第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0292-07 **文献标识码**: A

矩阵方程 $AXA^{\mathrm{T}}=C$ 的对称斜反对称解

周富照 [1,2]

(1. 长沙理工大学数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410076; 2. 武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)
(E-mail: liuzhouamail@163.net)

摘 要: 设 $A\in R^{m\times n}, C\in R^{m\times m}$ 给定, 利用矩阵的广义奇异值分解和对称斜反对称矩阵的性质, 得到了矩阵方程 (1)$AXA^{\mathrm{T}}=C$ 存在对称斜反对称解的充要条件和通解表达式; 证明了若方程 (1) 有解, 则一定存在唯一极小范数解, 并给出了极小范数解的具体表达式和求解步骤.

关键词: 矩阵方程; 对称斜反对称矩阵; 广义奇异值分解; 极小范数解.
MSC(2000): 15A24
中图分类: O241.6

1 引 言

令 $R^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶实矩阵集合; $SR^{n\times n}(SR_0^{n\times n})$ 表示全体 $n\times n$ 实对称 (实对称半正定) 矩阵集合; $ASR^{n\times n}$ 表示全体 n 阶实反对称矩阵集合; $OR^{n\times n}$ 表示所有 n 阶正交矩阵全体; I_k 表示 k 阶单位矩阵; $BSR^{n\times n}$ 表示全体 $n\times n$ 双对称实矩阵集合; $SAR^{n\times n}$ 表示全体 $n\times n$ 实对称斜反对称矩阵集合, 这里一个实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 被称为对称斜反对称矩阵, 如果对所有的 $1\le i,j\le n$ 有 $a_{ij}=a_{ji}, a_{ij}=-a_{n+1-j,n+1-i}$; $\mathrm{rank}(A)$ 表示 A 的秩; 对于 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$, $A*B$ 表示 A 与 B 的 Hadamard 乘积, 其定义为 $A*B=(a_{ij}b_{ij})$; 在 $R^{n\times m}$ 中定义内积 $(A,B)=\mathrm{tr}(B^TA)$; 由内积导出的范数 $\|A\|=\sqrt{\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)}$ 即为 Frobenius 范数, $R^{n\times m}$ 构成一个完备的内积空间.

设 $S_n=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)$, 其中 e_i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列. 易知 $S_n^T=S_n, S_n^TS_n=I$.

本文讨论如下问题:

问题 I. 给定 $A\in R^{m\times n}, C\in R^{m\times m}, S\subseteq R^{n\times n}$. 记

$$S_1=\left\{X\in S|AXA^{\mathrm{T}}=C\right\}. \tag{1}$$

求 $\hat{X}\in S_1$ 使得

$$\|\hat{X}\|=\min_{X\in S_1}\|X\|.$$

戴华和 P.Lancaster[1] 分别就 $S=SR^{n\times n}$ 和 $S=SR_0^{n\times n}$ 对问题 I 进行了详细讨论, 并利用奇异值分解 (SVD) 给出了这两类最小二乘问题的通解; 廖安平 [2] 就 $S=BSR^{n\times n}$ 研究了问题 I, 并利用标准相关分解 (CCD) 给出了问题 I 的通解; 谢冬秀 [3] 就 $S=P_n$ 研究了问题 I. 本

收稿日期: 2002-11-26
基金项目: 国家自然科学基金 (50208004), 中国博士后科学基金 (2004036448), 湖南省教育厅基金 (04C099)

文将就 $S=SAR^{n\times n}$ 讨论问题 I, 并利用广义奇异值分解 (GSVD) 和 $SAR^{n\times n}$ 的结构给出 S_1 非空的充要条件及元素表达式，同时证明了若 S_1 非空，则一定存在唯一最小范数解.

2 几个引理

当 $n=2k$ 时，记

$$D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ S_k & -S_k \end{pmatrix}, D^{\mathrm{T}}D=I_n. \tag{2}$$

当 $n=2k+1$ 时，记

$$D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ S_k & 0 & -S_k \end{pmatrix}, D^{\mathrm{T}}D=I_n. \tag{3}$$

引理 1[3]　不论 n 为奇数还是偶数， $SAR^{n\times n}$ 中的元素的一般形式为

$$A=D\begin{pmatrix} 0 & F^{\mathrm{T}} \\ F & 0 \end{pmatrix}D^{\mathrm{T}}, F\in R^{k\times(n-k)}, \tag{4}$$

这里当 $n=2k$ 时， D 取 (2) 式；当 $n=2k+1$ 时， D 取 (3) 式.

