树的第二个最大特征值*

谭尚旺， 郭纪明
(石油大学应用数学系，山东 东营 257061)

摘 要：本文得到了边独立数为 n 且阶为 $2n+2$ 的树的第二个最大特征值的精确上界，且给出了达到上界的所有的极树.

关键词：树；上界；特征值；对集.
分类号：AMS(2000) 05C50,05C05/CLC number: O157.15
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0541-08

1 引 言

本文采用[1]的术语. 设 G 是 m 阶的简单图，G 的特征多项式定义为 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征多项式，记为 $\phi(G,x)$ 或 $\phi(G)$. 由于 $A(G)$ 是实对称的，所以它的特征值全是实数，不失一般性假定它们按不降的次序排列成 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m(G)$，称 $\lambda_k(G)$ 是图 G 的第 k 个最大特征值. 如果 G 和 H 同构，则记为 $G\cong H$，否则记为 $G\ncong H$.

设 T 是 $2n$ 阶的完美树. 目前，特征值 $\lambda_1(T)$、$\lambda_2(T)$ 和 $\lambda_n(T)$ 已经得到很好地研究(见[2-6]). 但对给定边独立数的树，相应问题还没有得到解决. 这篇论文讨论了如下问题：如果 T 是边独立数为 n 的 $2n+2$ 阶树，则 $\lambda_2(T)$ 的精确上界和达到上界的所有极树被得到.

引理 1.1[7] 设 $e=uv$ 是图 G 的一条边，$C(e)$ 是包含边 e 的圈的集合，则

$$\phi(G,x)=\phi(G-e)-\phi(G-u-v)-2\sum_{Z\in C(e)}\phi(G-V(Z)).$$

设 $T_{m,n}^{(i)}(1\leqslant i\leqslant 3)$ 是图1中所示的边独立数为 n 的 m 阶树.

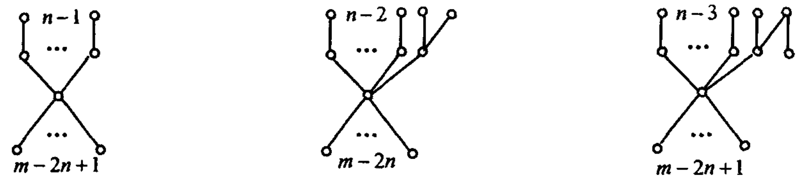
引理 1.2[8] 设 T 是边独立数为 n 的 m 阶树，则

$$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left(m-n+1+\sqrt{(m-n+1)^2-4(m-2n+1)}\right)},$$

等式成立，当且仅当 $T\cong T_{m,n}^{(1)}$，并且

$$\phi(T_{m,n}^{(1)})=x^{m-2n}(x^2-1)^{n-2}[x^4-(m-n+1)x^2+m-2n+1].$$

* 收稿日期：2001-11-12
作者简介：谭尚旺(1965-)，男，副教授.



$T_{m,n}^{(1)}$　　　$T_{m,n}^{(2)}$　　　$T_{m,n}^{(3)}$

图 1

引理 1.3[9]　设 T 是边独立数为 n 的 m 阶树，其中 $m\geqslant 2n+1$ 且 $n\geqslant 4$.

(i) 如果 $T\ncong T_{m,n}^{(1)}$，则 $\lambda_1(T)\leqslant\lambda_1(T_{m,n}^{(2)})$，等式成立，当且仅当 $T\cong T_{m,n}^{(2)}$，其中 $\lambda_1(T_{m,n}^{(2)})$是下面方程的最大根.

$$(x^2-2)[x^4-(m-n)x^2+(m-2n-1)]-2=0.$$

(ii) 如果 $T\notin\{T_{m,n}^{(1)},T_{m,n}^{(2)}\}$ 且 $m>2n+1$，则 $\lambda_1(T)\leqslant\lambda_1(T_{m,n}^{(3)})$，等式成立，当且仅当 $T\cong T_{m,n}^{(3)}$，其中 $\lambda_1(T_{m,n}^{(3)})$是下面方程的最大根.

$$(x^4-3x^2+1)[x^4-(m-n-1)x^2+(m-2n+1)]-x^2(x^2-1)^2=0.$$

引理 1.4[10]　设 T 是 m 阶的树. 则对任意的正整数 k，存在顶点 $v\in V(T)$，使 $T-v$ 存在一个阶不超过 $\max(m-1-k,k)$的分支，而 $T-v$ 的其它分支的阶都不超过 k.

