第24卷第3期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 24 No. 3
2004年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2004

欧氏空间和球面子流形中 Yang-Mills 场的一类不稳定性结果*

李兴校，　曹林芬

(河南师范大学数学与信息科学学院，河南 新乡 453002)

摘　要：本文就欧氏空间和球面中紧致子流形的 Yang-Mills 场进行了讨论，得到了一类不稳定性结果.

关键词：Yang-Mills 联络；Yang-Mills 场；Yang-Mills 场的稳定性.

分类号：AMS(2000) 53C42/CLC number：O186.16

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2004)03-0461-12

1　引　言

黎曼流形上的 Yang-Mills 场的稳定性研究是微分几何学和理论物理中所关注的一个问题，引起了人们极大的兴趣. 1977 年，J. Simons 在一次题为"规范场"的演讲中给出了如下的定理

定理 1.1　当 $n\geqslant 5$ 时，具有标准度量的 n 维球面 S^n 是 Yang-Mills 不稳定的.

Bourguignon 和 Lawson 曾经对球面上的 Yang-Mills 场的稳定性和不稳定性问题进行了系统的研究，他们在文献[1]中对上述定理给出了新的证明. 后来，Laquer[3]发现，除了标准球面 $S^n(n\geqslant 5)$，Caylor 射影平面 $P^2(\mathrm{Cay})$，E_6/F_4 以及任意的紧单李群以外，每一个紧致不可约的黎曼对称空间上的典型联络都是弱稳定的. 1986 年，Kobayash，Ohnita 和 Takeuchi 在文献[4]中利用黎曼对称空间在欧氏空间的浸人，对于黎曼对称空间上 Yang-Mills 联络的稳定性问题进行了专门的讨论，并且得到了如下的重要结论：

定理 1.2　$S^n(n\geqslant 5)$，$P^2(\mathrm{Cay})$ 和 E_6/F_4 是 Yang-Mills 不稳定的.

另一方面，Yang-Mills 场的稳定性或不稳定性问题的研究与极小子流形和调和映射之稳定性(及不稳定性)问题是密切相关的. 如所知，关于后者的研究已经有了非常丰富的内容，比如[6]，[7]，[9]，[11]等. 其中，吴传喜在[11]，[12]等文献中集中讨论了欧氏空间、球面和复

* 收稿日期：2002-01-08

基金项目：国家自然科学基金部分资助项目(19971060)，河南省自然科学基金(004051900)和河南省教委资助项目(9711006)

作者简介：李兴校(1958-)，博士，教授.

射影空间中的子流形关于调和映射的不稳定性问题，并且建立了一些充分条件. 这些条件完全由子流形的第二基本形式的长度平方和平均曲率确定.

受文献[11]和[4]的启发，我们考虑欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+p}$ 和标准球面 S^{n+p} 中紧致子流形的 Yang-Mills 稳定性或不稳定性问题. 对于欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+p}$ 和球面 S^{n+p} 中的浸入子流形 M，通过对 Yang-Mills 泛函的第二变分公式的分析和讨论，我们利用子流形的的第二基本形式之长度平方和平均曲率，建立了 M 是 Yang-Mills 不稳定的充分条件. 与[11]和[12]的结果相比较，我们的定理再一次说明了调和映射的稳定性问题与 Yang-Mills 场的稳定性问题之间内在的紧密联系.

下面是本文的主要结果：

定理 1.3 设 M 是 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的 n 维紧致浸入子流形，H 和 S 分别是 M 的平均曲率和第二基本形式之长度平方，S_H 表示 M 沿平均曲率方向的第二基本形式之长度平方. 如果

$$S < \frac{n}{2(2n-1)}\left((3n-4)H^2 - |(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}\right), \tag{1.1}$$

则 M 作为黎曼流形是 Yang-Mills 不稳定的.

定理 1.4 设 $S^{n+p}(a)$ 是半径为 a 的标准球面，M 是 $S^{n+p}(a)$ 中紧致 n 维浸入子流形，H 和 S 分别是 M 在 $S^{n+p}(a)$ 中的平均曲率和第二基本形式之长度平方，S_H 为 M 在 $S^{n+p}(a)$ 中沿平均曲率方向的第二基本形式之长度平方. 如果

$$S < \frac{n}{2(2n-1)}\left((3n-4)H^2 + \frac{n-4}{2a^2} - |(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}\right), \tag{1.2}$$

则黎曼流形 M 是 Yang-Mills 不稳定的.

2 预备知识

设 M 是一个紧致的 n 维黎曼流形，$\pi: P\to M$ 是 M 上以紧致李群 G 为结构群的主丛，李群 G 的李代数记为 $\mathfrak{g}$. 如所知，G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 $\mathrm{ad}: G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 确定了 M 上的一个以 $\mathfrak{g}$ 为标准纤维的向量丛 $\pi_1: E\to M$，它是主丛 P 的一个相配丛. 为方便起见，我们把 P 上的 $\mathfrak{g}$-值 r 次外微分式构成的空间记为 $\Gamma(\wedge^r T^* P)\otimes\mathfrak{g}$；类似地，$M$ 上所有在向量丛 E 中取值的 r 次外微分式所构成的空间用 $\Gamma((\wedge^r T^* M)\otimes E)$ 表示. 根据[5](p. 76，例 5.2)的讨论，$\Gamma((\wedge^r T^* M)\otimes E)$ 中的元素可以等同于 P 上的一类特殊的 $\mathfrak{g}$-值 r 次外微分式. 因此，我们可以假定 $\Gamma((\wedge^r T^* M)\otimes E)\subset\Gamma(\wedge^r T^* P)\otimes\mathfrak{g}$.

在本文中，如无特别声明，我们总假定 $1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n$.

