第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

除环上无限方阵的分解*

朱昌杰[1]， 陈国龙[2]

(1. 淮北煤炭师范学院数学系，安徽 淮北 235000；2. 中国科学院软件研究所计算机科学实验室，北京 100080)

摘 要：对除环上无限方阵的逆方阵作了简单讨论，证明了除环上无限方阵的分解定理.

关键词：除环；逆方阵；无限方阵的分解

分类号：AMS(2000) 15A09/CLC number：O151.21

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0513-07

作为数学的一个重要分支矩阵理论有着悠久的发展历史和极其丰富的内容，它在很多学科中都有着十分广泛的应用. 但是，对于行列均是无限的矩阵来说却缺乏系统的研究. 模型论是数理逻辑的一个重要分支，它为数学论证提供了超出一般常规的新方法，可以用来证明不少难以用常规方法证明的定理. 近年来，北师大的王世强先生首次用模型论的方法对无限方阵展开了研究. 王世强先生对域上无限方阵的逆以及对角化问题展开了深入的探讨，取得了一批有意义的重要成果. 这些结果对域的无限直和上的线性变换的研究以及域上无限线性群的研究奠定了一定的基础. 本文对除环上无限方阵的逆作了一些简单讨论，在此基础上进一步研究了除环上无限方阵的分解问题. 以下讨论中，R 均表示一除环.

1 基本概念和引理

为方便以下的讨论，我们先介绍几个基本概念. 以下讨论中，R 均表示一除环.

定义 1 设 A 为 R 上的无限方阵，如果 A 的每一行(列)中只含有限个非零元，则称 A 为行(列)有限的，如果 A 既是行有限又是列有限的，则称 A 为行列有限的，简称为 rcf 方阵.

定义 2 设 A 为 R 上列有限的无限方阵，对于 A 的诸行向量 $r_1,r_2,r_3,\cdots$ 及 R 中任一组元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，可以依自然方式定义行向量的左无限线性组合 $a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+\cdots$. 如果存在 R 中一组不全为零的 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，使此线性组合为零向量，则称 A 的诸行向量在 R 上左无限线性相关，否则称 A 的诸行向量在 R 上左无限线性无关.

对偶地，可类似定义 A 的诸列向量在只上右无限线性相关和右无限线性无关.

定义 3 设 A 为除环 R 上无限方阵，如果存在 A 的有限个行(列)向量在 R 上左(右)线性

* **收稿日期**：2001-09-24
作者简介：朱昌杰(1963-)，男，副教授.

相关，则称 A 的诸行(列)向量在 R 上左(右)线性相关，否则称 A 的诸行(列)向量在 R 上左(右)线性无关.

下面两个引理的证明较简单，我们省去其证明.

引理1 设 S 为 R 上无限个左线性方程所组成的集合(其中未知量的总数可为无限多，但每个左线性方程的未知量个数是有限的)，则 S 在 R 中有解的充要条件是，S 的每一有限子集在 R 中有解.

引理2 (1) 设 A,B 均为 R 上行有限的无限方阵，则对于 R 上任何无限方阵 C，都有

$$(AB)C=A(BC).$$

(2) 设 A,B 都是 R 上列有限的无限方阵，则对于 R 上任何无限方阵 C，都有

$$(CB)A=C(BA).$$

2 主要结果及证明

我们首先证明一个除环上无限方阵存在单侧逆方阵的充要条件.

定理1 (1) 设 A 为除环 R 上列有限的无限方阵，则 A 具有 R 上列有限的右逆方阵的充要条件是 A 的诸行向量在 R 上左无限线性无关.

(2)与(1)对偶的命题

证明 (1) (1.1)充分性. 设 A 的诸行向量在 R 上无限左线性无关以 $c_1,c_2,c_3,\cdots$ 记作 A 的诸列向量，并令

$$e_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad e_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad e_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad \cdots.$$

(1.1.1) 现在证明，e_1 可由 $c_1,c_2,c_3,\cdots$ 中的有限个在 R 上右线性表示. 假设不然，则对每一正整数 k，方程 $e_1=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k$ 在 R 中无解，把此方程等价地改写为 R 上的无限个左线性方程

$$(E_k)\quad \begin{Bmatrix}1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k\\0=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k\\0=a_{31}x_1+a_{32}x_2+\cdots+a_{3k}x_k\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{Bmatrix},$$

(1.1.1.1) 若 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k}$ 不全为零，由 (E_k) 在 R 中无解及引理1易见，存在一正整数 $l=l(k)$)能使 (E_k) 的前 l 个方程在 R 中无解，由诸方程的形状及线性方程组的理论易知 $l\geqslant 2$，且有 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k})$ 可由 $(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2k}),\cdots,(a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{lk})$ 在 R 上左线性表示，事实上只要考察 (E_k) 的前 l 个方程的系数矩阵和增广矩阵

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}&1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{lk}&0\end{pmatrix},$$

这里 $\overline{B}$ 是增广矩阵，前 k 列为矩阵系数，设为 B.