引理 1.5[7](Cauchy interlacing theorem)　设 G 是一个 n 阶图，V'是 G 的 k 个顶点的子集. 令 $G-V'$表示从 G 中删去 V'中的顶点及与 V'中的顶点关联的所有边后得到的 G 的子图. 则 $\lambda_i(G)\geqslant\lambda_i(G-V')\geqslant\lambda_{i+k}(G)$，其中 $i=1,2,\cdots,n-k$.

2　结论及证明

下面恒记

$$a=a(n)=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2-\sqrt{(n+2)^2-8})},\quad b=b(n)=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{(n+2)^2-12})},$$

$$c=c(n)=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{(n+2)^2-9})},\quad d=d(n)=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{(n+2)^2-8})},$$

$$e=e(n)=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2-\sqrt{(n+2)^2-12})}.$$

引理 2.1　$\sqrt{n+1}<\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(2)})<\sqrt{n+1+\dfrac{1}{2n}}$.

$\lambda_1(T_{2n-1,n-2}^{(2)})\leqslant\lambda_1(T_{2n,n-1}^{(2)})<\sqrt{n+1}$.

$b(n)<\lambda_1(T_{2n+1,n-1}^{(3)})<c(n)\,(n\geqslant 5)$.

证明　树的特征值关于原点对称. 根据引理 1.3，$\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(2)})$是方程(1)的最大根.

$$(x^2-2)[x^4-(n+1)x^2]-2=0. \tag{1}$$

方程(1)的三个正根分别位于区间(0,1),(1, $\sqrt{n+1}$)和($\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}}$)内,从而

$$\sqrt{n+1}<\lambda_1(T^{(2)}_{2n+1,n})<\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}}.$$

同理 $\lambda_1(T^{(2)}_{2n,n-1})<\sqrt{n+1}$. 由于 $T^{(2)}_{2n-1,n-2}$ 是 $T^{(2)}_{2n,n-1}$ 的顶点导出子图,所以 $\lambda_1(T^{(2)}_{2n-1,n-2})\leqslant\lambda_1(T^{(2)}_{2n,n-1})$.

由引理 1.3 知,$\lambda_1(T^{(3)}_{2n+1,n-1})$是下面方程(2)的最大根.

$$(x^4-3x^2+1)[x^4-(n+1)x^2+4]-x^2(x^2-1)^2=0. \tag{2}$$

记方程 $x^4-3x^2+1=0$ 的最小正根为 δ,于是(2)的四个正根分别位于区间$(0,\delta)$,$(\delta,1)$,$(1,b)$和(b,c)内. 所以 $n\geqslant5$ 时,方程(2)的最大根大于 $b(n)$且小于 $c(n)$. □

图 2

引理 2.2 设 $W^{(1)}_{4n}$和 $W^{(2)}_{4n}$是图 2 所示的边独立数为 $2n-1$ 的 $4n$ 阶树($n\geqslant4$),则

$$\lambda_2(W^{(1)}_{4n})>\lambda_2(W^{(2)}_{4n})>\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}}.$$

其中 $\lambda_2(W^{(1)}_{4n})$是下面方程(3)的第二个最大根.

