_s(P)=S\cap T$.

从上面的讨论知，如果对于特殊的环 R，环 A 上的导子的内导元素在 A 的扩环中.

定理 4 设 d 是环 S 上的导子，则

$$d(X)=[\alpha,X]+X^{\delta},\quad \forall\ X\in S,$$

这里 δ 是 R 上的导子，且 $\alpha\in S$.

证明 由文献[1]，不妨假设 $d(e_{11})=0$. 对任意 $a\in R$，有

$$d(ae_{11})=e_{11}d(ae_{11})e_{11}=\bar{a}e_{11}.$$

对于 $i\neq 1$，$d(e_{i1})=d(e_{i1}e_{11})=d(e_{i1})e_{11}$，因此 $d(e_{i1})$ 除了第一列元素之外均为零. 又 $0=d(e_{11}e_{i1})=e_{11}d(e_{i1})$，从而知 $d(e_{i1})$ 的 e_{11} 位置元素为零. 记 $d(e_{i1})=\sum_{j=2}^{\infty}a_{j1}^{(i)}e_{j1}$，对于每一个 i 而言，因 $d(e_{i1})\in S$，故 $a_{j1}^{(i)}(j=2,3,\cdots)$ 只有有限个不为零.

对于 $i\neq 1$，$d(e_{1i})=d(e_{11}e_{1i})=e_{11}d(e_{1i})$，因此 $d(e_{1i})$ 除了第一行元素之外均为零. 又 $0=d(e_{1i}e_{11})=d(e_{1i})e_{11}$，从而知 $d(e_{1i})$ 的 e_{11} 位置元素为零. 记 $d(e_{1i})=\sum_{j=2}^{\infty}a_{1j}^{(i)}e_{1j}$，对于每一个 i 而言，因 $d(e_{1i})\in S$，故 $a_{1j}^{(i)}(j=2,3,\cdots)$ 只有有限个不为零.

因为 $d(e_{11})=0$，所以对任意 k,i，有

$$\begin{aligned} 0 &= d(e_{1k}e_{i1})=d(e_{1k})e_{i1}+e_{1k}d(e_{i1}) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty}a_{1j}^{(k)}e_{1j}e_{i1}+e_{1k}\sum_{j=2}^{\infty}a_{j1}^{(i)}e_{j1}=(a_{1i}^{(k)}+a_{k1}^{(i)})e_{11}, \end{aligned}$$

因此 $a_{1i}^{(k)}=-a_{k1}^{(i)}, i,k=2,3,\cdots$. 令

$$\alpha_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{21}^{(2)} & a_{21}^{(3)} & a_{21}^{(4)} & \cdots \\ 0 & a_{31}^{(2)} & a_{31}^{(3)} & a_{31}^{(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

我们把 α_0 记成 $\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j}$. 令 $\delta:R\to R(a\mapsto\bar{a})$，显然 δ 是加法映射，对任意 $a,b\in R$，

$$\begin{aligned} d(abe_{11}) &= d(ae_{11}be_{11})=d(ae_{11})be_{11}+ae_{11}d(be_{11}) \\ &= \bar{a}e_{11}be_{11}+ae_{11}\bar{b}e_{11}=(\bar{a}b+a\bar{b})e_{11}, \end{aligned}$$

因此

$$\delta(ab)=\overline{ab}=\bar{a}b+a\bar{b}=\delta(a)b+a\delta(b),$$

故知δ为R上的导子.

现在断言

$$d(X)=[\alpha_0,X]+X^\delta,\quad \forall X\in S.$$

因为$d(ae_{11})=\bar{a}e_{11}$，$[\alpha_0,ae_{11}]+a^\delta e_{11}=\bar{a}e_{11}$，所以有$d(ae_{11})=[\alpha_0,ae_{11}]+a^\delta e_{11}$. 又$d(e_{i1})=\sum_{j=2}^{\infty}a_{j1}^{(i)}e_{j1}$，则

$$[\alpha_0,e_{i1}]+e_{i1}^\delta=[\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j},e_{i1}]=\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j}e_{i1}-e_{i1}\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j}$$
$$=d(e_{i1})e_{11}=\sum_{j=2}^{\infty}a_{j1}^{(i)}e_{j1}e_{11}=\sum_{j=2}^{\infty}a_{j1}^{(i)}e_{j1},$$