借助于 $\mathfrak{g}$ 上的不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$，对于任意的自然数 r，在空间 $\Gamma((\wedge^r T^* M)\otimes E)$ 中可以定义内积 $(\cdot,\cdot)$ 如下：

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{r!}\int_M \sum_{i_1,\cdots,i_r}\langle\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}),\psi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M,$$
$$\forall\ \varphi,\psi\in\Gamma((\wedge^r T^* M)\otimes E), \tag{2.1}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的单位正交标架场. 不难看出，(2.1)式的右端与单位正交标架场 $\{e_i\}$ 的选取

无关.

主丛 P 上所有的联络构成的空间记为 $\mathscr{C}(P)$. 对于任意的 $\omega\in\mathscr{C}(P)$,其联络形式也用 ω 表示,后者是 P 上 $\mathfrak{g}$-值的 1 次外微分式,它满足

$$R_a^*\omega = \mathrm{ad}(a^{-1})\cdot\omega, \quad \forall\, a\in G. \tag{2.2}$$

由定义,联络 $\omega\in\mathscr{C}(P)$的曲率形式 $\Omega=\mathrm{d}\omega+[\omega,\omega]$,它是 P 上的 $\mathfrak{g}$-值 2 次外微分式. 根据[5]和上面的约定,$\Omega\in\Gamma((\wedge^2T^*M)\otimes E)$. 在此意义下,熟知的 Yang－Mills 泛函 $J:\mathscr{C}(P)\to R$ 具有如下的表达式:

$$J(\omega) = \frac{1}{2}(\Omega,\Omega), \quad \forall\,\omega\in\mathscr{C}(P). \tag{2.3}$$

如果联络 $\omega\in\mathscr{C}(P)$是 Yang-Mills 泛函 J 的临界点,则称 ω 为主丛 P(或黎曼流形 M)上的 Yang-Mills 联络;此时,ω 的曲率形式 Ω 称为 P(或 M)上的 Yang-Mills 场.

定义 2.1 设 $\omega\in\mathscr{C}(P)$是一个 Yang-Mills 联络. 如果对于任意一个满足 $\omega_0=\omega$ 并且光滑地依赖于族参数 t 的单参数联络族$\{\omega_t\in\mathscr{C}(P);t\in(-\delta,\delta)\}(\delta>0)$,都有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}J(\omega_t)\big|_{t=0}\geqslant 0, \tag{2.4}$$

则称 Yang-Mills 联络 ω 是弱稳定的. 如果对于任意的紧致李群 G 和 M 上的任意一个以 G 为结构群的主丛 P,$\mathscr{C}(P)$中不存在弱稳定的非平坦 Yang-Mills 联络,则称黎曼流形 M 是 Yang-Mills 不稳定的.

定义 2.1 中的单参数族$\{\omega_t\}$称为联络 ω 的一个光滑变分.

给定一个 Yang-Mills 联络 $\omega\in\mathscr{C}(P)$,设 D 是 $\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E)$上相对于联络 ω 的外协变微分,则对于任意的 $\varphi\in\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E)$,

$$(D\varphi)(X_1,\cdots,X_{r+1}) = \sum_{a=1}^{r+1}(\nabla_{X_a}\varphi)(X_1,\cdots,\hat{X}_a,\cdots,X_{r+1}),$$
$$\forall\, X_1,\cdots,X_{r+1}\in\Gamma(TM), \tag{2.5}$$

其中的协变微分算子∇由 M 上的黎曼联络和 ω 在 E 上的诱导联络确定. 如果把 φ 视为 P 上的 $\mathfrak{g}$-值外微分式,则外协变微分 $D\varphi$ 有如下的定义:

$$(D\varphi)(X_1,\cdots,X_{r+1}) = (\mathrm{d}\varphi)(X_1^h,\cdots,X_{r+1}^h), \quad \forall\, X_1,\cdots,X_{r+1}\in\Gamma(TP), \tag{2.6}$$

其中 X_a^h 表示切向量场 X_a 关于联络 ω 的水平分量. 特别地,当 $r=1$ 时,可以验证[5],

$$D\varphi(X,Y) = \mathrm{d}\varphi(X,Y) + [\varphi(X),\omega(Y)] + [\omega(X),\varphi(Y)], \quad \forall\, X,Y\in\Gamma(TP). \tag{2.7}$$

如果 D^*是 D 关于内积$(\cdot,\cdot)$的共轭算子,则 D^*具有如下的表达式

$$(D^*\varphi)(X_1,\cdots,X_{r-1}) = -\sum_i(\nabla_{e_i}\varphi)(e_i,X_1,\cdots,X_{r-1}),$$
$$\forall\,\varphi\in\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E),\ X_1,\cdots,X_{r-1}\in\Gamma(TM), \tag{2.8}$$

其中$\{e_i\}$是 M 上的正交标架场.

令 $\Delta = D\circ D^* + D^*\circ D$,它称为作用在 $\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E)$ 上的 Hodge-Laplace 算子. 对于 $\varphi\in\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E)$,如果 $\Delta\varphi\equiv 0$,则称 φ 是调和的 E- 值 r 次外微分式. 利用关系式 $(\Delta\varphi,\varphi) = (D\varphi,D\varphi) + (D^*\varphi,D^*\varphi)$ 以及内积$(\cdot,\cdot)$ 的正定性,易知下述命题成立:

命题 2.2 对于 $\varphi\in\Gamma((\wedge^rT^*M)\otimes E)$,$\varphi$ 是调和的当且仅当 $D\varphi = D^*\varphi\equiv 0$.

下面是一个代数引理,其证明见文献[11].

