第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

一类优美图*

杨元生[1]，容青[2]，徐喜荣[1]

(1. 大连理工大学计算机系，辽宁 大连 116023；2. 广西师范学院物理系，广西 南宁 530001)

摘 要：设 u、v 是两个固定顶点，用 b 条内部互不相交且长度皆为 a 的道路连接 u、v 所得的图用 $P_{a,b}$ 表示. KM. Kathiresan 证实 $P_{2r,2m-1}$ (r,m 皆为任意正整数)是优美的，且猜想：除了 $(a,b)=(2r+1,4s+2)$ 外，所有的 $P_{a,b}$ 都是优美的. 杨元生已证实 $P_{2r+1,2m-1}$ 是优美的，并且证实了当 $r=1,2,3,4$ 时的 $P_{2r,2m}$ 也是优美的. 本文证实 $r=5,6,7$ 时 $P_{2r,2m}$ 也是优美的.

关键词：优美图；顶点标号；边标号.

分类号：AMS(2000) 05C78/CLC number：O157.5

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0520-05

1 引 言

优美图是图论中极有趣的重要内容，有着较好的应用价值和广阔的研究前景. 它的研究始于 1963 年 G. Ringel 提出的一个猜想[1]和 1966 年 A. Rosa 的一篇论文[2]. 1972 年，S. W. Golomb 明确给出了优美图的定义[3]. 近几年，国内外获得不少关于优美图的研究成果[4]，它们被应用于射电天文学、X-射线衍射晶体学、密码设计、导弹控制码设计、同步机码设计等领域[5].

对于一个给定的简单图 $G=(V,E)$，如果对每一个 $v\in V$，存在一个非负整数 $f(v)$(称为顶点 v 的标号)，满足下述三个条件：

(1) 对任意的 $v_1,v_2\in V$，如果 $v_1\neq v_2$，则 $f(v_1)\neq f(v_2)$；

(2) $\mathrm{Max}\{f(v)\,|\,v\in V\}=|E|$；

(3) 对任意的 $e_1,e_2\in E$，如果 $e_1\neq e_2$，则 $g(e_1)\neq g(e_2)$，$g(e)=|f(u)-f(v)|$，$e=uv$.

则 f 称为 G 的一个优美标号(graceful labeling)，G 称为优美图(graceful graph).

设 u、v 是两个固定顶点，用 b 条内部互不相交且长度皆为 a 的道路连接 u、v 所得的图用 $P_{a,b}$ 表示. KM. Kathiresan[6]证实 $P_{2r,2m-1}$ (r,m 皆为任意正整数)是优美的，且猜想：除了 $(a,b)=(2r+1,4s+2)$ 外，所有的 $P_{a,b}$ 都是优美的. 本文第一作者已证实 $P_{2r+1,2m-1}$ 是优美的[7]，并且证实了当 $r=1,2,3,4$ 时的 $P_{2r,2m}$ 也是优美的. 本文证实 $r=5,6,7$ 时 $P_{2r,2m}$ 也是优美的.

* 收稿日期：2001-11-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60143002)

作者简介：杨元生(1946-)，教授，博士生导师.

2 定理证明

用 $v_0^i, v_1^i, v_2^i, \cdots, v_{2r}^i$ 表示 $P_{a,b}$ 第 i 条长度为 $2r$ 的道路上的顶点，对所有的 $i, v_0^i = u, v_{2r}^i = v$. 如图 1 所示为 $P_{6,4}$ 的顶点表示图.

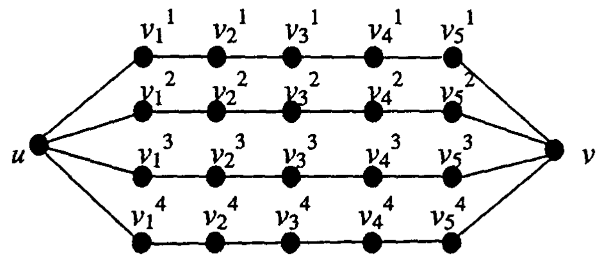

图 1 $P_{6,4}$ 的顶点表示

定理 当 $r=5,6,7$ 时，$P_{2r,2m}$ 是优美的.

证明 对 $r=5$，$P_{10,2m}$ 有 $18m+2$ 个顶点，$20m$ 条边.

定义 $P_{10,2m}$ 的一个顶点标号 f_5 如下：

$$f_5(u)=0;\ f_5(v)=2rm;$$

$$f_5(v_{2j-1}^i)=4rm-2(j-1)m-(i-1),1\leqslant i\leqslant 2m \text{ 且 } 1\leqslant j\leqslant r;$$

$$f_5(v_{2j}^i)=\begin{cases}4m+1+(j-1)/2-2i, & 1\leqslant i\leqslant 2m \text{ 且 } j=1,3 \text{ 且 } (i,j)\neq(1,3);\\ 10m+3-j/2-2i, & 1\leqslant i\leqslant 2m \text{ 且 } j=2,4 \text{ 且 } (i,j)\neq(1,2);\\ 2mj, & i=1 \text{ 且 } j=2,3.\end{cases}$$

