第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0139-05 文献标识码: A

矩阵的 Γ 逆

刘晓冀 [1], 刘三阳 [2]

(1. 广西民族大学计算机与信息学院, 广西 南宁 530006;
2. 西安电子科技大学应用数学系, 陕西 西安 710071)

摘 要: 利用矩阵的广义奇异值分解, 给出了复数域上矩阵的 Γ 逆存在的充要条件及其表达式, 并讨论了 Γ 逆的唯一性.

关键词: 矩阵; Γ 逆; 广义奇异值分解.
MSC(2000): 15A09
中图分类: O153

1 引言及引理

文 [1] 提出了矩阵的 Γ 逆的概念, 对于约束线性方程组 $Ax = b, x \in S, A$ 关于 S 上正交射影子的 Γ 逆 A_P^+ 起着通常广义逆对于线性方程组所起的类似作用, 在文 [1] 的基础上, 文 [2] 研究了约束线性系统 $Ax + y = b, x \in L, y \in L^{\perp}$, 对于任意的 A, L, 用矩阵的 Γ 逆给出了其一般解, 当 $AP_L + P_{L^{\perp}}$ 可逆时, 这个解正好是 Bott-Duffin 解, 因而研究矩阵的 Γ 逆是非常有意义的. 但文 [1] 和文 [2] 尚未给出矩阵的 Γ 逆的表达式, 关于 Γ 逆的唯一性问题也未解决.

本文利用矩阵的广义奇异值分解, 给出了复数域上的矩阵存在 Γ 逆的充分必要条件及其表达式, 同时讨论了 Γ 逆的唯一性.

定义 1.1 设 $A \in C^{s\times n}, Q \in C^{m_1\times s}, P \in C^{n\times m_2}$ 分别为复数域上的矩阵, 若有矩阵 $X \in C^{m_2\times m_1}$ 使得

$$APXQA = A; \tag{1.1}$$

$$XQAPX = X; \tag{1.2}$$

$$(QAPX)^* = QAPX; \tag{1.3}$$

$$(XQAP)^* = XQAP, \tag{1.4}$$

则称 X 为 A 的关于 P, Q 的 Γ 逆, 记为 $A_{P,Q}^+$.

注 1. 当 P, Q 均为单位矩阵时, $A_{P,Q}^+$ 即为通常的 Moore-Penrose 逆.

注 2. 当 $P = Q^*$ 时, $A_{P,Q}^+$ 即为文 [1,2] 的 A_P^+.

为证明我们的结果, 需要如下引理.

引理 1.2 (广义奇异值分解定理)[8] 设 $A \in C^{s\times n}, Q \in C^{m_1\times s}, P \in C^{n\times m_2}$ 分别为复数域上的矩阵, 则存在可逆矩阵 Y, Z 和酉矩阵 U, V 使得:

$$Q = UD_QY, A = Y^{-1}D_AZ, P = Z^{-1}D_PV^*; \tag{2.1}$$

收稿日期: 2002-03-04
基金项目: 国家自然科学基金 (69972036)

其中 D_Q,D_A,D_P 如下

$$D_Q=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_1\\ m_1-r_1\end{array}\\ \begin{array}{cc} r_1 & s-r_1\end{array} & \end{array},\quad r_1=\mathrm{rank}(Q); \tag{2.2}$$

$$D_A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_2^1\\ r_1-r_2^1\\ r_2^2\\ s-r_1-r_2^2\end{array}\\ \begin{array}{ccc} r_2^1 & r_2^2 & n-r_2\end{array} & \end{array},\quad r_2=r_2^1+r_2^2=\mathrm{rank}(A); \tag{2.3}$$

$$D_P^*=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_3^1\\ r_3^2\\ r_3^3\\ m_2-r_3\end{array}\\ \begin{array}{cccccc} r_3^1 & r_2^1-r_3^1 & r_3^2 & r_2^2-r_3^2 & r_3^3 & n-r_2-r_3^3\end{array} & \end{array},\quad r_3=r_3^1+r_3^2+r_3^3=\mathrm{rank}(P), \tag{2.4}$$

其中 $S_i\,(i=1,2,3)$ 为对角正定阵.

2 主要结果

首先容易验证如下的结果.