$$[x^4-(n+2)x^2+3]^2-[2x^4-(2n+3)x^2+5]=0 \tag{3}$$

证明 由引理 1.1 和 $\phi(T^{(1)}_{m,n})$的表达式,有

$$\phi(W^{(1)}_{4n})=\phi(W^{(1)}_{4n}-uv)-\phi(W^{(1)}_{4n}-v-u)$$
$$=(\phi(T^{(1)}_{2n,n-1}))^2-(\phi(T^{(1)}_{2n-1,n-1}))^2=x^2(x^2-1)^{2n-5}g(x).$$
$$\phi(W^{(2)}_{4n})=\phi(W^{(2)}_{4n}-uv)-\phi(W^{(2)}_{4n}-v-u)$$
$$=\phi(T^{(1)}_{2n-1,n-2}\cup T^{(1)}_{2n+1,n})-\phi(T^{(1)}_{2n-2,n-2}\cup T^{(1)}_{2n,n})=x^2(x^2-1)^{2n-5}h(x).$$

其中

$$g(x)=[x^4-(n+2)x^2+3]^2-[2x^4-(2n+3)x^2+5].$$
$$h(x)=[x^4-(n+2)x^2+4][x^4-(n+2)x^2+2]-[2x^4-(2n+3)x^2+5].$$

一方面,容易得

$$g(0)=4>0,\quad g(a)=-a^2<0,$$

$$g(\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}})>n(n-4)+1>0,$$

$$g(c)=-c^2+\frac{1}{16}<0,g(+\infty)>0.$$

所以 $g(x)$ 的两个最大根分别在区间 $(\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}},c)$ 和 $(c,+\infty)$ 内. 同理可得, $h(x)$ 的两个最大根也分别在区间 $(\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}},c)$ 和 $(c,+\infty)$ 内. 另一方面, 容易得到 $\phi(W_{4n}^{(1)})-\phi(W_{4n}^{(2)})=x^2(x^2-1)^{2n-5}$, 所以当 $x>\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}}>1$ 时, 有 $\phi(W_{4n}^{(1)})>\phi(W_{4n}^{(2)})$. 因此, $\lambda_2(W_{4n}^{(1)})>\lambda_2(W_{4n}^{(2)})>\sqrt{n+1+\frac{1}{2n}}$, 且由表达式 $\phi(W_{4n}^{(1)})$ 知, $\lambda_2(W_{4n}^{(1)})$ 是方程(3)的第二个最大根. □

引理 2.3 设 M 是 m 阶树 T 的一个最大对集, T 没有被 M 饱和的顶点数记为 q. 如果 $m\leqslant 2n$, $T\notin\{T_{2n,n-1}^{(1)},T_{2n-1,n-2}^{(1)}\}$ 且 $q\leqslant 3$, 则 $\lambda_1(T)<\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(2)})$.

证明 先设 T 的阶 $m=2s$, 则 $s\leqslant n$ 且 $q=0,2$, 从而 T 的边独立数为 $\frac{1}{2}(2s-q)$.

当 $q=0$, 或 $q=2$ 且 $s\leqslant n-1$ 时, 由引理 1.2 得

$$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}q+1+\sqrt{(s+\frac{1}{2}q+1)^2-4(q+1)})}<\sqrt{n+1}<\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(2)}).$$

当 $q=2$ 且 $s=n$ 时, 因为 $T\ncong T_{2n,n-1}^{(1)}$, 所以由引理 1.3(i)和引理 2.1 得

$$\lambda_1(T)\leqslant\lambda_1(T_{2n,n-1}^{(2)})<\sqrt{n+1}<\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(1)}).$$

再设 $m=2s-1$, 则 $s\leqslant n$ 且 $q=1,3$, 从而 T 的边独立数为 $\frac{1}{2}(2s-1-q)$. 当 $q=1$, 或 $q=3$ 且 $s\leqslant n-1$ 时, 类似上边 $m=2s$ 情形的第一种类型证明, 结论成立. 现令 $q=3$ 且 $s=n$, 因为 $T\ncong T_{2n-1,n-2}^{(1)}$, 所以由引理 1.3(i)和引理 2.1, 得

$$\lambda_1(T)\leqslant\lambda_1(T_{2n-1,n-2}^{(2)})<\sqrt{n+1}<\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(1)}).$$ □

定理 2.4 设 T 是边独立数为 $2n-1$ 的 $4n(n\geqslant 4)$ 阶树, 则 $\lambda_2(T)\leqslant\lambda_2(W_{4n}^{(1)})$, 等式成立, 当且仅当 $T\cong W_{4n}^{(1)}$.