容易验证上面的标号 f_5 是 $P_{10,2m}$ 的优美标号. 事实上，令

$$S_j=\{f_5(v_j^i)\mid 1\leqslant i\leqslant 2m\},\ 0\leqslant j\leqslant 10;$$

则

$$S_0=\{0\};$$

$$S_{10}=\{10m\};$$

$$S_1=\{20m,20m-1,\cdots,18m+1\};$$

$$S_3=\{18m,18m-1,\cdots,16m+1\};$$

$$S_5=\{16m,16m-1,\cdots,14m+1\};$$

$$S_7=\{14m,14m-1,\cdots,12m+1\};$$

$$S_9=\{12m,12m-1,\cdots,10m+1\};$$

$$S_1\cup S_3\cup S_5\cup S_7\cup S_9\cup S_{10}=\{10m,10m+1,\cdots,20m-1,20m\};$$

$$S_2=\{4m-1,4m-3,\cdots,3,1\};$$

$$S_4=\{4m,10m-2,10m-4,\cdots,6m+4,6m+2\};$$

$$S_6=\{6m,4m-2,4m-4,\cdots,4,2\};$$

$$S_8=\{10m-1,10m-3,\cdots,6m+3,6m+1\};$$

$$S_2\cup S_4\cup S_6\cup S_8=\{1,2,3,\cdots,4m-1,4m,6m,6m+1,\cdots,10m-3,10m-1\}$$

于是 $S_0\cup S_1\cup\cdots\cup S_9\cup S_{10}=\{0,1,2,3,\cdots,4m-1,4m,6m,6m+1,\cdots,20m-1,20m\}$，即 $P_{10,2m}$ 的 $18m+2$ 个顶点的标号互不相同，且

$$\mathrm{Max}\{f_5(v_i)\,|\,v_i\in V(G)\}=20m=|E|.$$

令

$$D_j=\{g(v_j^i,v_{j+1}^i)\,|\,1\leqslant i\leqslant 2m\},\qquad 0\leqslant j\leqslant 9.$$

$$g(v_j^i,v_{j+1}^i)=|f_5(v_{j+1}^i)-f_5(v_j^i)|,\qquad v_j^i,v_{j+1}^i\in V(G).$$

那么

$D_0=\{20m,20m-1,\cdots,18m+1\}$，　$D_1=\{16m+1,16m+2,\cdots,18m-1,18m\}$，

$D_2=\{14m+1,14m+2,\cdots,16m-1,16m\}$，$D_3=\{14m,8m+1,8m+2,\cdots,10m-1\}$，

$D_4=\{12m,6m+1,6m+2,\cdots,8m-1\}$，　$D_5=\{10m,12m+1,12m+2,\cdots,14m-1\}$，

$D_6=\{8m,10m+1,10m+2,\cdots,12m-1\}$，　$D_7=\{4m+1,4m+2,\cdots,6m-1,6m\}$，

$D_8=\{2m+1,2m+2,\cdots,4m-1,4m\}$，　$D_9=\{2m,2m-1,\cdots,2,1\}$.

即 $P_{10,2m}$ 的 $20m$ 条边的标号也互不相同. 由优美图的定义，知 $P_{10,2m}$ 是优美的.

当 $r=6,m=1$ 时，图 3 给出了 $P_{12,2}$ 的一个顶点标号. 根据优美图的定义，显然这是 $P_{12,2}$ 的一个优美标号.

当 $r=6,m>1$ 时，定义 $P_{12,2m}$ 的一个顶点标号 f_6 如下：

$f_6(u)=0$；$f_6(v)=2rm$；

$f_6(v_{2j-1}^i)=4rm-2(j-1)m-(i-1)$，$1\leqslant i\leqslant 2m$ 且 $1\leqslant j\leqslant r$；

$$f_6(v_{2j}^i)=\begin{cases}2m(j+1)+1-2i, & 1\leqslant i\leqslant 2m \text{ 且 } j=1,3,5;\\ 6m-2i & 1\leqslant i<2m \text{ 且 } j=2;\\ 10m+2, & i=2m \text{ 且 } j=2;\\ 10m-2i, & i=1(\mathrm{mod}\ 2)\text{且 } j=4;\\ 10m+4-2i, & i=0(\mathrm{mod}\ 2)\text{且 } i\neq 2 \text{ 且 } j=4;\\ 2m-2, & i=2 \text{ 且 } j=4.\end{cases}$$

当 $r=7$ 时，定义 $P_{14,2m}$ 的一个顶点标号 f_7 如下：

$f_7(u)=0$；　$f_7(v)=2rm$；

$f_7(v_{2j-1}^i)=4rm-2(j-1)m-(i-1)$，$1\leqslant i\leqslant 2m$ 且 $1\leqslant j\leqslant r$；

$$f_7(v_{2j}^i)=\begin{cases}4m-2i+1+(j-1)/2, & 1\leqslant i\leqslant 2m \text{ 且 } j=1,3 \text{ 且}(i,j)\neq(1,3);\\ 2jm+6m-2i+2, & 1<i\leqslant 2m \text{ 且 } j=2,4;\\ 6mj-22m+1-2i, & 1<i\leqslant 2m \text{ 且 } j=5,6 \text{ 且}(i,j)\neq(1,5);\\ 2mj, & i=1 \text{ 且 } j=2,3;\\ 10m-5+j, & i=1 \text{ 且 } j=4,5.\end{cases}$$

类似于 $r=5$，不难验证图 3 所示与 f_6,f_7 分别是 $P_{12,2m}$，$P_{14,2m}$ 的一个优美标号. 即 $r=5,6,7$ 时，$P_{2r,2m}$ 是优美的. □

$P_{10,4}$，$P_{12,4}$，$P_{14,4}$ 的优美标号如图 2，图 4，图 5 所示.