因为方程无解，所以秩$(\overline{B})$ >秩(B)，设秩$(\overline{B})=m(\leqslant l)$，现选取 $\overline{B}$ 中的 m 行使其左线性无关，则它们也是 $\overline{B}$ 的极大左线性无关组，由秩$(\overline{B})$>秩(B)可知，这 m 个行中必含有第一行，这说明其它 $m-1$ 行均在 $\overline{B}$ 的第 2 至第 l 行中选取，实际上它们构成了 $\overline{B}$ 的左线性无关行，由于最后一分量为 0，去掉这最后一个分量后，它们仍左线性无关，且构成了 B 的极大左线性无关组，因此 B 的第一行可由 B 的其它行左线性表示.

(1.1.1.2) 若 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k}$全为零，任取 $l\geqslant 2$，显见仍有与(1.1.1.1)同样的结论成立.

(1.1.1.3) 以 $r_1,r_2,r_3,\cdots$记为 A 的诸行向量，现在考虑方程 $r_1=x_2r_2+x_3r_3+\cdots$，由 A 是列有限的可知此方程有意义，把此方程等价地改写为 R 上的一集(无限多个)右线性方程(Δ)，下面考察(Δ)任一有限子集 S 解的情况，仿照(1.1.1.1)及(1.1.1.2)(并注意 k 的任意性)的讨论可以证明：由 S 中的元素所构成的右线性方程组的增广矩阵和系数矩阵的秩相等. 因此 S 在 R 中有解，由引理 l 可知(Δ)在 R 中有解，从而知 $r_1,r_2,r_3,\cdots$在 R 上无限左线性相关，这与题设矛盾，因此 e_1 可由 $c_1,c_2,c_3,\cdots$中的有限个在 R 上右线性表示.

同理可证每个 $e_i(i=2,3,\cdots)$都可由 $c_1,c_2,c_3,\cdots$中的有限个在 R 上右线性表示. 由此可得 A 具有 R 上的列有限的右逆方阵.

(1.2) *必要性*. 设 A 具有 R 上的列有限的右逆方阵 B，即 $AB=I$. 以 $r_1,r_2,r_3,\cdots$记作 A 的诸行向量，若有 $d_1r_1+d_2r_2+d_3r_3+\cdots=0(d_i\in R,i=1,2,3,\cdots)$.

令 $D=(d_{ij})$，其中以 $d_{1j}=d_{2j}=d_{3j}=\cdots=d_j(j=1,2,3,\cdots)$. 则易见 $DA=0$. 再由 A,B 均为列有限的及引理 2 可得

$$D=DI=D(A\ B)=(D\ A)B=OB=0.$$

从而有

$$d_1=d_2=d_3=\cdots=0.$$

所以 $r_1,r_2,r_3,\cdots$在 R 上左无限线性无关.

(2) 证明可仿 (1).

引理 3 设 A 为 R 上一个 n 阶上三角方阵，且 A 可逆，则 A 的可逆矩阵也是上三角方阵.

证明 注意如下事实：R 上的任一 n 阶方阵 B，若它是上三角方阵且主对角线上的元素全为零，则必存在一正整数 $m(\leqslant n)$使 $B^m=O_n$(表 n 阶零方阵).

根据题设 A 的主对角线上的元素全不为零，不妨设为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则 A 可表为

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} A_1,$$

这里第一个矩阵除主对角线外，其余元素全为 0，A_l 是上三角方阵，且其主对角线上的元素全为 1.

从而 $A_1=I_n-B$，这里 I_n 为 R 上 n 阶单位矩阵，B 为一主对角线上元素全为 0 的上三角方阵，因此存在一正整数 $m(\leqslant n)$，使 $B^m=O_n$，且有 $B^2,B^3,\cdots,B^{m-1}$全为上三角方阵，而(I_n-B)是可逆的，且其逆为 $I+B+B^2+\cdots+B^{m-1}=(A_1)^{-1}$. 显然 I_n-B 或 A_l 的逆仍为上三角方阵，从而

$$A^{-1}=(A_1)^{-1}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & O \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ C & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

考察 A^{-1}的结构很容易看出 A^{-1}相当于将 $(A_1)^{-1}$这个上三角方阵的每一列都右乘一个适当的倍数,因此,它仍为上三角方阵.

