第 24 卷第 2 期
2004 年 5 月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 2
May 2004

Cayley 图的 Hamilton 性的若干问题*

李 登 信
(重庆工商大学理学院，重庆 400020)

摘　要：综述近二十年来，研究 Cayley 图的 Hamilton 圈的若干新成果，并提出一些未解决问题.

关键词：有限群；Cayley 图；Hamilton 圈.
分类号：AMS(2000) 05C25/CLC number：O157.5
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0374-07

1 Cayley 图

本文考虑的图均为无向简单图. 我们使用通常的图论及群论术语和记号，未加定义的概念或符号可参阅文献[1]和[2]. G 表示有限群，M 是 G 的一个生成集. 所谓生成集为 M 的群 G 上的 Cayley 图(无向图)用符号 $X = X(G,M)$ 表示，其定义为

$$V(X) = G,$$

$$E(X) = \{(g,gs) \mid g \in G, s \in M \cup M^{-1}\}, \quad M^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in M\}.$$

显然，这样定义的 Cayley 图均为连通图. 并且当群 G 给定时，G 上的 Cayley 图由生成集 M 完全确定. 如果对群 G 的每一个生成集 M，$X(G,M)$ 有 Hamilton 圈，则称群 G 上的 Cayley 图是 Hamilton 图. 不失一般性，我们设 M 是 G 的一个极小生成集，即 $G = \langle M \rangle$，但 $x \in M$，$\langle M - \{x\} \rangle$ 是 G 的真子群.

1968 年，Lovasz L. 提出如下猜想：([3]，p.249，问题 20)

猜想 1　每一个连通的点传递图都有一条 Hamilton 路.

迄今，人们只发现四个有 Hamilton 路但无 Hamilton 圈的点传递图，但这些图均非 Cayley 图. 而 Cayley 图是一类特殊的点传递图，于是许多人提出如下猜想：

猜想 2　每一个连通的 Cayley 图是 Hamilton 图[4].

上述猜想提出三十多年来，吸引了不少学者. 特别是猜想 2，涉及到群与图，更引起了广泛的兴趣. 关于 Cayley 图的 Hamilton 性，1984 年、1994 年 D. Witte，J. A. Gallian 及 S. J. Curran，

* 收稿日期：2001-10-26
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10171074)，重庆市教委资助项目(2-17-67).
作者简介：李登信(1944-)，硕士，教授.

等人已有两篇较好的综述文章[4,5]. 本文试图介绍近二十年来,有关猜想 2 的一些新进展,特别是中国学者的工作,并提出若干未解决问题.

2 考虑群 G 的换位子群 G' 的阶

Cayley 图 $X(G,M)$ 是群上的图. 首先,自然想到结构最简单的 Abel 群,历史上,有许多人已对 Abel 群证明了猜想 2[6,7]. 其实,当 G 为 Abel 群时,利用循环群,可以直观地写出 $X(G,M)$ 的 Hamilton 圈.

例如,设 $x\in M, H=\langle x\rangle$,则商群 G/H 是较低阶的 Abel 群,设 Cayley 图 $X(G/H,M)$ 的 Hamilton 圈为

$$\mu=(H,Hx_1,Hx_1x_2,\cdots,Hx_1x_2\cdots x_{n-1},H),\quad x_i\in M,\ i=1,2,\ldots,n.$$

于是,由 μ 可得 $X(G,M)$ 的 Hamilton 圈 C:

当 G/H 为偶数时,

$$\begin{aligned}C=(&e,x,x^2,\cdots,x^{n-1},x^{n-1}x_1,\ x^{n-2}x_1,\cdots,xx_1,\ xx_1x_2,\ x^2x_1x_2,\cdots,x^{n-1}x_1x_2,\cdots,\\&x^{n-1}x_1x_2\cdots x_{n-2},\ x^{n-1}x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\ x^{n-2}x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\cdots,\\&xx_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\ x_1x_2\cdots x_{n-2},\cdots,x_1x_2,x_1,e)\end{aligned}$$

当 G/H 为奇数时,

$$\begin{aligned}C=(&e,x,x^2,\cdots,x^{n-1},\ x^{n-1}x_1,\ x^{n-2}x_1,\cdots,xx_1,\ xx_1x_2,\ x^2x_1x_2,\cdots,\ x^{n-1}x_1x_2,\cdots,\\&xx_1x_2\cdots x_{n-2},\ xx_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\ x^2x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\cdots,x^{n-1}x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\\&x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1},\ x_1x_2\cdots x_{n-2},\cdots,x_1x_2,x_1,e)\end{aligned}$$

当群 G 是非 Abel 群时,问题已变得十分困难. 例如当 $|G'|=p$ 时,p 为素数,有如下结果:

定理 2.1[7] 若 G 是一个素数阶循环群与奇数阶 Abel 群的半直积,则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

在[7]中,D. Marusic 首次系统地提出利用 Hamilton 序列来处理 Cayley 图的 Hamilton 圈的问题. 文[7]应是研究 Cayley 图的 Hamilton 性的重要文献之一.