引理 2　$R^{n\times n}=SR^{n\times n}\oplus ASR^{n\times n}$.

引理 3　给定 $B,C^{\mathrm{T}}\in R^{m\times n}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m), H=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n), \lambda_i>0, i=1,2,\cdots,m, h_j>0, j=1,2,\cdots,n$. 则 (i) 问题

$$g(X)=\|\Lambda XH-B\|^2+\|HX^{\mathrm{T}}\Lambda-C\|^2=\min \tag{5}$$

在 $R^{m\times n}$ 中存在唯一解

$$\hat{X}=\Lambda^{-1}\frac{B+C^{\mathrm{T}}}{2}H^{-1}. \tag{6}$$

(ii) $g(X)=0$ 在 $R^{m\times n}$ 中有解的充要条件是 $B=C^T$, 且唯一解为

$$\hat{X}=\Lambda^{-1}BH^{-1}.$$

证明　(i) 设 $B=(b_{ij}), C=(c_{ij}), X=(x_{ij})_{m\times n}$, 则

$$g(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[(\lambda_i x_{ij}h_j-b_{ij})^2+(\lambda_i x_{ij}h_j-c_{ji})^2], \tag{7}$$

易知当且仅当

$$x_{ij}=\frac{b_{ij}+c_{ji}}{2\lambda_i h_j}, 1\le i\le m, 1\le j\le n \tag{8}$$

时，(7) 式取得最小值. 上式写成矩阵形式即得 (6) 式.

(ii) 注意到 $(\Lambda XH)^{\mathrm{T}}=HX^{\mathrm{T}}\Lambda$, 易证.　□

引理 4　给定 $C\in R^{s\times s}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s), H=\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_s), \alpha_i>0, \beta_i>0, i=1,2,\cdots,s$. 记

$$\Phi=(\varphi_{ij})_{s\times s},\quad \varphi_{ij}=\begin{cases} 0 & ,i\neq j \\ \frac{1}{2\alpha_i\beta_i} & ,i=j \end{cases},\quad \Psi=(\psi_{ij})_{s\times s},\quad \psi_{ij}=\begin{cases} 1 & ,j-i\ge 1 \\ 0 & ,j-i\le 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$S_2=\left\{X\in R^{s\times s}|\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-C\|=\min\right\}$$

$$S_3=\left\{X\in R^{s\times s}|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda=C\right\}. \tag{10}$$

则 (i) S_3 非空的充要条件是 $C^{\mathrm{T}}=C$, 且其元素通式可表为

$$X=\Lambda^{-1}[\Psi*C-H(\Psi*Y)^{\mathrm{T}}\Lambda]H^{-1}+\Phi*C+\Psi*Y,\forall Y\in R^{s\times s}; \tag{11}$$

若 $C^{\mathrm{T}}=C$, 则 S_3 中存在唯一的 $\hat{X}$ 使 $\|\hat{X}\|=\min$, 且 $\hat{X}$ 可表为

$$\hat{X}=H(F*C)\Lambda, \tag{12}$$

其中

$$F=(f_{ij}),f_{ij}=\frac{1}{\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2},i,j=1,2,\cdots,s. \tag{13}$$

(ii) S_2 中元素通式可表为

$$X=\Lambda^{-1}[\Psi^{\mathrm{T}}*\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}-H(\Psi*Y)^{\mathrm{T}}\Lambda]H^{-1}+\Phi*\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}+\Psi*Y,\forall Y\in R^{s\times s}. \tag{14}$$

证明 (i) 因对任意 $X\in R^{s\times s}$, 有 $(\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda)^{\mathrm{T}}=\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda$, 所以若 S_3 非空, 则易知 $C^{\mathrm{T}}=C$.

反之若 $C^{\mathrm{T}}=C$, 容易验证 $X_0=\Lambda^{-1}(\Psi^{\mathrm{T}}*C)H^{-1}+\Phi*C\in S_3$, 即 S_3 非空.

设 $C=(c_{ij}),X=(x_{ij})\in R^{s\times s}$, 将 $\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda=C$ 展开

$$\alpha_i x_{ij}\beta_j+\beta_i x_{ji}\alpha_j=c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$$

得当 $i=j$ 时,

$$x_{ii}=\frac{c_{ii}}{2\alpha_i\beta_i}(i=1,2,\cdots,s);$$

当 $i\neq j$ 时,

$$x_{ij}=\frac{c_{ij}-\beta_i x_{ji}\alpha_j}{\alpha_i\beta_j}.$$

注意到 $c_{ij}=c_{ji}(i,j=1,2,\cdots,s)$ 和 (9) 式, 易得 (11) 式.