由于以下讨论的需要,我们在此给出关于除环上可逆矩阵以及秩的一般性结果对于域上矩阵的一些基本结果,不少均可推广到除环上来,如初等变换与初等矩阵,线性方程组解的结构等.

定义 4 设 A 是 R 上一个 n 阶矩阵,如果有 R 上一个 n 阶矩阵 B 存在,使得 $AB=BA=I_n$(1)(I_n 是 n 阶单位矩阵,则称 A 是 R 上一个非奇异矩阵或可逆矩阵. 易知,当 A 可逆时,满足(1)式的 B 是唯一的,称它为 A 的逆矩阵,记为 A^{-1}.

定义 5 设 A 为 R 上一个 m 行 n 列矩阵,A 的 m 个行向量在 R 上的所有左线性组合作成 R 上一个右向量空间,其维数称为 A 的行左秩数. 显然 A 的行左秩数就是 A 的 m 个行中左极大线性无关的向量个数. 同样可定义 A 的列右秩数.

命题 1[5] 用消法矩阵左(或右)乘一个 A 等于对 A 进行一次行(或列)的消法变换;用倍法矩阵左(或右)乘 A 等于对 A 进行一次行(或列)的倍法变换,简言之,用初等矩阵左(或右)乘 A 等于对 A 进行一次行(或列)的初等变换.

命题 2[5] 设 A 为除环 R 上一个 n 阶矩阵,如果有 R 上 n 阶矩阵 B,使 $AB=I_n$,则 A 必可由经若干次列的消法变换化为

$$E_n(a)=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

$a\neq 0$. 空白处的元素全为 0.

类似地,如果有 R 上 n 阶矩阵 B,使 $BA=I_n$,则 A 必可经若干次行的消法变换化为上述形式.

命题 3[5] 除环 R 上的矩阵的行左秩数与列右秩数相等,即都是该矩阵的秩数;并且初等变换不改变矩阵的行左秩数与列右秩数. 因此,初等变换不改变矩阵的秩数. 有了上述命题,我们不难得到下面的结论

推论 设 A 是 R 上一个 n 阶矩阵,则 A 可逆的充要条件是 A 的行列式不为零.

引理 4 设 $A=(a_{ij})$是 R 上一个 n 阶方阵,它的 n 个顺序主子式的值均非零,则存在一个下三角矩阵 $L=(l_{ij})(i<j_{ij}=0)$一个上三角矩阵 U,使得 $A=LU$,此外若 L 的主对角线上的元素 $l_{ij}=1(i=1,2,\cdots,n)$,则这种分解是唯一的.

证明 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

且它的 n 个顺序主子式的值均非零，显然有 $a_{11}\neq 0$，令

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{21}a_{11}^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{31}a_{11}^{-1} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1}a_{n1}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

则

$$E_1A=\begin{pmatrix}a_{11} & * & * & \cdots & *\\ 0 & b_{11} & * & \cdots & *\\ 0 & * & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & * & * & \cdots & *\end{pmatrix}=A_1.$$

由矩阵的分块性质可得，A_l 的 2 阶主子矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & *\\ 0 & b_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a_{21}a_{11}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

由 $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 可逆可得 $\begin{pmatrix}a_{11} & *\\ 0 & b_{11}\end{pmatrix}$ 可逆，因此 $b_{11}\neq 0$.

类似于上述讨论可知存在一个可逆的下三角矩阵 E_2，使得

$$E_2A_1=\begin{pmatrix}a_{11} & * & * & \cdots & *\\ 0 & b_{11} & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & c_{11} & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & * & \cdots & *\end{pmatrix}=A_2.$$

同样，类似于上述讨论可证 $C_{11}\neq 0$ 重复上述步骤，最终可证得存在一个可逆的下三角矩阵 E_{n-1}，使

$$E_{n-1}A_{n-2}=\begin{pmatrix}a_1 & * & * & \cdots & *\\ 0 & a_2 & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{pmatrix}=A_{n-1}$$

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 全不为 0，由上述讨论可知，

$$A=(E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1)^{-1}(E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1)A=LU.$$

其中 $L=(E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1)^{-1}$，$(E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1)A=A_{n-1}=U$.

根据下三角矩阵乘积的性质及引理 3 的对偶命题可得，L 为一下三角矩阵，U 显然是一上三角矩阵，这就证明了上述题设中分解的存在性.