定理 2.1 设 $A\in C^{s\times n},Q\in C^{m_1\times s},P\in C^{n\times m_2}$ 分别为复数域上的矩阵，且有广义奇异值分解 (2.1-2.4), 则存在矩阵 $X\in C^{m_2\times m_1}$ 满足方程组 (1.1-1.4) 当且仅当 $C=V^*XU$ 满足如下方程组

$$D_AD_PCD_QD_A=D_A; \tag{3.1}$$

$$CD_QD_AD_PC=C; \tag{3.2}$$

$$[CD_QD_AD_P]^*=CD_QD_AD_P; \tag{3.3}$$

$$[D_QD_AD_PC]^*=D_QD_AD_PC. \tag{3.4}$$

定理 2.2 设 $A\in C^{s\times n},Q\in C^{m_1\times s},P\in C^{n\times m_2}$ 分别为复数域上的矩阵，且有广义奇异值分解 (2.1-2.4), 则存在矩阵 $X\in C^{m_2\times m_1}$ 满足方程组 (1.1-1.4) 当且仅当

$$r_2^1=r_3^1,r_3^2=0,r_2^2=0$$

且 $C=V^*XU$ 具有如下形式:

$$C=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_3^1\\ r_3^3\\ m_2-r_3\end{array}\\ \begin{array}{cc} r_3^1 & m_1-r_3^1\end{array} & \end{array}.$$

证明 设

$$C=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43}\end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_3^1\\ r_3^2\\ r_3^3\\ m_2-r_3\end{array}\\ \begin{array}{ccc} r_3^1 & r_1-r_3^1 & m_1-r_1\end{array} & \end{array}.$$

将 D_A, D_Q, D_P 重新分划为

$$D_Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ r_1 - r_3^1 \\ m_1 - r_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & r_1 - r_3^1 & r_3^2 & r_2^2 - r_3^2 & s - r_1 - r_2^2 \end{matrix} & \end{array}$$

$$D_A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ r_1 - r_3^1 \\ r_3^2 \\ r_2^2 - r_3^2 \\ s - r_1 - r_3^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & r_2^1 - r_3^1 & r_3^2 & r_2^2 - r_3^2 & r_3^3 & n - r_2 - r_3^3 \end{matrix} & \end{array},$$

其中 S' 是主对角线上的元素为 1 其余元素为 0 的矩阵;

$$D_P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ r_2^1 - r_3^1 \\ r_3^2 \\ r_2^2 - r_3^2 \\ r_3^3 \\ n - r_2 - r_3^3. \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & r_3^2 & r_3^3 & m_2 - r_3 \end{matrix} & \end{array}$$

由 $D_A D_P C D_Q D_A = D_A$, 得到

$$\begin{pmatrix} S_1C_{11} & S_1C_{12}S' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_3C_{31} & S_3C_{32}S' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此

$$S_1C_{11} = I, \quad S_1C_{12}S' = 0, \quad C_{31} = 0, \quad C_{32}S' = 0.$$

此时必有 $r_2^1 = r_3^1, r_3^2 = 0, r_2^2 = 0$. 从而可重新设

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ r_3^3 \\ m_2 - r_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & m_1 - r_3^1 \end{matrix} & \end{array},$$

同时有

$$D_P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ r_3^3 \\ n - r_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & r_3^3 & m_2 - r_3 \end{matrix} & \end{array}, \quad D_Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ m_1 - r_3^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & s - r_3^1 \end{matrix} & \end{array}, \quad D_A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_3^1 \\ s - r_3^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_3^1 & r_3^3 & n - r_2 - r_3^3 \end{matrix} & \end{array}.$$

由 (3.1–3.4) 得到

$$\begin{pmatrix} S_1C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = S_1^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} C_{11}S_1 & 0 & 0 \\ C_{21}S_1 & 0 & 0 \\ C_{31}S_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} C_{11}S_1 & 0 & 0 \\ C_{21}S_1 & 0 & 0 \\ C_{31}S_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = 0, C_{31} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} S_1C_{11} & S_1C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} S_1C_{11} & S_1C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12}=0,$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \\ 0 & C_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22}=0, C_{32}=0.$$

即有

$$C = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r_3^1 \\ r_3^3 \\ m_2-r_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \scriptstyle r_3^1 & \scriptstyle m_1-r_3^1 \end{array} & \end{array} .$$

反之，我们可直接验证 C 满足 (3.1–3.4), 由定理 2.1 即可得证.