引理 2.3　设(a_{ij})是$n\times n$对称实数矩阵，$a=\sum_i a_{ii}$，$b=\sum_{ij}a_{ij}^2$. 则对于任意的i，

$$2\sum_j a_{ij}^2-aa_{ii}\leqslant\frac{2(n-1)}{n}b+\frac{|(n-4)a|}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(b-\frac{a^2}{n}\right)}-\frac{3n-4}{n^2}a^2. \qquad (2.9)$$

3　Yang-Mills 泛函的第二变分公式

设$\{e_i\}$是黎曼流形M上的任意一个单位正交标架场，它的对偶标架场记为$\{\theta^i\}$. 如果R是M的曲率张量，并令$R^j_{ikl}=\theta^j(R(e_k,e_l)e_i)$，$R_{ijkl}=\langle R(e_k,e_l)e_i,e_j\rangle$. 则$R_{ijkl}=R^j_{ikl}$，因而$M$的 Ricci 曲率张量的分量

$$R_{ij}=\sum_k R^k_{ikj}=\sum_k R_{ikkj}. \qquad (3.1)$$

对于任意的 Yang-Mills 联络$\omega\in\mathscr{C}(P)$，存在$F_{ij}\in\Gamma(E)$，使得ω的曲率形式可以表示为

$$\Omega=\frac{1}{2}F_{ij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad F_{ij}=-F_{ji}; \qquad (3.2)$$

当把Ω视为P上的$\mathfrak{g}$-值外微分式时，(3.2)中的分量F_{ij}可相应地看作是P上的$\mathfrak{g}$-值函数.

一般地，对于任意的$\varphi\in\Gamma((\wedge^r T^*M)\otimes E)$，都有$\varphi_{i_1\cdots i_r}\in\Gamma(E)$，使得

$$\varphi=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\varphi_{i_1\cdots i_r}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_r}, \qquad (3.3)$$

其中的分量$\varphi_{i_1\cdots i_r}$关于下标是反对称的，它们可以等价地视为P上的$\mathfrak{g}$一值函数.

本文需要如下形式的 Ricci 恒等式：

命题 3.1　设$\varphi\in\Gamma((\wedge^r T^*M)\otimes E)$并且具有表达式(3.3)，如果令

$$(\nabla^2\varphi)=\frac{1}{r!}\sum\varphi_{i_1\cdots i_r,kl}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_r}\otimes\theta^k\otimes\theta^l, \qquad (3.4)$$

其中的分量$\varphi_{i_1\cdots i_r,kl}$关于前$r$个分量是反对称的，则有下面的指标交换公式

$$\varphi_{i_1\cdots i_r,kl}=\varphi_{i_1\cdots i_r,lk}+[\varphi_{i_1\cdots i_r},F_{kl}]+\sum_{\alpha=1}^r\varphi_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_r}R_{i_\alpha ikl}. \qquad (3.5)$$

证明　和前面一样，用∇同时表示M上的黎曼联络和向量丛E上的诱导联络. 按照求协变导数的定义直接计算得

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1\cdots i_r,k}&=(\nabla\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_k)=(\nabla_{e_k}\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})\\&=\nabla_{e_k}(\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}))-\sum_{\alpha=1}^r\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r})\\&=\nabla_{e_k}\varphi_{i_1\cdots i_r}-\sum_{\alpha=1}^r\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r});\\\varphi_{i_1\cdots i_r,kl}&=(\nabla^2\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_k,e_l)=(\nabla_{e_l}(\nabla\varphi))(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_k)\\&=\nabla_{e_l}((\nabla\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_k))-\sum_{\beta=1}^r(\nabla\varphi)(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r},e_k)-\\&\quad(\nabla\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},\nabla_{e_l}e_k)\end{aligned}$$

$$=\nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}\varphi_{i_1\cdots i_r}-\sum_{\alpha=1}^{r}\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}))-$$

$$\sum_{\beta=1}^{r}(\nabla_{e_k}\varphi)(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r})-(\nabla_{\nabla_{e_l}e_k}\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$$

$$=\nabla_{e_l}\nabla_{e_k}\varphi_{i_1\cdots i_r}-\sum_{\alpha=1}^{r}\nabla_{e_l}(\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}))-$$

$$\sum_{\beta=1}^{r}\nabla_{e_k}(\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r}))+\sum_{\alpha<\beta}\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r})+$$

$$\sum_{\beta=1}^{r}\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r})+\sum_{\alpha>\beta}\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_l}e_{i_\beta},\cdots,\nabla_{e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r})-$$

$$(\nabla_{\nabla_{e_l}e_k}(\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}))+\sum_{\alpha=1}^{r}\varphi(e_{i_1},\cdots,\nabla_{\nabla_{e_l}e_k}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}).$$

从而

$$\begin{aligned}&\varphi_{i_1\cdots i_r,kl}-\varphi_{i_1\cdots i_r,lk}\\&\quad=\nabla_{e_l}\nabla_{e_k}\varphi_{i_1\cdots i_r}-\nabla_{e_k}\nabla_{e_l}\varphi_{i_1\cdots i_r}-(\nabla_{\nabla_{e_k}e_l}-\nabla_{\nabla_{e_l}e_k})\varphi_{i_1\cdots i_r}+\\&\qquad\sum_{\beta=1}^{r}\varphi(e_{i_1},\cdots,(\nabla_{e_k}\nabla_{e_l}-\nabla_{e_l}\nabla_{e_k}-(\nabla_{\nabla_{e_k}e_l}-\nabla_{\nabla_{e_l}e_k}))e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r})\\&\quad=(\Omega^E(e_k,e_l)\varphi_{i_1\cdots i_r}+\sum_{\alpha=1}^{r}\varphi(e_{i_1},\cdots,R(e_k,e_l)e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}),\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 Ω^E 表示向量丛 E 上的诱导联络的曲率形式. 根据[5]中第二章 § 10 的引理 1(p. 97)和第三章中 § 1 的引理(p. 115),

$$\Omega^E(e_k,e_l)\varphi_{i_1\cdots i_r}=([e_k^*,e_l^*])^v\varphi_{i_1\cdots i_r}=[\varphi_{i_1\cdots i_r},\Omega(e_k^*,e_l^*)]=[\varphi_{i_1\cdots i_r},F_{kl}],$$