证明 令 $S=\{W_{4n}^{(1)},W_{4n}^{(2)}\}$. 设 $T\notin S$ 是边独立数为 $2n-1$ 的 $4n(n\geqslant 4)$ 阶树, 由引理 2.1 和引理 2.2, 只要证明下面的不等式(4)成立即可.

$$\lambda_2(T)\leqslant\lambda_1(T_{2n+1,n}^{(2)}).\tag{4}$$

在引理 1.4 中取 $k=2n-1$, 则存在顶点 $v\in V(T)$, 使得 $T-v$ 的每个分支的阶都不超过 $2n$, 记 $T-v$ 的所有分支为 $T_1,T_2,\cdots,T_l$. 根据引理 1.5, 有

$$\lambda_2(T)\leqslant\lambda_1(T-v)=\max\{\lambda_1(T_1),\lambda_1(T_2),\cdots,\lambda_1(T_l)\}.\tag{5}$$

设 M 是 $T-v$ 的一个最大对集, 则 $T-v$ 中至少有一个且至多有三个顶点不被 M 饱和. 记 T_i 的阶为 $m(T_i)$, T_i 不被 M 饱和的顶点数为 $q(T_i,M)$, 则 $m(T_i)\leqslant 2n$ 且 $q(T_i,M)\leqslant 3$. 如果对所有的 $1\leqslant i\leqslant l$, 都有 $T_i\notin Q=\{T_{2n,n-1}^{(1)},T_{2n-1,n-2}^{(1)}\}$, 则由引理 2.3 和式(5)知, 不等式(4)成立. 因此, 下面不妨令 $T_1\in Q$.

情形 1 $T_1\cong T_{2n-1,n-2}^{(1)}$.

令 u 是 $V(T_1)$ 中邻接 v 的唯一顶点, 记 $T-u$ 的一个最大对集为 M_0. 于是存在 $T-u$ 的一

个分支包含顶点 v,记其为 G_1,则 $m(G_1)=2n+1$ 且 $q(G_1,M_0)=1$;其它的分支(记为 $G_j(2\leqslant j\leqslant r)$)都满足 $m(G_j)\leqslant 2n-2$ 且 $q(G_j,M_0)\leqslant 2$. 显然,对每个 $2\leqslant j\leqslant r$,都有 $G_j\notin Q$,由引理 2.3 得 $\lambda_1(G_j)<\lambda_1(T^{(2)}_{2n+1,n})$. 如果 $G_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n}$,则由 $q(T)=2$ 和 $T_1\cong T^{(1)}_{2n-1,n-2}$ 知,$T\cong W^{(2)}_{4n}\in S$,这与所设矛盾. 因此,$G_1\ncong T^{(1)}_{2n+1,n}$,于是根据引理 1.3 得,$\lambda_1(G_1)\leqslant\lambda_1(T^{(2)}_{2n+1,n})$. 因此,由式(5)(此时 v 换成 u)知,不等式(4)成立.

情形 2 $T_1\cong T^{(1)}_{2n,n-1}$.

令 u 是 $V(T_1)$ 中邻接 v 的唯一顶点,记 $T-u$ 的一个最大对集为 M_0. 于是存在 $T-u$ 的一个分支包含顶点 v,记其为 G_1,则 $m(G_1)=2n$ 且 $q(G_1,M_0)=0,2$;而其它的每个分支(记为 $G_j(2\leqslant j\leqslant r)$)都满足 $m(G_j)\leqslant 2n-1$ 且 $q(G_j,M_0)\leqslant 3-q(G_1,M_0)$.