稍后,出现了一些新的工作,都是对 Marusic 定理的推广与改进.

定理 2.2[8] 若 G 是一个素数阶循环群与一个 Abel 群的半直积,则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

定理 2.3[9] 用 G' 表示群 G 的换位子群,若 $|G'|=p$ 时,p 为素数,则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

定理 2.4[4] G 的换位子群是素数幂阶的循环群,则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

从换位子群的阶考虑,定理 2.4 被认为是目前最好的结果.

问题 2.1 当群 G 的换位子群是 pq 阶循环群时,考虑 Cayley 图 $X(G,M)$ 的 Hamilton 性.

3 考虑群 G 的阶

1982 年,Chen C C. 及 Quimpo N. 关于猜想 2 得到如下结果:

定理 3.1[10] 若 $|G| = pq, p, q$ 为素数，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

上述定理被认为是对于非 Abel 群来说的一个较好的结果. 其后，一些学者沿着这个方向做了一些工作. 1990 年，梁海江利用群的结构理论得到：

定理 3.2[11] 若 $|G| = 2pq, p, q$ 是素数，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

1994 年笔者利用"斜生成元方法"(skewed generator's augument)[4]，对于一些小阶的 Cayley 图证明了猜想 2.

定理 3.3[12,13] 若 $|G| = 4p, 2p, 2pq, 3pq$，这里 p, q 为素数，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

1996 年，笔者得到如下结果：

定理 3.4[14] 设 $|G| = pqr, p, q, r$ 为相异素数，G' 是 G 的换位子群，

(i) 若 $M \cap G' \neq \varphi$，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

(ii) 若 $M \cap G' = \varphi$，且存在 $x, y \in M$ 使 yx^{-1}(或 yx) $\in G'$，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

作为定理 3.4 的一个推论，我们证明了

定理 3.5[14] 设 $|G| = 5pq, 5, p, q$ 为相异素数，若 $|M| \geqslant 3$，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

1998 年，笔者解决了 G 的阶为三个素数之积的情形，即得到以下结果：

定理 3.6[15] 设 $|G| = pgr$, p, g, r 为相异素数，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

问题 3.1 若 $|G|$ 不含平方因子，讨论 $X(G,M)$ 的 Hamilton 性.

注：定理 3.6 是问题 2.1 的推论，因而问题 2.1 的讨论是有意义的.

4 若干重要结果

尽管许多人都认为要证明猜想 2 是相当困难的，但近二十年来，除了从群或换位子群的阶考虑而外，还有不少值得称道的结果支持猜想 2.

1986 年 D. Witte 证明了：

定理 4.1[16] 若 G 是有限 p— 群，则 G 上的(有向)Cayley 图是 Hamilton 图.

许多人认为这是一个惊人的结果，是群论的技巧在图论中的成功应用[1,17].

1978 年，W. Holsztynski 及 R. F. E. Strube 等人关于二面体群上的(有向)Cayley 图的 Hamilton 圈问题([5]，[18]p170)，有人做过一些工作[18,19]. 1989 年才由 B. Alspach 及 C. Q. Zhang 等人完全解决.

定理 4.2[20] 二面体群上的三次有向 Cayley 图存在 Hamilton 圈.

关于三次 Cayley 图，值得一提的是 D. L. Powers 在 1985 年得到的一个结果.

定理 4.3[21] 围长为 4 的三次 Cayley 图 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

1996 年，孟吉翔与黄琼湘得到如下有趣的结果：

定理 4.4[22] 几乎所有的 Cayley 图都是 Hamilton 图.

悉知，当群 G 给定时，Cayley 图 $X(G,M)$ 的结构由生成集 M 所确定，因而给生成集 M 适当一些限制，会得到一些性质较好的 Cayley 图. 1997 年，王军与徐明曜在[23] 中引入了拟 Abel 群的概念，即，若群 G 的生成集 M 是若干个完整的共轭类的并，则称 G 为拟 Able 群(Quasi-abelian).

定理 4.5[23] 拟 Abel 群上的 Cayley 图是 Hamilton 图.

这个定理给出了一大批新的便于构造的非 Abel 的 Hamilton Cayley 图，是一个很有意义的结果.