其中 e_k^*,e_l^* 分别是向量场 e_k,e_l 在主丛 P 上的水平提升,$[e_k^*,e_l^*]^v$ 表示 P 上的切向量场$[e_k^*,e_l^*]$的铅垂分量. 把上式和 $R(e_k,e_l)e_{i_\alpha}=R_{i_\alpha ikl}e_i$ 代入(3.6)式便可得到(3.5)式. □

下面我们考虑 Yang-Mills 泛函在 ω 处的第二变分公式. 任意给定 ω 的一个光滑变分:

$$\omega_t=\omega+t\eta,\quad t\in(-\delta,\delta),\quad \eta\in\Gamma(T^*M\otimes E),\tag{3.7}$$

其中的 η 也可以视为 P 上的 $\mathfrak{g}$-值 1 形式,$\delta>0$. 则由(2.7)式,对于任意的 t,联络 ω_t 的曲率形式可以表示为

$$\Omega_t=\mathrm{d}\omega_t+[\omega_t,\omega_t]=\Omega+tD\eta+t^2[\eta,\eta].\tag{3.8}$$

于是,与变分$\{\omega_t\}$相应的 Yang-Mills 泛函是

$$\begin{aligned}J(t)=J(\omega_t)&=\frac{1}{2}(\Omega_t,\Omega_t)\\&=\frac{1}{2}(\Omega,\Omega)+t(\Omega,D\eta)+\frac{1}{2}t^2((D\eta,D\eta)+2(\Omega,[\eta,\eta]))+o(t^2).\end{aligned}\tag{3.9}$$

由此可以得到 Yang-Mills 泛函的的第一、第二变分公式如下:

$$J'(0)=(\Omega,\ D\eta)=(D^*\Omega,\eta),\tag{3.10}$$

$$J''(0)=(D\eta,D\eta)+2(\Omega,\ [\eta,\eta])=(D^*D\eta,\eta)+2([\eta,\eta],\Omega).\tag{3.11}$$

从(3.10)式易知，Yang-Mills 联络的 Euler-Lagrange 方程可以简单地写为

$$D^{*}\Omega \equiv 0. \tag{3.12}$$

(3.12)也是联络 $\omega\in\mathscr{C}(P)$为 Yang-Mills 联络的充分必要条件. 另一方面，根据 Bianchi 恒等式[5]，$D\Omega\equiv 0$. 于是由命题 2.2 可得

推论 3.2 设 $\omega\in\mathscr{C}(P)$，则 ω 是 Yang-Mills 联络当且仅当它的曲率形式 Ω 是调和的.

由于 $\eta\in\Gamma(T^{*}M\otimes E)$，存在光滑截面 $\eta_i\in\Gamma(E)$，使得

$$\eta=\sum_i \eta_i\theta^i,$$

其中分量 η_i 也可以看作是 P 上的 $\mathfrak{g}$-值函数. 利用(2.5)和(2.8)两式得

$$D\eta=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\eta_{j,i}-\eta_{i,j})\theta^i\wedge\theta^j;\quad D^{*}D\eta=\sum_{j,i}(-\eta_{i,jj}+\eta_{j,ij})\theta^i. \tag{3.13}$$

再根据命题 3.1 和内积(·,·)的定义式(2.1)可知

$$D^{*}D\eta=\sum_{i,j}(-\eta_{i,jj}+\eta_{j,ji}+[\eta_j,F_{ij}]+\eta_jR_{ji})\theta^i, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}2([\eta,\eta],\Omega)&=\int_M\sum_{i,j}\langle[\eta(e_i),\eta(e_j)],\Omega(e_i,e_j)\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M=\int_M\sum_{i,j}\langle[\eta_i,\eta_j],F_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M\\&=-\int_M\sum_{i,j}\langle\eta_j,[\eta_i,F_{ij}]\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M=\int_M\sum_{i,j}\langle[\eta_j,F_{ij}],\eta_i\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M,\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中的第三个等号是由于内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ 的不变性. 因此，如果令

$$S(\eta)=\sum_{i,j}(-\eta_{i,jj}+\eta_{j,ji}+2[\eta_j,F_{ij}]+\eta_jR_{ji})\theta^i, \tag{3.16}$$

则第二变分公式(3.11)可化为

$$J''(0)=(S(\eta),\eta). \tag{3.17}$$

为了以后的应用，对于任意的 $\varphi\in\Gamma((\wedge^2T^{*}M)\otimes E)$，我们导出 $\Delta\varphi$ 的表达式. 为此，设

$$\varphi=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_{ij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad \varphi_{ij}=-\varphi_{ji}, \tag{3.18}$$

其中的分量 $\varphi_{ij}\in\Gamma(E)$，它也可以视为 P 上的 $\mathfrak{g}$-值函数. 利用(2.5)，(2.8)两式易知

$$DD^{*}\varphi=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(\varphi_{ki,kj}-\varphi_{kj,ki})\theta^i\wedge\theta^j, \tag{3.19}$$

$$D^{*}D\varphi=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(\varphi_{ki,jk}+\varphi_{ij,kk}-\varphi_{kj,ik})\theta^i\wedge\theta^j. \tag{3.20}$$