如果 $q(G_1,M_0)=2$,则对所有的 $2\leqslant j\leqslant r$,都有 $q(G_j,M_0)\leqslant 1$,从而 $G_j\notin Q$. 如果 $G_1\cong T^{(1)}_{2n,n-1}$,则由 $q(T)=2$ 和 $T_1\cong T^{(1)}_{2n,n-1}$ 知,$T\cong W^{(1)}_{4n}\in S$,这与所设矛盾. 因此,$G_1\ncong T^{(1)}_{2n,n-1}$,从而 $G_1\notin Q$. 于是由引理 2.3 和式(5)(此时 v 换成 u),不等式(4)成立.

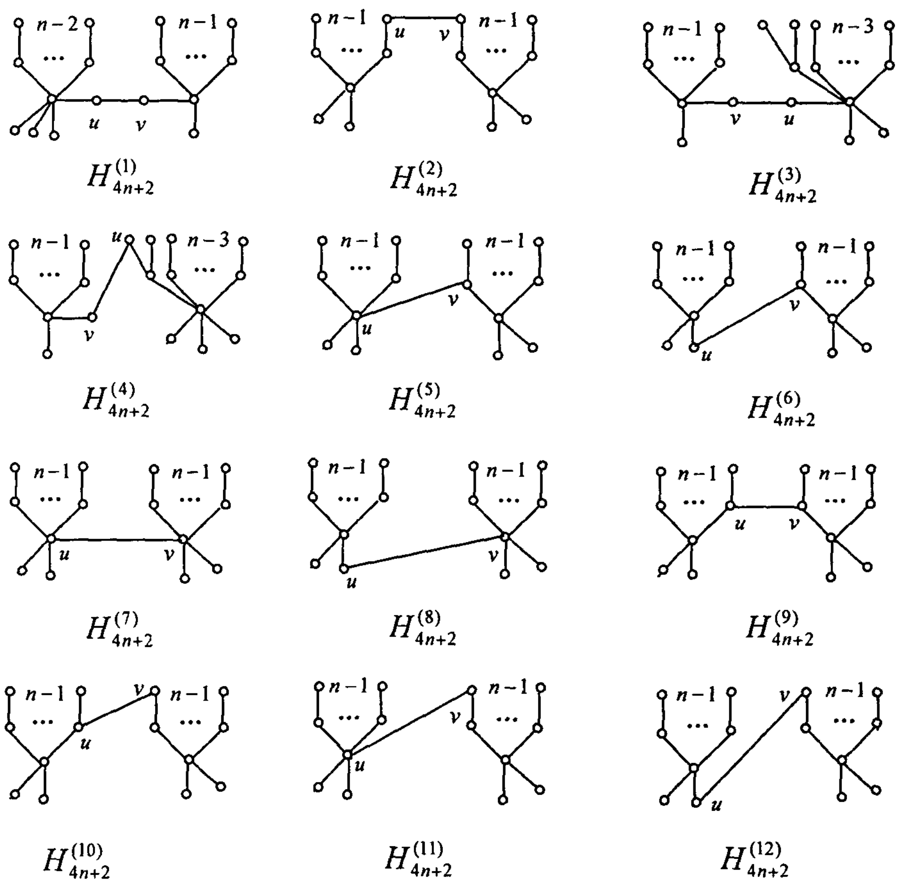


图 3

下面设 $q(G_1,M_0)=0$. 记 $m(G_j)=t_j$ 且 $q(G_j,M_0)=s_j$. 注意到当 $q(G_j,M_0)\leqslant 2$ 时,由引理 1.2 和引理 2.1 知

$$\lambda_1(G_j)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{t_j+s_j+2}{2}+\sqrt{\left(\frac{t_j+s_j+2}{2}\right)^2-4(s_j+1)}\right]}<\sqrt{n+1}<\lambda_1(T^{(2)}_{2n+1,n}).$$