5　Cayley 图的边 -Hamilton 性

设 Γ 是一个 Hamilton 图，如果 Γ 的每一条边都在 Γ 的某一个 Hamilton 圈上，则称图 Γ 为边 -Hamilton 图. 在已证实为 Hamilton 图的 Cayley 图中，人们发现，这些图都是边 -Hamilton 图. 于是 Chen C C. 在 1988 年提出如下猜想：

猜想 3[24]　每一个 Hamilton Cayley 图都是边 -Hamilton 图.

如前所述，生成集为 M 的群 G 上的 Cayley 图 $X(G,M)$ 的边集 $E(X)=\{(g,gs)\mid g\in G, s\in M\cup M^{-1}\}$，我们把边 (g,gs) 称为一条 s- 边. 利用 $X(G,M)$ 的点传递性，容易验证如下事实.

定理 5.1[24,引理1]　Cayley 图 $X(G,M)$ 是边 —Hamilton 图当且仅当 $s\in M$，$X(G,M)$ 有包含 s- 边的 Hamilton 圈.

定理 5.2[24,定理5]　若 M 是群 G 的一个极小生成集，则 $X(G,M)$ 是边 -Hamilton 图当且仅当 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

利用图的 Hamilton 圈的个数的一个定理，容易证明，当生成集中的元均为偶阶元时，猜想 3 成立.

引理 5.3[2,定理5.9]　设图 Γ 是无偶点的图，则 Γ 的每条边包含在偶数个 Hamilton 圈中.

定理 5.4[24,25]　设 Cayley 图 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图，$s\in M$，$|s|$ 为偶数，则 s 含在某一个 Hamilton 圈中.

对猜想 3 而言，Cayley 图 $X(G,M)$ 中的生成集 M，已不是极小生成集. 这时我们关心的是 M 中的非生成元 s；即 $s\in M$，但不存在群 G 的极小生成集 $M_1\subset M$，使 $s\in M_1$，我们把这样的元 s 称为关于生成集 M 的非生成元[25]. 只要证明 M 中的每一个奇阶非生成元也在 $X(G,M)$ 的一个 Hamilton 圈上，则猜想 3 成立. 笔者 1995 年，得到如下结果.

定理 5.5[26]　设 $Z(G)$ 是群 G 的中心，M 是 G 的一个生成集，$a\in M\cap Z(G)$，若商群 $G/\langle a\rangle$ 上的 Cayley 图 $X(G/\langle a\rangle,M)$ 有 Hamilton 圈，则 Cayley 图 $X(G,M)$ 是边 -Hamilton 图.

定理 5.6[27]　设 G 为有限群，$G=\langle M\rangle$，M 中有素数阶正规元 a，则有以下结果：

(1)　若 $X(G/\langle a\rangle,M)$ 是 Hamilton 图，则 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图.

(2)　若 $X(G/\langle a\rangle,M)$ 是边 -Hamilton 图，a 为关于 M 的生成元，则 $X(G,M)$ 是边 -Hamilton 图.

(3)　若 $X(G/\langle a\rangle,M)$ 是边 -Hamilton 图，存在元 $x\in M$，使得 $xa=ax$，则 $X(G,M)$ 是边 -Hamilton 图.

问题 5.1　设 G 为 p— 群，证明 $X(G,M)$ 是边 -Hamilton 图.

6 评注与问题

Cayley 图是定义在抽象群 G 上图. Cayley 图的 Hamilton 性(圈或路) 问题,实际上是群 G 的元素的可序列性问题(sequential). 例如,若 G 为循环群,$G = \langle a \rangle$,则 G 的元素可列出为:$G = \{a, a^2, \ldots a^{n-1}, a^n\}$, $|a| = n$.

设 G 为有限群,$G = \langle M \rangle$,用符号 $S = [s_1, s_2, \ldots s_n]$ 表示一个 M 一序列,其中 $s_i \in M \cup M^{-1}$. 用 $\Pi(S_i)$ 表示 S 的前 i 项的部分积,即 $\Pi(S_i) = s_1 s_2 \ldots s_i$,并用 $\Pi(S)$ 表示 $\Pi(S_n)$. Cayley 图 $X(G,M)$ 的一个 M 一序列 $S = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ 称为 Hamilton 序列,当且仅当以下三个条件成立:

(i) $|S| = n = |G|$,

(ii) $\Pi(S) = e$ (群 G 的单位元),

(iii) $\Pi(S_i) \neq \Pi(S_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$.

于是,$X(G,M)$ 的一个 Hamilton 序列恰好是 Cayley 图 $X(G,M)$ 的一个 Hamilton 圈[7].