于是

$$\Delta\varphi=DD^{*}\varphi+D^{*}D\varphi=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-\varphi_{ij,kk}+\varphi_{ki,kj}-\varphi_{ki,jk}+\varphi_{kj,ik}-\varphi_{kj,ki})\theta^i\wedge\theta^j. \tag{3.21}$$

根据命题 3.1，上式可以改写为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-\varphi_{ij,kk}+2[\varphi_{kj},F_{ik}]+2\varphi_{kj}R_{ki}+2\sum_l\varphi_{kl}R_{ilkj})\theta^i\wedge\theta^j\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sum_k(-\varphi_{ij,kk}+2[\varphi_{kj},F_{ik}]+2\varphi_{kj}R_{ki})+\sum_{k,l}\varphi_{kl}R_{klij})\theta^i\wedge\theta^j,\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中的第二个等号利用了第一 Bianchi 恒等式及 φ_{ij}关于 i,j 的反对称性.

4　欧氏空间中子流形的 Yang-Mills 场

设 $\mathbf{R}^{n+p}$ 是 $n+p$ 维欧氏空间，$f:M\to\mathbf{R}^{n+p}$ 是紧致的 n 维黎曼流形 M 到 $\mathbf{R}^{n+p}$ 内的等距浸入；我们同时用 f 表示映射 f 的像在 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的位置向量. 在不引起混淆的情况下，有时也把点 $p\in M$ 和它在映射 f 下的像 $f(p)$ 等同起来.

从现在开始，我们约定指标的取值范围如下：

$$1\leqslant A,B,C,\cdots,\leqslant n+p,\quad n+1\leqslant\alpha,\beta,\gamma\cdots,\leqslant n+p.$$

设 f^A 是映射 f 在 $\mathbf{R}^{n+p}$ 的分量函数，即令 $f=(f^1,\cdots,f^{n+p})$. 在 M 上选取局部的单位正交标架场 $\{e_i\}$ 和单位正交的法标架场 $\{e_\alpha\}$，$\{e_i\}$ 的对偶标架场记为 $\{\theta^i\}$. 则 M 的结构方程是

$$\begin{cases}\mathrm{d}\theta^i=\sum_j\theta^j\wedge\theta^i_j,\quad\theta^j_i+\theta^i_j=0,\\ \mathrm{d}\theta^j_i=\sum_k\theta^k_i\wedge\theta^j_k+\frac{1}{2}R^j_{ikl}\theta^k\wedge\theta^l.\end{cases}\tag{4.1}$$

如果

$$h=\sum_{\alpha,i,j}h^\alpha_{ij}\theta^i\otimes\theta^j\otimes e_\alpha,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji},\tag{4.2}$$

是 M 在 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的第二基本形式，则有 $h=\nabla df$，其中 ∇ 由 M 的黎曼联络和 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的典型联络诱导；同时有如下的 Gauss 方程

$$R_{ijkl}=h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}-h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}.\tag{4.3}$$

因而由(3.1)式

$$R_{ij}=\sum_{\alpha,k}(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kk}-h^\alpha_{ik}h^\alpha_{kj}).\tag{4.4}$$

设＄＄

$$\mathrm{d}f=\sum_i f_i\theta^i=\sum_i(f^1_i,\cdots,f^{n+p}_i)\theta^i,$$

则 $f_i=\mathrm{d}f(e_i)=e_i(f)$. 于是

$$\nabla\mathrm{d}f=\sum_{i,j}f_{i,j}\theta^i\otimes\theta^j=(f^1_{i,j},\cdots,f^{n+p}_{i,j})\theta^i\otimes\theta^j,\tag{4.5}$$

其中

$$f^A_{i,j}=e_j(f^A_i)-f^A_k\theta^k_i(e_j),\tag{4.6}$$

是光滑函数 f^A 的二阶协变微分的分量，它关于标 i,j 对称的. 比较(4.2)式和(4.5)式，可知 $f_{i,j}=h^\alpha_{ij}e_\alpha$，因而

$$\sum_A f^A_{i,j}f^A_{k,l}=\langle f_{i,j},f_{k,l}\rangle=\sum_\alpha h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kl}.\tag{4.7}$$

另一方面，因为 f 是等距浸入，我们有如下的关系式

$$\begin{cases}\sum_A f^A_i f^A_j=\delta_{ij},\quad\sum_A f^A_i f^A_{j,k}=0,\\ \sum_A f^A_i f^A_{k,lj}+\sum_A f^A_{i,j}f^A_{k,l}=0.\end{cases}\tag{4.8}$$

设 $\varphi\in\Gamma((\wedge^2T^*M)\otimes E)$，并且具有局部表达式(3.18). 对于每一个 A，定义

$$\eta^A=\sum_{i,j}\varphi_{ij}f^A_j\theta^i,\tag{4.9}$$

则 $\eta^A \in \Gamma(T^*M \otimes E)$. 相应地,有光滑变分 $\omega_t^A = \omega + t\eta^A$. 它所对应的 Yang-Mills 泛函记为 $J^A(t) = J(\omega_t^A)$.