若 S_3 非空, 任取 $X=(x_{ij})\in S_3$, 则

$$\begin{aligned}\|X\|^2&=\sum_{i=1}^n x_{ii}^2+\sum_{i\neq j}(x_{ij}^2+x_{ji}^2)\\&=\sum_{i=1}^n x_{ii}^2+\sum_{i\neq j}\left\{\left(\frac{c_{ij}-\beta_i x_{ji}\alpha_j}{\alpha_i\beta_j}\right)^2+x_{ji}^2\right\}\end{aligned}$$

易知当且仅当

$$x_{ji}=\frac{\alpha_i\beta_j c_{ij}}{\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2}$$

时, $\|X\|=\min$, 注意到 $C^{\mathrm{T}}=C$, 易得 (12) 式.

(ii) 因 $(\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda)^{\mathrm{T}}=\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda$, 由引理 2 知

$$\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-C\|^2=\left\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}\right\|^2+\left\|\frac{C-C^{\mathrm{T}}}{2}\right\|^2$$

所以 $\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-C\|=\min$ 等价于 $\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}\|=\min$. 因 $\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}$ 是对称矩阵，由 (i) 知 $\|\Lambda XH+HX^{\mathrm{T}}\Lambda-\frac{C+C^{\mathrm{T}}}{2}\|=\min=0$, 且 S_2 中元素通式可表为 (14) 式.

为研究问题 I, 我们首先讨论下述问题

问题 II. 给定 $A_1\in R^{m\times(n-k)},A_2\in R^{m\times k},C\in R^{m\times m}$. 记

$$S_4=\left\{Y\in R^{k\times(n-k)}|A_2YA_1^{\mathrm{T}}+A_1Y^{\mathrm{T}}A_2^{\mathrm{T}}=C\right\}. \tag{15}$$

求 $\hat{Y}\in S_4$ 使得

$$\|\hat{Y}\|=\min_{Y\in S_4}\|Y\|.$$

设 $[A_1,A_2]$ 的广义奇异值分解为

$$A_1=M\Sigma_{A_1}U^{\mathrm{T}},\quad A_2=M\Sigma_{A_2}V^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

其中 M 是 $m\times m$ 阶非奇异矩阵,

$$U=\begin{array}{ccc}(\, U_1, & U_2, & U_3 \,) \\ r & s & n-k-r-s\end{array}\in OR^{(n-k)\times(n-k)},$$

$$V=\begin{array}{ccc}(\, V_1, & V_2, & V_3 \,) \\ k+r-t & s & t-r-s\end{array}\in OR^{k\times k}, \tag{17}$$

$$\Sigma_{A_1}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} I_{A_1} & & \\ & \Lambda & \\ & & O_{A_1} \\ & 0 & \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} r \\ s \\ t-r-s \\ m-t\end{array}, \tag{18}$$

$$\Sigma_{A_2}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} O_{A_2} & & \\ & H & \\ & & I_{A_2} \\ & 0 & \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} r \\ s \\ t-r-s \\ m-t\end{array}, \tag{19}$$

这里， $t=\operatorname{rank}(A_1,A_2)$, $r=t-\operatorname{rank}(A_2),s=\operatorname{rank}(A_1)+\operatorname{rank}(A_2)-t$, I_{A_1} 和 I_{A_2} 是单位矩阵， O_{A_1} 和 O_{A_2} 是零矩阵， $\Lambda=\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),H=\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_s),1>\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_s>0,0<\beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_s<1,\alpha_i^2+\beta_i^2=1,i=1,\cdots,s.$

引理 5 设问题 II 中的 $[A_1,A_2]$ 的广义奇异值分解如 (16) 式，记

$$M^{-1}CM^{-T}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ s \\ t-r-s \\ m-t\end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad r & \quad s & t-r-s & m-t\end{array} & \end{array}. \tag{20}$$

则 (i) S_4 非空的充要条件是

$$C^{\mathrm{T}}=C,C_{11}=0,C_{33}=0,C_{14}=0,C_{24}=0,C_{34}=0,C_{44}=0, \tag{21}$$

且 S_4 中元素通式可表为

$$Y=V\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ H^{-1}C_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ C_{31} & C_{32}\Lambda^{-1} & Y_{33} \end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