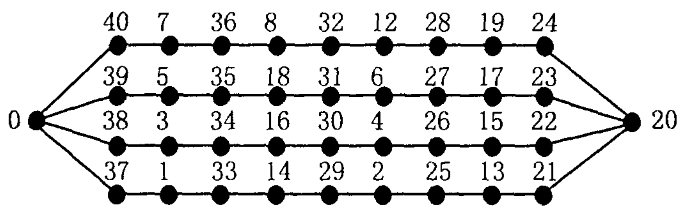

图 2　$P_{10,4}$的优美标号

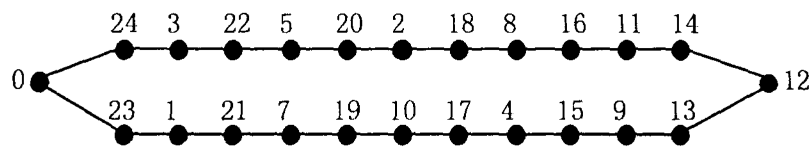

图 3　$P_{12,2}$的优美标号

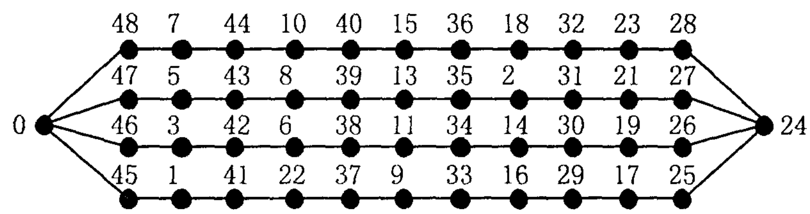

图 4　$P_{12,4}$的优美标号

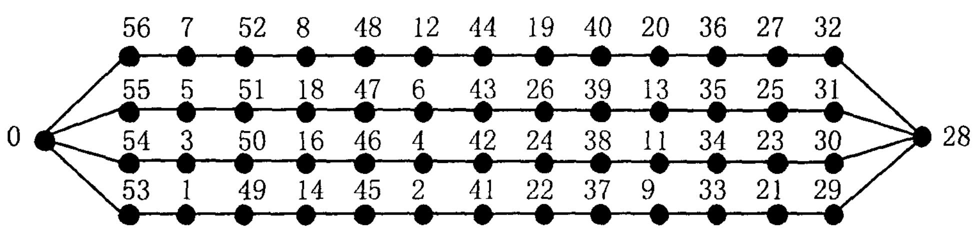

图 5　$P_{14,4}$的优美标号

参考文献：

[1] RINGEL G. *Problem 25 in theory of graphs and its application* [J]. Proc. Symposium Smolenice, 1963, 162.

[2] ROSA A. *On certain Valuations of the Vertices of a Graph* [M]. Theory of Graphs, Proc. Internat, Sympos, Rome., 1966, 349—355.

[3] GOLOMB S W. *How to Number a Graph* [M]. Graph Theory and Computing, Academic Press, New York, 1972, 23—37.

[4] GALLIAN J A. *A dynamic survery of graph labeling* [J]. The electronic journal of combinatorics, 2000, **6**.

[5] 马克杰. 优美图 [M]. 北京大学出版社, 1991, 10.
MA Ke-jie. *Graceful Graphs* [M]. Peking University Press, 1991, 10.

[6] KATHIESAN K M. *Two classes of graceful graphs* [J]. Ars Combinatoria, 2000, **55**: 129—132.

A Class of Graceful Graphs

YANG Yuan-sheng[1], RONG Qing[2], XU Xi-rong[1]

(1. Dept. of Comp Sci., Dalian University of Technology, Liaoning 116023, China;

2. Dept. of Phys., Guangxi Teachers' College, Nanning 530001, China)

Abstract: Let u and v be two fixed vertices. Connecting u and v by b internally disjoint paths of length a, the resulting graphs is denoted by $P_{a,b}$. KM. Kathiresan showed that $P_{2r,2m-1}$ is graceful and conjectured that $P_{a,b}$ is graceful except when $(a,b)=(2r+1,\ 4s+2)$. Y. S. Yang showed that $P_{2r+1,2m-1}$ and $P_{2r,2m}(r=1,2,3,4)$ are graceful. In this paper, $P_{2r,2m}$ is proved to be graceful for $r=5,6,7$.

Key words: graceful graph; vertex labeling; edge labeling.