命题 4.1 对于任意的 $\varphi \in \Gamma(\wedge^2 T^*M)\otimes E)$,如果 φ 是调和的,则

$$\sum_A J^{A''}(0) = \int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l} \langle (2h_{kl}^\alpha h_{il}^\alpha - h_{ll}^\alpha h_{ki}^\alpha)\varphi_{kj}, \varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M + 2\int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l} \langle h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha \varphi_{kl}, \varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M. \tag{4.10}$$

证明 对于每一个 A,由定义式(3.16)和(4.9),

$$\begin{aligned} S(\eta^A) &= \sum_{i,j}(-\eta_{i,jj}^A + \eta_{j,ji}^A + 2[\eta_j^A, F_{ij}] + \eta_j^A R_{ji})\theta^i \\ &= \sum_i \Big(\sum_{j,k}(-\varphi_{ik,jj} f_k^A - 2\varphi_{ik,j} f_{k,j}^A - \varphi_{ik} f_{k,jj}^A + \varphi_{jk,ji} f_k^A + \\ &\quad \varphi_{jk,j} f_{k,i}^A + \varphi_{jk,i} f_{k,j}^A + \varphi_{jk} f_{k,ji}^A) + 2\sum_{j,k}([\varphi_{jk}, F_{ij}] f_k^A + \varphi_{jk} f_k^A R_{ji})\Big)\theta^i. \end{aligned}$$

再利用关系式(3.17)以及(4.8),(4.9)式进行直接计算得

$$\begin{aligned} \sum_A J^{A''}(0) &= \sum_A (S(\eta^A), \eta^A) \\ &= \sum_{A,i,j,k,l} \int_M (f_k^A f_l^A \langle -\varphi_{ik,jj}, \varphi_{il}\rangle_g - 2 f_{k,j}^A f_l^A \langle \varphi_{ik,j}, \varphi_{il}\rangle_g - f_{k,jj}^A f_l^A \langle \varphi_{ik}, \varphi_{il}\rangle_g)\mathrm{d}V_M + \\ &\quad \sum_{A,i,j,k,l} \int_M (f_k^A f_l^A \langle \varphi_{jk,ji}, \varphi_{il}\rangle_g + f_{k,i}^A f_l^A \langle \varphi_{jk,j}, \varphi_{il}\rangle_g + \\ &\quad f_{k,j}^A f_l^A \langle \varphi_{jk,i}, \varphi_{il}\rangle_g + f_{k,ji}^A f_l^A \langle \varphi_{jk}, \varphi_{il}\rangle_g)\mathrm{d}V_M + \\ &\quad 2\sum_{A,i,j,k,l} \int_M (f_k^A f_l^A (\langle [\varphi_{jk}, F_{ij}], \varphi_{il}\rangle_g + f_k^A f_l^A R_{ji} \langle \varphi_{jk}, \varphi_{il}\rangle_g)\mathrm{d}V_M \\ &= \sum_{i,j,k} \int_M \langle -\varphi_{ik,jj}, \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \sum_{\alpha,i,j,k,l} \int_M h_{kj}^\alpha h_{lj}^\alpha \langle \varphi_{ik}, \varphi_{il}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \\ &\quad \sum_{i,j,k} \int_M \langle \varphi_{jk,ji}, \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M - \sum_{\alpha,i,j,k,l} \int h_{kj}^\alpha h_{li}^\alpha \langle \varphi_{jk}, \varphi_{il}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \\ &\quad 2\sum_{i,j,k} \int_M (\langle [\varphi_{jk}, F_{ij}], \varphi_{ik}\rangle_g + R_{ji} \langle \varphi_{jk}, \varphi_{ik}\rangle_g)\mathrm{d}V_M \\ &= \sum_{i,j,k} \int_M \langle -\varphi_{ik,jj} + 2[\varphi_{jk}, F_{ij}], \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \sum_{\alpha,i,j,k,l} \int_M h_{kj}^\alpha h_{lj}^\alpha \langle \varphi_{ik}, \varphi_{il}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \\ &\quad \sum_{i,j,k} \int_M \langle \varphi_{jk,ji}, \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M + \sum_{i,j,k} \int_M R_{ji} \langle \varphi_{jk}, \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中最后一步利用了 φ_{ij} 关于下标的反对称性和 h_{ij}^α 关于下标的对称性. 因为 φ 是调和的,所以 $\Delta\varphi = 0, D^*\varphi = 0$. 于是分别由(3.22)式、散度定理和 D^* 的定义式(2.8)可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,k} \int_M \langle -\varphi_{ik,jj} + 2[\varphi_{jk}, F_{ij}], \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M \\ &\quad = -2\sum_{i,j,k} \int_M \langle \varphi_{jk} R_{ji}, \varphi_{ik}\rangle_g - \sum_{i,j,k,l} \int_M \langle \varphi_{jl} R_{jlik}, \varphi_{ik}\rangle_g, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\sum_{i,j,k} \int_M \langle \varphi_{kj,ji}, \varphi_{ik}\rangle_g \mathrm{d}V_M = \int_M \sum_{i,j,k} \langle \varphi_{jk,j}, \varphi_{ik,i}\rangle_g \mathrm{d}V_M = (D^*\varphi, D^*\varphi) = 0. \tag{4.13}$$

把(4.12)式和(4.13)式代入(4.11)式得

$$\sum_A J^{A''}(0) = -\int_M \sum_{i,k} \langle \sum_j R_{ji}\varphi_{jk} + \sum_{j,l}\varphi_{jl}R_{jlik}, \varphi_{ik}\rangle_{\mathfrak{g}} \mathrm{d}V_M + \int_M \sum_{i,j,k,l} \langle h^\alpha_{kj}h^\alpha_{lj}\varphi_{ik}, \varphi_{il}\rangle_{\mathfrak{g}} \mathrm{d}V_M. \tag{4.14}$$

最后把(4.3)和(4.4)式代入上式并进行整理便可得到(4.10)式. □

有了上面的准备，我们来证明本文的主要定理.

定理 1.3 的证明 设 ω 是主丛 P 上的任意一个非平坦的 Yang-Mills 联络，则其曲率形式 $\Omega\in\Gamma((\wedge^2T^*M)\otimes E)$ 是非零的调和二次外微分式.