因此,如果对所有的 $2\leqslant j\leqslant r$,都有 $q(G_j,M_0)\leqslant 2$,则由式(5)知,不等式(4)成立. 如果存在一个分支,设为 G_2,满足 $q(G_2,M_0)=3$,则对 $j\neq 2$,都有 $q(G_j,M_0)=0$,从而 $G_j\notin Q$. 当 $G_2\not\cong T^{(1)}_{2n-1,n-2}$,即 $G_2\notin Q$ 时,由引理 2.3 和式(5)知,不等式(4)成立. 当 $G_2\cong T^{(1)}_{2n-1,n-2}$时,由情形 1 知,不等式(4)成立. 综上讨论,完成了不等式(4)的证明. □

引理 2.5 设 $H^{(i)}_{4n+2}(1\leqslant i\leqslant 12, n\geqslant 5)$ 是图 3 所示的边独立数为 $2n$ 的 $4n+2$ 阶树,则 $\lambda_2(H^{(1)}_{4n+2})>c(n)$;当 $5\leqslant n\leqslant 9$ 时,$\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})<c(n)$,当 $n\geqslant 10$ 时,$\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})>c(n)$;$\lambda_2(H^{(i)}_{4n+2})<c(n)(3\leqslant i\leqslant 12)$. 其中 $\lambda_2(H^{(1)}_{4n+2})$ 和 $\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})$ 分别是方程(6)和(7)的第二个最大根.

$$[x^4-(n+2)x^2+2][x^4-(n+3)x^2+4]-[2x^4-2(n+2)x^2+5]=0. \tag{6}$$

$$(x^2-1)^2[x^4-(n+2)x^2+2]^2-x^2[x^4-(n+2)x^2+3]^2=0. \tag{7}$$

证明 由引理 1.1 和表达式 $\phi(T^{(1)}_{m,n})$,得

$$\phi(H^{(1)}_{4n+2})=\phi(H^{(1)}_{4n+2}-uv)-\phi(H^{(1)}_{4n+2}-v-u)=x^2(x^2-1)^{2n-4}h(H^{(1)}_{4n+2},x).$$

$$\phi(H^{(2)}_{4n+2})=\phi(H^{(2)}_{4n+2}-uv)-\phi(H^{(1)}_{4n+2}-v-u)=x^2(x^2-1)^{2n-6}h(H^{(2)}_{4n+2},x).$$

其中

$$h(H^{(1)}_{4n+2},x)=[x^4-(n+2)x^2+2][x^4-(n+3)x^2+4]-[2x^4-2(n+2)x^2+5].$$

$$h(H^{(2)}_{4n+2},x)=(x^2-1)^2[x^4-(n+2)x^2+2]^2-x^2[x^4-(n+2)x^2+3]^2.$$

$h(H^{(1)}_{4n+2},x)$的正根分别在区间$(0,a)$,(a,c),(c,d)和$(d,+\infty)$内,所以 $\lambda_2(H^{(1)}_{4n+2})>c(n)$. 当 $5\leqslant n\leqslant 9$ 时,$h(H^{(2)}_{4n+2},x)$的正根分别在区间$(0,a)$,(a,e),$(e,1)$,$(1,\sqrt{n+1})$,$(\sqrt{n+1},c)$和$(c,+\infty)$内;当 $n\geqslant 10$ 时,$h(H^{(2)}_{4n+2},x)$的正根分别在区间$(0,a)$,(a,e),$(e,1)$,$(1,c)$,(c,d)和$(d,+\infty)$内. 所以当 $5\leqslant n\leqslant 9$ 时,$\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})<c(n)$;当 $n\geqslant 10$ 时,$\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})>c(n)$.

应用引理 1.1 和表达式 $\phi(T^{(1)}_{m,n})$,也可得到 $\phi(H^{(i)}_{4n+2})(3\leqslant i\leqslant 12)$. 类似 $\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})$的讨论,容易得到 $\lambda_2(H^{(i)}_{4n+2})<c(n)(3\leqslant i\leqslant 12)$. □

类似于引理 2.3,可证明下面的引理.