引入 M 一序列的部分积等记号以后,判定 Cayley 图 $X(G,M)$ 是否有 Hamilton 圈(路) 的问题,实际上是能否用生成集中的元(或其逆) 来有序地表达群中的所有元素的问题,正如循环群那样. 笔者认为这实际上是一个十分有趣的有限群的构造问题,遗憾的是,此问题并未引起国内许多群论学者的注意.

由 Cayley 图的定义,我们知道,当群 G 的类型知道后,Cayley 图 $X(G,M)$ 的结构完全由生成集 M 确定,但我们对群 G 的结构与其(极小) 生成集的关系了解不多,是难于判断 Cayley 图的 Hamilton 性的一个重要原因. 对 p 一 群为什么猜想 2 已获得证实?笔者认为主要原因在于 p 一 群的极小生成集中所含元素的个数是一定的. (Burnside 基定理, [1], 定理 5.2) 设 G 是有限群,H 是 G 的一个正规子群,利用子群 H 与商群 G/H 上 Cayley 图的 Hamilton 性,推出 G 上 Cayley 图的 Hamilton 性是自然能想到的方法,如文献[4]中的商群引理(Factor group lemma, [4], 2.2.). 但只有认真研究群 G 的生成集 M 与子群 H 的关系,"商群引理"才有用武之地. 群 G 的类型给出以后,群 G 的生成集是多种多样的,能否对生成集加以适当限制,来考察 Cayley 图的 Hamilton 性. 作为本文的结束,我们提出一些问题. (以下所说的 Cayley 图均为本文所定义的无向连通 Cayley 图.)

问题 6.1 证明 Cayley 图 $X(G,M)$ 存在 Hamilton 路.

问题 6.2 设 G 是可解群,G 的极小正规子群为 H,则 H 与 G/H 亦可解;对可解群的情形,讨论问题 6.1.

问题 6.3 设 H 是群 G 的一个正规子群,求 H 应满足的条件,使得由 H 及 G/H 上的 Cayley 图的 Hamilton 性可推出群 G 上 Cayley 图的 Hamilton 性.

问题 6.4 设 $Z(G)$ 是群 G 的中心,M 是 G 的极小生成集,若 $Z(G) \cap M \neq \Phi$,讨论 Cayley 图 $X(G,M)$ 的 Hamilton 性.

问题 6.5 设 G 为 p- 群,M 是 G 的极小生成集,因为 $X(G,M)$ 是 Hamilton 图,G 的元素可序列化,即 $G = \{x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots, x_1x_2\ldots x_{n-1}, x_1x_2\ldots x_n\}$,其中,$x_1 x_2 \ldots x_n = e, x_i \in M, i = 1, 2, \ldots, n$. 利用这一结果,推出 p- 群的结构性质.

参考文献：

[1] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京：科学出版社，1987.
XU Ming-yao. *Introduction to the Theory of Finite Groups* [M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese)

[2] 田丰，马仲蕃. 图与网络流理论 [M]. 北京：科学出版社，1987.
TIAN Feng, MA Zhong-fan. *Theory of Graphs and Flow in Networks* [M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese)

[3] BONDY J A, MURTY U S A. *Graph Theory with Applications* [M]. The Macmillan Press LTD, 1976.

[4] WITTE D, GALLIAN J A. *A Survey: Hamiltonian cycles in Cayley graphs*[J]. Discrete Math., 1984, **51**: 293—304.

[5] CURRAN S J, GALLIAN J A. *Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs-A survey* [J]. Discrete Math., 1996, **156**: 1—8.

[6] HOLSZTYNSKI W, STUBE R F E. *Paths and cuicuits in finite groups* [J]. Discrete Math., 1977, **19**: 77—84.

[7] MARUSIC D. *Hamiltonian ciruits in Cayley graphs* [J]. Discrete Math., 1983, **46**: 49—54.

[8] ERICH D. *Connected Cayley graphs of simi-direct products of cyclic groups of prime order by Abelian groups are Hamiltonian* [J]. Discrete Math., 1983, **46**: 55—68.

[9] ERICH D. *Every Connected Cayley graphs of a group with prime order commutator group has a Hamilton cycle* [J]. Discrete Math., 1985, **27**: 75—80.

[10] CHEN C C, QUIMPO N. *Hamiltonian Cayley graphs of order pq* [C]. Combinatorial Math. X, Spring-Verlag Lectures notes series, 1983, **894**: 1—5.