因此$d(e_{i1})=[\alpha_0,e_{i1}]+e_{i1}^\delta$. 又$d(e_{1i})=\sum_{j=2}^{\infty}a_{1j}^{(i)}e_{1j}$，则

$$\begin{aligned}[\alpha_0,e_{1i}]+e_{1i}^\delta&=[\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j},e_{1i}]\\&=\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j}e_{1i}-e_{1i}\sum_{j=2}^{\infty}d(e_{j1})e_{1j}\\&=-e_{1i}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}a_{k1}^{(j)}e_{k1}e_{1j}\\&=-\sum_{j=2}^{\infty}a_{i1}^{(j)}e_{1j}=\sum_{j=2}^{\infty}(-a_{i1}^{(j)})e_{1j}\\&=\sum_{j=2}^{\infty}a_{1j}^{(i)}e_{1j},\end{aligned}$$

因此$d(e_{1i})=[\alpha_0,e_{1i}]+e_{1i}^\delta$. 对于$d(ae_{i1})$，

$$\begin{aligned}d(ae_{i1})&=d(e_{i1}ae_{11})=d(e_{i1})ae_{11}+e_{i1}d(ae_{11})\\&=[\alpha_0,e_{i1}]ae_{11}+\bar{a}e_{i1}=(\alpha_0e_{i1}ae_{11}-e_{i1}\alpha_0ae_{11})+\bar{a}e_{i1}\\&=(\alpha_0ae_{i1}-ae_{i1}\alpha_0)+\bar{a}e_{i1}=[\alpha_0,ae_{i1}]+a^\delta e_{i1},\end{aligned}$$

这里因为$e_{i1}\alpha_0ae_{11}=ae_{i1}\alpha_0=0$. 同理可以验证

$$d(ae_{1i})=[\alpha_0,ae_{1i}]+a^\delta e_{1i}.$$

最后

$$\begin{aligned}d(ae_{ij})&=d(ae_{i1}e_{1j})\\&=d(ae_{i1})e_{1j}+ae_{i1}d(e_{1j})\\&=[\alpha_0,ae_{i1}]e_{1j}+a^\delta e_{i1}e_{1j}+ae_{i1}[\alpha_0,e_{1j}]\\&=(\alpha_0ae_{i1}e_{1j}-ae_{i1}\alpha_0e_{1j})+a^\delta e_{ij}+(ae_{i1}\alpha_0e_{1j}-ae_{i1}e_{1j}\alpha_0)\\&=(\alpha_0ae_{ij}-ae_{ij}\alpha_0)+a^\delta e_{ij}\\&=[\alpha_0,ae_{ij}]+a^\delta e_{ij}.\end{aligned}$$

这就验证了上述断言. 对于每一个i，$a_{j1}^{(i)}(j=2,3,\cdots)$只有有限个元素不为零，因此$\alpha_0$的每一列

非零元素有限，从而 $a_0 \in S$.

同理，对行有限矩阵环 T 得到同样的结论.

参考文献：

[1] JØNDRUP S. *Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings* [J]. Linear Algebra Appl., 1995, **221**: 205—218.

[2] BEIDAR K I, MARTINDALE W S. et al. *Rings with Generalized Identities* [M]. Dekker. Inc. New York-Basel-Hongkong, 1996.

[3] LAM T Y. *Lectures on Modules and Rings* [M]. Springer-Verlag/New York/Berlin/Heidelberg, 1998.

[4] JAMES E H. *Introduction to Lie Algebra and Representation Theory* [M]. Springer-Verlag/New York/Berlin/Heidelberg, 1972.

Derivation on Infinite Matrix Rings

CUI Shi-hua[1], NIU Feng-wen[2]

(1. School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Inst. of Math. Sci., Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: We discuss derivation on infinite matrix rings, and prove that every derivation of infinite matrix rings with a finite number of nonzero entries on a ring R can be represented as the sum of two special derivations.

Key words: derivation; infinite matrix ring.