引理 2.6 设 M 是 m 阶树 T 的一个最大对集,T 没有被 M 饱和的顶点数记为 q. 如果 $m\leqslant 2n+1$,$T\notin\{T^{(1)}_{2n+1,n},T^{(1)}_{2n+1,n-1},T^{(2)}_{2n+1,n-1}\}$且 $q\leqslant 3$,则 $\lambda_1(T)<c(n)$.

定理 2.7 设 T 是边独立数为 $2n$ 的 $4n+2(n\geqslant 5)$阶树.

如果 $5\leqslant n\leqslant 9$,则 $\lambda_2(T)\leqslant\lambda_2(H^{(1)}_{4n+2})$,等式成立,当且仅当 $T\cong H^{(1)}_{4n+2}$.

如果 $n\geqslant 10$,则 $\lambda_2(T)\leqslant\max\{\lambda_2(H^{(1)}_{4n+2}),\lambda_2(H^{(2)}_{4n+2})\}$,且使等式成立的树 T 只能是 $H^{(1)}_{4n+2}$或 $H^{(2)}_{4n+2}$. **证明** 记 $S_1=\{H^{(i)}_{4n+2}:i=1,3,4\}$,$S_2=\{H^{(i)}_{4n+2}:i=2,5,6,\cdots,12\}$,$S=S_1\cup S_2$. 设 $T\notin S$ 是边独立数为 $2n$ 的 $4n+2(n\geqslant 5)$阶树,下面先证明不等式.

$$\lambda_2(T)<c(n) \tag{8}$$

在引理 1.4 中取 $k=2n$,则存在顶点 $v\in V(T)$,使 $T-v$ 的每个分支的阶都不超过 $2n+1$. 记 $T-v$ 的所有分支为 $T_1,T_2,\cdots,T_l$. 根据引理 1.5,有

$$\lambda_2(T)\leqslant\lambda_1(T-v)=\max\{\lambda_1(T_1),\lambda_1(T_2),\cdots,\lambda_1(T_l)\}. \tag{9}$$

设 M 是 $T-v$ 的一个最大对集,则 $T-v$ 至少有一个且至多有三个顶点不被 M 饱和. 记 T_i 的

阶为 $m(T_i)$，T_i 中没被 M 饱和的顶点数为 $q(T_i,M)$，则 $m(T_i)\leqslant 2n+1$ 且 $q(T_i,M)\leqslant 3$. 如果对所有的 $1\leqslant i\leqslant l$，都有 $T_i\notin Q=\{T^{(1)}_{2n+1,n},T^{(1)}_{2n+1,n-1},T^{(2)}_{2n+1,n-1}\}$，则由引理 2.6 和式(9)知，不等式(8)成立. 因此，下面不妨令 $T_1\in Q$.

情形 1　$T_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n}$.

令 u 是 $V(T_1)$ 中邻接 v 的唯一顶点，记 $T-u$ 的一个最大对集为 M_0. 则存在 $T-u$ 的一个分支包含顶点 v，记其为 G_1，则 $m(G_1)=2n+1$ 且 $q(G_1,M_0)=1,3$；而其它的分支(记为 $G_j(2\leqslant j\leqslant r)$)都满足 $m(G_j)\leqslant 2n$ 且 $q(G_j,M_0)\leqslant 2$. 显然，对每个 $2\leqslant j\leqslant r$，都有 $G_j\notin Q$，于是由引理 2.6 得 $\lambda_1(G_j)<c(n)$. 根据 $T_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n}$ 和 $q(T)=2$ 知，如果 $G_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n}$，则 $T\in S_2$；如果 $G_1\in\{T^{(1)}_{2n+1,n-1},T^{(2)}_{2n+1,n-1}\}$，则 $T\in S_1$. 以上都与 $T\notin S$ 矛盾，因此，$G_1\notin Q$. 于是由引理 2.6 得 $\lambda_1(G_1)<c(n)$. 因此，由式(9)(此时 v 换成 u)知，不等式(8)成立.

情形 2　$T_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n-1}$.