[11] 梁海江. $2pq$ 阶 Cayley 图是 Hamilton 图 [J]. 数学季刊，1990，**5**(3)：63—67.
LIANG Hai-jiang. *Cayley graph of order 2pq is Hamiltonian* [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1990, **5**(3): 63—67. (in Chinese)

[12] 李登信. 几类 Cayley 图的 Hamilton 性 [J]. 渝州大学学报(自然科学版)，1994，**11**(3)：1—5.
LI Deng-xin. *Some Hamiltonian Cayley graphs* [J]. J. Yuzhou University (Natural Science), 1994, **11**(3): 1—5. (in Chinese).

[13] 李登信. 关于 $2pq$ 阶及 $3pq$ 阶 Cayley 图的 Hamilton 性的一个注记 [J]. 纯粹数学与应用数学，1994，10，专刊，174—178.
LI Deng-xin. *A note on Hamiltonian cycles in Cayley graphs of order 2pq and 3pq* [J]. Pure and Applied Mathematics, Vol. 10(Special Issue), 1994, 174—178. (in Chinese)

[14] LI Deng-xin. *On Hamilton Cycles in Cayley Graphs of Order pqr* [C]. Algebra and Combinatoric, An International Congress, ICAC'97, Hong Kong, Spring-Verlag Press Singapore. Ltd., 1999, 327—332.

[15] 李登信. pqr 阶 Cayley 图是 Hamilton 图 [J]. 数学学报，2001，**44**(2)：351—358.
LI Deng-xin. *Cayley graphs of order pqr are Hamilotian* [J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, **44**(2): 351—358. (in Chinese)

[16] WITTE D. *Cayley Digraphs of Prime-Power are Hamiltonian* [J]. Combin. Theory, Ser. B, 1986, **40**: 107—112.

[17] XU Ming-yao. *Lecture Notes on Some Problems on Cayley Graphs* [C] (at Southwest China Normal U-

niversity), 1997, **10**, print.

[18] 王敏,方新贵. 二面体群 Dn 上的 H-圈的一个判定条件 [J]. 系统科学与数学, 1992, **12**(2): 169－172.

WANG Min, FANG Xin-gui. *A discriminate condition of H-cycle on dihedral groups* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1992, **12**(2): 169－172. (in Chinese)

[19] 李登信. 二面体群 Dn 上的 Hamilton 圈 [J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1998, **15**(1): 1－4.

LI Deng-xin. *Hamiltonian circuits on dihedral groups Dn* [J]. J. Yuzhou University (Natural Science), 1998, **15**(1): 1－4. (in Chinese)

[20] ALSPACH B, ZHANG C Q. *Hamilton Cycles in Cubic Cayley Graphs on Dihedral Groups* [J]. Ars. Combin., 1989, **28**: 101－108.

[21] POWERS D L. *Some Hamiltonian Cayley Graphs* [J]. Annals of Discrete Math., 1985, **27**: 129－140.

[22] MENG Ji-xiang, HUANG Qiong-xiang. *Almost All Cayley Graphs are Hamiltonian* [J]. Acta Mathematica Sinica, New Series, 1996, **2**: 151－155.

[23] WANG Jun, XU Ming-yao. *Quasi-Abelian Cayley graphs and Parsons Graphs* [J]. Europ. J. Combinatorics, 1997, **18**: 597－600.

[24] CHEN C C. *On Edge-Hamiltonian Property of Cayley Graphs* [J]. Discrete Math., 1988, **72**: 29－33.

[25] 李登信. 关于 Cayley 图的边—Hamilton 性的一个猜想 [J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1999, **16**(4): 1－3.

LI Deng-xin. *A conjecture on Hamiltonian property of Cayley graphs* [J]. J. Yuzhou University (Natural Science), 1999, **16**(4): 1－3. (in Chinese)

[26] 李登信. Cayley 图的边—Hamilton 性 [J]. 系统科学与数学, 1995, **15**(3): 266－268.

LI Deng-xin. *On Edge-Hamiltonian property of Cayley graphs* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1995, **15**(3): 266－268. (in Chinese)

[27] 李登信. Cayley 图的 Hamilton 性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)(增刊), 1996, **21**: 20－24.

LI Deng-xin. *On Hamiltonian property of Cayley graphs* [J]. J. Southwest China Normal University (Natural Science), Suppl. 1, 1996, **21**: 20－24. (in Chinese)

Some Problems on Hamiltonian Property of Cayley Graphs

LI Deng-xin

(Faculty of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400020, China)

Abstract: It has been conjectured that there is a Hamiltonian cycle in every connected Cayley graph. In this paper, we survey some recent results in this field and present a few open problems.

Key words: finite group; Cayley graph; Hamiltonian cycle.