任意给定一个非零的调和二次形式 $\varphi\in\Gamma(\wedge^2T^*M)\otimes E$,定义 M 上的二次形式 Φ 如下：

$$\Phi = \sum_{i,j}\Phi_{ij}\theta^i\otimes\theta^j, \quad \Phi_{ij} = \Phi(e_i,e_j) = \sum_k \langle\varphi_{ik},\varphi_{jk}\rangle_{\mathfrak{g}}. \tag{4.15}$$

易知，Φ 与标架场$\{e_i\}$的选取无关，且有 $\Phi_{ij}=\Phi_{ji}$,即 Φ 是 M 上的二阶对称的协变张量场. 同时,Φ 还是半正定的,因而对于每一个 i,$\Phi_{ii}=\Phi(e_i,e_i)\geqslant 0$.

任意固定一点 $x\in M$,取 M 的单位正交切标架场$\{e_i\}$和单位正交法向量场$\{e_\alpha\}$，使得在点 x 处 e_{n+p}平行于 M 的平均曲率向量，且有

$$\Phi_{ij} = \Phi_i\delta_{ij}, \quad \Phi_i \geqslant 0. \tag{4.16}$$

于是在点 x 处

$$\sum_i h^\alpha_{ii} = 0, \quad n+1\leqslant\alpha\leqslant n+p-1, \quad H = \frac{1}{n}\sum_i h^{n+p}_{ii}. \tag{4.17}$$

以下在固定点 x 处进行计算. 令

$$S^\alpha = \sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2, \quad n+1\leqslant\alpha\leqslant n+p-1, \quad S_H = \sum_{i,j}(h^{n+p}_{ij})^2, \tag{4.18}$$

则有

$$S = \sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2 = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p-1}S^\alpha + S_H. \tag{4.19}$$

利用(4.15)—(4.19)各式以及不等式(2.9),得

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle(2h^\alpha_{kl}h^\alpha_{il} - h^\alpha_{ll}h^\alpha_{ki})\varphi_{kj},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} &= \sum_{\alpha,i,j,k,l}(2h^\alpha_{kl}h^\alpha_{il} - h^\alpha_{ll}h^\alpha_{ki})\Phi_{ki} \\
&= \sum_{i,\alpha}(2\sum_l(h^\alpha_{il})^2 - \sum_l h^\alpha_{ll}h^\alpha_{ii})\Phi_i \\
&= \sum_i(\sum_{\alpha=n+1}^{n+p-1}(2\sum_l(h^\alpha_{il})^2 - \sum_l h^\alpha_{ll}h^\alpha_{ii}) + (2\sum_l(h^{n+p}_{il})^2 - \sum_l h^{n+p}_{ll}h^{n+p}_{ii}))\Phi_i \\
&\leqslant \sum_i(\frac{2(n-1)}{n}\sum_{\alpha=n+1}^{n+p-1}S^\alpha + \frac{2(n-1)}{n}S_H + \\
&\quad |(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H-nH^2)} - (3n-4)H^2)\Phi_i \\
&= (\frac{2(n-1)}{n}S + |(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H-nH^2)} - \\
&\quad (3n-4)H^2)\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

另一方面，反复利用 Cauchy-Schwarz 不等式又可得到

$$
\begin{aligned}
2\sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} &= 2\sum_{i,j,k,l}\Big(\sum_{\alpha}h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}\Big)\cdot\langle\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&\leqslant 2\sqrt{\sum_{i,j,k,l}\Big(\sum_{\alpha}h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}\Big)^2}\sqrt{\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}\cdot\langle\varphi_{kl},\varphi_{kl}\rangle_{\mathfrak{g}}} \\
&\leqslant 2\sqrt{\sum_{\alpha,i,l}(h_{ik}^{\alpha})^2\cdot\sum_{\alpha,j,k}(h_{jl}^{\alpha})^2}\cdot\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= 2\sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} = 2S\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

把不等式(4.20)和(4.21)加起来得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle(2h_{kl}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}-h_{ll}^{\alpha}h_{ki}^{\alpha})\varphi_{kj},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} + 2\sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle h_{ik}{}^{\alpha}h_{jl}{}^{\alpha}\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&\leqslant\Big(\frac{2(2n-1)}{n}S+|(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H-nH^2)}- \\
&\quad(3n-4)H^2\Big)\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

由点 $x\in M$ 的任意性，上式在 M 上处处成立. 注意到

$$
\|\varphi\|^2=\frac{1}{2}\int_M\sum_{ij}\langle\varphi_{ij},\varphi_{ij}\rangle_{\mathfrak{g}}\mathrm{d}V_M>0,
$$

当定理 1.3 的条件(1.1)成立时，由(4.10)式

$$
\begin{aligned}
\sum_{A}J^{A''}(0)\leqslant 2\Big(&\frac{2(2n-1)}{n}S+|(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H-nH^2)}- \\
&(3n-4)H^2\Big)\|\varphi\|^2<0.
\end{aligned}
$$

于是，存在某个 A，满足 $J^{A''}(0)<0$. 因此，Yang-Mills 联络 ω 不是弱稳定的. 由 ω 的任意性，黎曼流形 M 是 Yang-Mills 不稳定的.