其中

$$\begin{gathered}\forall Y_{11}\in R^{(k+r-t)\times r}, Y_{12}\in R^{(k+r-t)\times s}, Y_{13}\in R^{(k+r-t)\times(n-k-r-s)}, \\ Y_{23}\in R^{s\times(n-k-r-s)}, Y_{33}\in R^{(t-r-s)\times(n-k-r-s)};\end{gathered} \tag{23}$$

$$Y_{22}=\Lambda^{-1}[\Psi^{\mathrm{T}}*C_{22}-H(\Psi*E)^{\mathrm{T}}\Lambda]H^{-1}+\Phi*C_{22}+\Psi*E, \forall E\in R^{s\times s}; \tag{24}$$

Φ,Ψ 如 (9) 式定义.

(ii) 若条件 (21) 式成立，则 S_4 中存在唯一的 $\hat{Y}$ 使

$$\|\hat{Y}\|=\min,$$

且 $\hat{Y}$ 可表为

$$\hat{Y}=V\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H^{-1}C_{21} & \hat{Y_{22}} & 0 \\ C_{31} & C_{32}\Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

其中 $\hat{Y_{22}}=\Lambda(F*C)H$, F 如 (13) 式.

证明 (i) 若 S_4 非空，显然 $C^{\mathrm{T}}=C$. 对 $Y\in S_4$, 利用广义奇异值分解式 (16), 有

$$M\Sigma_{A_2}V^{\mathrm{T}}YU\Sigma_{A_1}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+M\Sigma_{A_1}U^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}V\Sigma_{A_2}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}=C, \tag{26}$$

由于 M 非奇异，上式等价于

$$\Sigma_{A_2}V^{\mathrm{T}}YU\Sigma_{A_1}^{\mathrm{T}}+\Sigma_{A_1}U^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}V\Sigma_{A_2}^{\mathrm{T}}=M^{-1}CM^{-T}. \tag{27}$$

记

$$V^{\mathrm{T}}YU=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} k+r-t \\ s \\ t-r-s \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \quad s \quad & n-k-r-s \end{matrix} & \end{array}. \tag{28}$$

将 (20) 和 (28) 式代入 (27) 式得

$$\begin{pmatrix} 0 & Y_{21}^{\mathrm{T}}H & Y_{31}^{\mathrm{T}} & 0 \\ HY_{21} & HY_{22}\Lambda+\Lambda Y_{22}^{\mathrm{T}}H & \Lambda Y_{32}^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y_{31} & Y_{32}\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

因此 (27) 式等价于

$$HY_{21}=C_{21}, Y_{21}^{\mathrm{T}}H=C_{12}, Y_{31}^{\mathrm{T}}=C_{13}, Y_{31}=C_{31}, Y_{32}\Lambda=C_{32}, \Lambda Y_{32}^{\mathrm{T}}=C_{23}, \tag{30}$$

$$C_{11}=C_{33}=C_{14}=C_{24}=C_{34}=C_{44}=C_{41}=C_{42}=C_{43}=0, \tag{31}$$

$$HY_{22}\Lambda+\Lambda Y_{22}^{\mathrm{T}}H=C_{22}. \tag{32}$$

从而易知 S_4 非空的充要条件是 (21) 式成立，且由引理 3 和引理 4 知 S_4 元素的通式可表为 (22) 式.

(ii) 若 (21) 式成立，对 $\forall Y \in S_4$, X 可表为 (22) 式，则

$$\|Y\|^2 = \|Y_{11}\|^2 + \|Y_{12}\|^2 + \|Y_{13}\|^2 + \|Y_{23}\|^2 + \|Y_{33}\|^2 + \|Y_{22}\|^2 + \|C_{31}\|^2 + \|HC_{21}\|^2 + \|C_{32}\Lambda^{-1}\|^2 \tag{33}$$

因此 $\|Y\| = \min$ 等价于

$$Y_{11}=0,\quad Y_{12}=0,\quad Y_{13}=0,\quad Y_{23}=0,\quad Y_{33}=0 \tag{34}$$

$$\|Y_{22}\| = \min_{HY_{22}\Lambda+\Lambda Y_{22}^{\mathrm{T}}H=C_{22}}. \tag{35}$$

由引理 4(i) 知，(35) 式的唯一解 $\hat{Y_{22}} = \Lambda(F * C_{22})H$, 其中 F 如 (13) 式，将其和 (34) 式代入 (22) 式得 (25) 式. □