设 $A=LU$，且 $A=L_1U_1$，这里的 L,U 和 L_1,U_1 均是满足上述条件的分解，且 L_1 的主对角线上的元素全为 l，则有 $LU=L_1U_1$，则 $L_1^{-1}L=U_1U^{-1}$. 而

$$L_1^{-1}L=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ & * & \cdots & 1\end{pmatrix},\quad U_1U^{-1}=\begin{pmatrix}* & * & \cdots & *\\ 0 & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & *\end{pmatrix},$$

比较上述等式,只有在 $L_1^{-1}L=U_1U^{-1}=I$ 才能成立,从而可得 $L=L_1$,$U=U_1$,唯一性得证.

引理 5[3] (1) 设 A 为 R 上行有限的无限上三角方阵,且 A 的列右线性无关,则 A 有右逆无限方阵 A^{-1},且 A^{-1}也是上三角方阵.

(2)与(1)对偶的命题

定理 2 设 A 是 R 上一个列有限的无限方阵,其各顺序主子式是非奇异的,则存在一主对角线元素全为 l 的下三角无限方阵 X 和一上三角方阵 Y,使 $XA=Y$ 成立,特别地当 X 为行有限的无限方阵时,存在一主对角线上全为 l 且行有限的无限下三角方阵 L,使 $A=LY$ 成立.

证明 令

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ x_{21} & 1 & 0 & \cdots\\ x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots\\ 0 & y_{22} & y_{23} & \cdots\\ 0 & 0 & y_{33} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

将这里的 x_{ij},y_{ij}均看作是未知量。先证 $XA=Y$ 在 R 上有解.先将 $XA=Y$ 改写成一组与之等价的无限右线性方程组 S(由 A 为列有限的可知这是可行的).任取 S 的一有限子集 S',设 S' 中出现的最大足码为 k,我们取 X,A,Y 的 k 阶主子矩阵,设它们分别为 X_k,A_k 和 Y_k.

需证 $X_kA_k=Y_k$ 在 R 上有解.由引理 4 可得 $X_kA_k=Y_k$ 在 R 上有解,而 S' 显然是 $X_kA_k=Y_k$ 的子集,因此 S' 在 R 上有解,由引理 l 可得 S 在 R 上有解,从而 $XA=Y$ 在 R 上有解.

当 X 的行有限时,显然 X 的列右无限线性无关,由定理 l 可得存在 X 的一个行有限的左逆方阵 X^{-1},再由引理 5 可得 X^{-1}也是下三角的无限方阵,由 X 的主对角线上的元素全为 1 可得 X^{-1}的主对角线上的元素也全为 1.

由 $XA=Y$ 可得 $A=IA=X^{-1}X)A=X^{-1}(XA)=LY$,这里 $L=X^{-1}$,满足题设的条件.

参考文献:

[1] 王世强. 关于域上无限方阵的逆方阵 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版),1993,**29**(4):327—330.
WANG Shi-qiang. *On the inverses of infinite matrices on a field* [J]. Journal of Beijing Normal University (Natural Science Edition),1993,**29**(4):327—330.(in Chinese)

[2] 王世强. 模型论基础 [M]. 北京:北京科学出版社,1987.
WANG Shi-qiang. *The Foundation of Model Theory* [M]. Beijing: Science Press,1987.(in Chinese)

[3] 陈国龙. 一类特殊无限方阵的逆方阵 [J]. 数学杂志,2000,**20**(1):60—62.
CHEN Guo-long. *The inverses of a class of special infinite matrices* [J]. Journal of Mathematics,2000,**20**(1):60—62.(in Chinese)

[4] GIARLET P G. 矩阵数值分析与最优化 [M]. 胡建伟. 北京:高等教育出版社,1990.
GIARLET P G. *Numerical Analysis of Matrices and Optimizing* [M]. Translated by HU Jian-wei. Beijing: Higher Education Press,1990.(in Chinese)

[5] 谢邦杰. 抽象代数学 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1982.
XIE Bang-jie. *Abstract Algebra* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1982. (in Chinese)

The Decomposition of Infinite Matrices on a Division Ring

ZHU Chang-jie[1], CHEN Guo-long[2]

(1. Dept. of Math., Huaibei Coal Teacher's College, Anhui 235000, China;
2. Inst. of Soft., Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: The inverses of infinite matrix on a division ring are discussed. The decomposition theorem of infinite matrix on a division ring is proved.

Key words: division ring; inverse matrix; decomposition of infinite matrix.