推论 2.3 若 $A^+_{P,Q}$ 存在，则必唯一.

证明 由定理 2.2, 只须证明 $A^+_{P,Q}$ 与 A 的广义奇异值分解无关即可.

事实上，设

$$Q=UD_QY,\quad D_A=Y^{-1}D_AZ,\quad D_P=Z^{-1}D_PV^*$$

$$Q=U_1D_QY_1,\quad D_A=Y_1^{-1}D_AZ_1,\quad D_P=Z_1^{-1}D_PV_1^*$$

均为 A 的广义奇异值分解，则有

$$UD_QY=U_1D_QY_1, \tag{4.1}$$

$$Y^{-1}D_AZ=Y_1^{-1}D_AZ_1, \tag{4.2}$$

$$Z^{-1}D_PV^*=Z_1^{-1}D_PV_1^*. \tag{4.3}$$

令

$$U'=U_1^*U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix},\quad Y'=Y_1Y^{-1}=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},$$

$$Z'=Z_1Z^{-1}=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix},\quad V'=V_1^*V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}.$$

由 (4.1–4.3) 和定理 2.2, 并注意到 U',V' 为酉矩阵，则有

$$U'=\begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix},\quad U_{11}=Y_{11},\quad V'=\begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{pmatrix},\quad S_1V_{11}=Z_{11}S_1,\quad Y_{11}=Z_{11}.$$

因此

$$V'C=\begin{pmatrix} Y_{11}S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=CU'.$$

由于文 [5,6,7] 已给出了广义奇异值分解的算法，而我们的结果提供了判别矩阵 Γ 逆存在的一种较为简便的方法，因而可减少文 [1,2] 的计算量和复杂度.

参考文献:

[1] 江声远. 矩阵的 Γ 逆与约束线性方程组 [J]. 曲阜师范大学学报， 1988, **3**: 50–55.
JIANG Sheng-yuan. *The Γ-inverse of matrices and constrained linear equation* [J]. Journal of Qufu Normal University, 1988, **3**: 50–55. (in Chinese)

[2] 江声远．矩阵的 Γ 逆在一类约束线性系统中的应用 [J]. 数学研究与评论， 1994, **14**: 277–284.
JIANG Sheng-yuan. *An appliciation of Γ-inverse of matrices to a class of constrained system* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1994, **14**: 277–284. (in Chinese)
[3] DARNES W E. *On the Γ-rings of Nobusawa* [J]. Pacific. J. Math., 1966, **18**: 411–412.
[4] RAO C R, MITRA S K. *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* [M]. Wiely, New York, 1971.
[5] MOOR B D E. *On the structure of the generalized singular value and QR decomposition* [J]. SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 1994, **15**: 347–358 .
[6] MOOR B D E, GOLUB G H. *The restricted singular value decomposition: properties and applications* [J]. SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 1991, **12**: 401–425.
[7] MOOR B D E, DOOREN P V. *Generalizations singular value and QR decomposition* [J]. SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 1992, **13**: 993–1014.
[8] WEI Mu-sheng, ZHANG Bi-rong. *Structures and uniqueness conditions of MK-weighted Pseudoinverse* [J]. BIT, 1994, **34**: 437–450.
[9] 魏木生，陈果良．加权广义逆，加权最小二乘和约束最小二乘问题 [J]. 计算数学， 1995, **2**: 196–209.
WEI Mu-sheng, CHEN Guo-liang. *Weighted generalized inverse, weighted and constrained least squares problem* [J]. Mathematica Numerica Sinica, 1995, **2**: 196–209.

On Γ-Inverse of Matrices

LIU Xiao-ji[1], *LIU San-yang*[2]
(1. College of Computer and Informations Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China;
2. Dept. Appl. Math., Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: A sufficient and necessary condition for the existence of the Γ-inverse of a matrix and its expression are given by using the generalized singular value decomposition, and the uniqueness of the Γ-inverse is also discussed.

Key words: matrices; Γ-inverse; generalized singular value decomposition.