3 问题 I 的解及其算法

定理 1 给定 $A \in R^{m\times n}, C \in R^{m\times m}, S = SAR^{n\times n}$. 记

$$AD = (A_1, A_2), A_1 \in R^{m\times(n-k)}, A_2 \in R^{m\times k} \tag{36}$$

其中当 $n=2k$ 时，D 如 (2) 式，

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} I_k \\ S_k \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} I_k \\ -S_k \end{pmatrix}; \tag{37}$$

其中当 $n=2k+1$ 时，D 如 (3) 式，

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \\ S_k \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \\ -S_k \end{pmatrix}; \tag{38}$$

设 $[A_1, A_2]$ 的广义奇异值分解如 (16) 式，记 $M^{-1}CM^{-T}$ 如 (20) 式. 则

(i) S_1 非空的充要条件是 (21) 式成立，且 S_1 中元素的表达式为

$$X = D\begin{pmatrix} 0 & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & 0 \end{pmatrix}D^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

其中 Y 如 (22) 式;

(ii) 当 S_1 非空时，存在唯一的 $\hat{X} \in S_1$ 使

$$\|\hat{X}\| = \min_{X\in S_1}\|X\|$$

且 $\hat{X}$ 可表为

$$\hat{X} = D\begin{pmatrix} 0 & \hat{Y}^{\mathrm{T}} \\ \hat{Y} & 0 \end{pmatrix}D^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

其中 $\hat{Y}$ 如 (25) 式.

证明 对 $\forall X \in SAR^{n\times n}$, 由引理 1 知存在 $Y \in R^{k\times(n-k)}$ 使

$$X = D\begin{pmatrix} 0 & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & 0 \end{pmatrix} D^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

注意到 (36) 式,

$$AXA^{\mathrm{T}} = A_2YA_1^{\mathrm{T}} + A_1Y^{\mathrm{T}}A_2^{\mathrm{T}},$$

因此 S_1 非空等价于 S_4 非空. 再由引理 5 易得本定理结论. □

下面介绍求问题 I 中范数极小二乘解 $\hat{X}$ 的步骤:

(1) 输入 A, C;

(2) 按 (37) 或 (38) 计算 A_1 和 A_2;

(3) 按 (16) 作 $[A_1, A_2]$ 的广义奇异值分解;

(4) 按 (20) 式对 $M^{-1}CM^{-T}$ 作分块;

(5) 判别 (21) 式是否成立, 是继续, 否转(1); 或打印 "无解", 结束;

(6) 按 (25) 计算 $\hat{Y}$;

(7) 按 (40) 式计算 $\hat{X}$, 输出结果.

参考文献:

[1] DAI H, LANCASTER P. *Linear matrix equation from an inverse problem of vibration theory* [J]. Linear Algebra Appl., 1996, **246**: 31–47.

[2] 廖安平, 白中治. 矩阵方程 $AXA^{\mathrm{T}} = C$ 的双对称最小二乘解 [J]. 计算数学, 2002, **24**(1): 9–20.
LIAO An-ping, BAI Zhong-zhi. *Least-squares solutions of the matrix equation $A^{\mathrm{T}}XA = D$ in Bisymmetric matrix set* [J]. Math. Numer. Sin., 2002, **24**(1): 9–20.

[3] 谢冬秀. 约束矩阵方程及其数值解 [D]. 长沙: 湖南大学数学与计量经济学院, 1999.
XIE Dong-xiu. *The constrained matrix equation and its numerical methods* [D]. Changsha: College of Mathematics and Econometrics, Hunan Univ., 1999.

Solutions of Matrix Equation $AXA^{\mathrm{T}} = C$ in Symmetric and Skew-Antisymmetric Matrix Set

ZHOU Fu-zhao[1,2]

(1. College of Math. & Comput. Science, Changsha University of Science & Technology, Hunan 410076, China;
2. College of Math. & Statistic, Wuhan University, Hubei 430072, China)

Abstract: By applying the generalized singular-value decomposition (GSVD) of matrix pairs and the properties of symmetric and skew-antisymmetric , we obtain the sufficient and necessary conditions under which the matrix equation $AXA^{\mathrm{T}} = C$ is solvable in $n \times n$ symmetric and skew-antisymmetric matrix set, and prove that if the above equation is solvable, then there exists a unique minimal norm solution, and give the procedure to find this solution, where $A \in R^{m\times n}$ and $C \in R^{m\times m}$ are given matrices.

Key words: matrix equation; symmetric and skew-antisymmetric matrix; generalized singular-value decomposition; minimal norm solution.