5 球面中子流形的 Yang-Mills 场

本节的目的是证明定理 1.4. 设

$$
S^{n+p}(a)=\{x\in\mathbf{R}^{n+p+1};\langle x,x\rangle=a^2\}
$$

是半径为 a 的 $n+p$ 维标准球面，$x:M\to S^{n+p}(a)$ 是 $S^{n+p}(a)$ 中紧致的 n 维浸入子流形，则 $e_0=\frac{1}{a}x$ 是 $S^{n+p}(a)$ 在 $\mathbf{R}^{n+p+1}$ 中的单位法向量. 任意取 M 上的单位正交标架场 $\{e_i\}$ 和 M 在 $S^{n+p}(a)$ 中的单位正交法标架场 $\{e_\alpha\}$，$\{e_0,e_i,e_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^{n+p+1}$ 沿 M 定义的单位正交法标架场. 设 M 在 $\mathbf{R}^{n+p+1}$ 中的第二基本形式是

$$
h=h^0e_0+\sum_{\alpha}h^{\alpha}e_{\alpha},\ h^0=\sum_{i,j}h_{ij}^0\theta^i\theta^j,
$$

$$
h^{\alpha}=\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\theta^i\theta^j,\quad h_{ij}^0=h_{ji}^0,\quad h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha},
$$

则 $\sum_{\alpha}h^{\alpha}e_{\alpha}$ 是 M 在 S^{n+p} 中的第二基本形式，并且 $h_{ij}^0=-\frac{1}{a}\delta_{ij}$. 于是，当我们视 M 为 $\mathbf{R}^{n+p+1}$ 中

的子流形时，(4.10)式化为

$$\sum_A J^{A''}(0)=\int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle(2h^{\alpha}_{kl}h^{\alpha}_{il}-h^{\alpha}_{ll}h^{\alpha}_{ki})\varphi_{kj},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M+$$

$$2\int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl}\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M+$$

$$\frac{1}{a^2}\int_M \sum_{i,j,k,l}\langle(2\delta_{kl}\delta_{il}-\delta_{ll}\delta_{ki})\varphi_{kj},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M+$$

$$\frac{2}{a^2}\int_M \sum_{i,j,k,l}\langle\delta_{ik}\delta_{jl}\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M$$

$$=\int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle(2h^{\alpha}_{kl}h^{\alpha}_{il}-h^{\alpha}_{ll}h^{\alpha}_{ki})\varphi_{kj},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M+$$

$$2\int_M \sum_{\alpha,i,j,k,l}\langle h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl}\varphi_{kl},\varphi_{ij}\rangle_g \mathrm{d}V_M+\frac{4-n}{a^2}\|\varphi\|^2.$$

再仿照定理 1.4 的证明方法，我们可以得到

$$\sum_A J^{A''}(0)\leqslant 2\Big(\frac{2(2n-1)}{n}S+|(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H-nH^2)}-$$

$$(3n-4)H^2+\frac{4-n}{2a^2}\Big)\|\varphi\|^2.$$

由此不难看出，如果定理中条件满足，则有

$$\sum_A J^{A''}(0)<0.$$

所以，子流形 M 是 Yang-Mills 不稳定的. 定理 1.4 得证.

致谢 非常感谢李海中教授给予作者的热情帮助和支持.

参考文献：

[1] BOURGUIGNON J P, LAWSON H B Jr. *Stability and isolation phenomenon for Yang-Mills fields* [J]. Comm. Math. Phys., 1981, **79**: 189—230.

[2] BOURGUIGNON J P, LAWSON H B Jr, SIMONS J. *Stability and gap phenomenon of Yang-Mills field* [J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 1979, **76**: 1550—1553.

[3] LAQUER H T. *Stability properties of the Yang-Mills functional near the canonical connection* [J]. Michigan Math. J., 1984, **31**: 139—159.

[4] KOBAYASHI S, OHNITA Y S, TAKEUCHI M. *On instability of Yang-Mills Connections* [J]. Math. Z., 1986, **193**: 165—189.

[5] KOBAYASHI S, NOMIZU K. *Foundations of Differential Geometry* [M], Vol. I, Interscience Publishers, New York, London, 75—79.

[6] SIMONS J. *Minimal varieties in riemannian manifolds* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1966, **18**: 380—385.

[7] XIN Y L. *Some results on stable harmonic maps* [J]. Duke Math. J., 1980, **47**: 609—613.

[8] XIN Y L. *Topology of certain submanifold in the Euclidean sphere* [J]. Proc. Math. Soc., 1981, **84** (4): 643—648.

[9] LEUNG P F. *On the Stability of Harmonic Maps* [M]. Lecture Notes math., Springer Verlag, 1982, **194**: 122—129.

[10] LEUNG P F. *A note on stable harmonic maps* [J]. J. London Math. Soc., 1984, **29**: 380—384

[11] 吴传喜. 关于稳定调和映照的一些结果 [J]. 数学学报, 1991, **34**(1): 27—32.
WU Chuan-xi. *Some results on stable harmonic maps* [J]. Acta Math. Sinica, 1991, **34**(1): 27—32. (in Chinese)

[12] 吴传喜. 关于稳定调和映照的一点注记 [J]. 数学杂志, 1991, **11**: 72—76.
WU Chuan-xi. *A note on stable harmonic maps* [J]. J. Math. (Wuhan), 1991, **11**: 72—76. (in Chinese)

[13] WEI S W. *On topological vanishing theorems and the stability of Yang-Millls field* [J]. Indiana University Math. J., 1984, **33**: 511—529.

[14] SMITH R T. *The second variation formula for harmonic maps* [J]. Proc. AMS, 1975, **47**: 229—236.

[15] PAN Y L. *Some nonexistence theorems on stable harmonic mappings* [J]. Chinese Ann. Math., 1982, **3**: 515—518.

[16] PARKER T H. *Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds* [J]. Comm. Math. Phys., 1982, **85**: 563—602.

Some Results on Instability of Yang-Mills Field of Submanifolds in Euclidean Space and Standard Sphere

LI Xing-xiao, CAO Lin-fen

(School of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang 453002, China)

Abstract: The authors discuss the stability of Yang-Mills field of compact submanifolds in Euclidean space R^{n+p} and sphere S^{n+p} respectively, and present some results on its instability.

Key words: Yang-Mills connection; Yang-Mills field; stability of Yang-Mills field.