令 u 是 $V(T_1)$ 中邻接顶点 v 的唯一顶点，记 $T-u$ 的一个最大对集为 M_0. 由 $q(T)=2$ 和 $T_1\cong T^{(1)}_{2n+1,n-1}$ 知，$T-u$ 只有两个分支，其中一个分支包含顶点 v，记其为 G_1，它满足 $m(G_1)=2n+1$ 且 $q(G_1,M_0)=1$；另一个分支同构于 $T^{(1)}_{2n,n-1}$，记其为 G_2. 因为 $T\notin S$，特别是 $T\ncong H^{(1)}_{4n+2}$，于是 $G_1\ncong T^{(1)}_{2n+1,n}$，从而 $G_1\notin Q$. 由引理 2.6 得 $\lambda_1(G_1)<c(n)$，由引理 1.2 得

$$\lambda_1(G_2)=\lambda_1(T^{(1)}_{2n,n-1})=\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{(n+2)^2-12})}<c(n).$$

因此，由式(9)(此时 v 换成 u)知，不等式(8)成立.

情形 3　$T_1\cong T^{(2)}_{2n+1,n-1}$.

类似于情形 2 的讨论，$T-u$ 只有两个分支，其中一个分支包含顶点 v，记其为 G_1，则 $m(G_1)=2n+1$ 且 $q(G_1,M_0)=1$；另一个分支同构于 $T^{(1)}_{2n,n-1}$ 或 $T^{(2)}_{2n,n-1}$，记其为 G_2. 注意到 $T\notin S$，特别是 $T\notin\{H^{(3)}_{4n+2},H^{(4)}_{4n+2}\}$，于是 $G_1\ncong T^{(1)}_{2n+1,n}$，从而 $G_1\notin Q$. 因此，类似情形 2 的证明知，不等式(8) 成立.

综上讨论，完成了不等式(9)的证明. 根据引理 2.5，定理证完. □

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. London: Macmillan Press, 1976.

[2] 邵嘉裕，洪　渊. 完美匹配树最小正特征值的界 [J]. 科学通报，1991，**18**: 1361－1364.
SHAO J Y, HONG Y. *Bound of minimum positive eigenvalues of a tree with a perfect matching* [J]. Chinese Science Bulletin, 1991, **18**: 1361－1364. (in Chinese)

[3] GODSIL C D. *Inverse of trees* [J]. Combinatorica, 1985, **5**(1): 33－39.

[4] XU G H. *On the Spectral Radius of Trees with Perfect Matchings* [M]. in Combinatorices and graph theory, Singapore, World Scientific, 1997.

[5] CHANG An. *Bounds on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings* [J]. Linear Algebra Appl., 1998, **283**: 247－255.

[6] GUO J M, TAN S W. *A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings* [J]. Linear Algebra Appl., 2002, **347**: 9－15.

[7] CVETKOVIC D M, DOOB M, SACHS H. *Spectra of Graphs* [M]. New York, Academic Press, 1980.

[8] GUO J M, TAN S W. *On the spectrual radius of trees* [J]. Linear Algebra Appl., 2001, **329**: 1−8.

[9] 谭尚旺,郭纪明. 树的最大特征值 [J]. 石油大学学报, 2002, **6**: 113−117.
TAN S W, GUO J M. *The largest eigenvalue on trees* [J]. J. Univ. Petroleum, 2002, **6**: 113−117. (in Chinese)

[10] SHAO J Y. *Bounds on the k th eigenvalues of trees and forests* [J]. Linear Algebra Appl., 1991, **149**: 19−34.

The Second Largest Eigenvalue of Trees

TAN Shang-wang, GUO Ji-ming

((Dept. of Appl. Math., University of Petroleum, Shangdong 257061, China)

Abstract: In this paper, the tight upper bounds of the second maximum eigenvalues on trees with the edge independence number n and order $2n+2$ are obtained. Meanwhile, all extreme trees which reach the upper bounds are given.

Key words: tree; upper bound; eigenvalue; matching.