第25卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0325-06 文献标识码: A

Hilbert C^* 模上的 Gabor 酉系统

孟 彬

(南京航空航天大学理学院，江苏 南京 210016)

(E-mail: b.meng@nuaa.edu.cn)

摘 要: 本文引入了 Hilbert C^*- 模上的 Gabor 酉系统的概念，研究了它的基本性质，证明了膨胀定理，并给出某个酉系统的两个正规框架向量不相交的等价条件.

关键词: Hilbert C^*- 模；模框架； Gabor 酉系统；不相交.

MSC(2000): 46H25, 46L99, 47A05

中图分类: O177.1

1 引 言

M.Frank 和 D.R.Larson 在 [1] 中引入了 Hilbert C^*- 模上框架的定义，并进行了系统的研究. 他们证明了任何一个可数生成 Hilbert C^*- 模都有正规框架. 虽然 Hilber C^*- 模不一定有标准正交基，但我们可以把正规框架膨胀成某个更大模的标准正交基.

Hilbert 空间 H 上的 Gabor 酉系统实际上是 $L^2(R)$ 上 Gabor 框架的推广, 本文将把 Hilbert 空间的 Gabor 酉系统推广到 Hilber C^*- 模上. 我们证明了对于给定的一个参数，必可找到一个模及其上的酉系统和它的完全游荡向量. 我们研究了 Gabor 酉系统的膨胀性质，即对于任何一个 Gabor 酉系统及其正规框架向量，我们都可以找到另一个模上的 Gabor 酉系统及其正规框架向量，使两者的直和是标准正交基. 并在此基础上得出一个 Gabor 酉系统的两个正框架向量的不相交的判定定理.

2 Hilbert C^*- 模

我们首先来介绍 Hilbert C^*- 模的有关概念和结论.

定义 1 设 A 是单位 C^*- 代数， H 是 C 上线性空间， H 是左 A- 模， $\lambda(ax)=(\lambda a)x=a(\lambda x), \lambda\in C, a\in A$, 若有 $\langle,\rangle: H\times H\longrightarrow A$, 具有性质:

(i) $\langle x,x\rangle\geq 0, \forall x\in H$;

(ii) $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0, \forall x\in H$;

(iii) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*, x,y\in H$;

(iv) $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle, \forall a\in A, x,y\in H$;

(v) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

则称 $(H,\langle,\rangle)$ 为准 Hilbert C^*- 模，在 H 上定义范数 $\|x\|:=\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}, \forall x\in H$, 若 H 在 $\|\cdot\|$ 下完备就称之为 Hilbert C^*- 模，或 Hilbert A- 模.

收稿日期: 2002-05-07

定义 2 设 H_1, H_2 都是 Hilbert A- 模, $t: H_1 \longrightarrow H_2$ 是线性映射, 若存在 $t^*: H_2 \longrightarrow H_1$, 满足 $\langle tx, y\rangle = \langle x, t^*y\rangle, \forall x \in H_1, y \in H_2$, 则称是 t 可伴的.

若 t 是可伴的, 则 t 必是 A- 线性的, 且 t 有界, 反之不然. 从 H_1 到 H_2 的全体可伴算子记作 $L(H_1, H_2)$.

若 $u \in L(H_1, H_2)$, 满足 $u^*u = 1_{H_1}, uu^* = 1_{H_2}$ 就称 u 是酉算子; 若 $u \in L(H_1, H_2)$ 满足 $\|ux\| = \|x\|$, 称 u 是等距算子.

命题 1[2] 设 $u \in L(H_1, H_2)$, 则

(i) u 是等距算子 $\Leftrightarrow \langle ux, uy\rangle = \langle x, y\rangle$;

(ii) u 是酉算子 $\Leftrightarrow u$ 是等距且满的;

(iii) u 是等距算子 $\Leftrightarrow u^*u = 1$.

一般来说, $\forall F$ 是 H 的闭子模, F 不一定有正交补, 即 $H = F \bigoplus F^\perp$ 不一定成立, 其中 $F^\perp := \{x \in H | \langle x, F\rangle = 0\}$. 因此 Hilbert C^*- 模不一定有标准正交基. 若 H 的闭子模 F 满足 $H = F \bigoplus F^\perp$, 则称 F 是可补的.

命题 2[2] 设 $t: H_1 \longrightarrow H_2$ 是可伴算子, 且具有闭值域, 则

(i) $\operatorname{ran} t$ 在 H 中可补;

(ii) $\ker t$ 在 H 中可补;

(iii) t^* 的值域是闭的.

设 F 是可补子模, 则可定义正交投影 $P: H \longrightarrow F, \forall x \in H$, 有唯一分解 $x = y + z, y \in F, z \in F^\perp$, 定义 $P(x) := y$. 易见, $p = p^*$.

3 Hilbert C^*- 模上的框架

设 H 是 Hilber C^*- 模, $\{x_i\}_{i\in N} \subseteq H$, 使得 $\{\sum_{i=1}^n a_i x_i : n \in N, a_i \in A, x_i \in H\}$ 在 H 中范数稠, 就称 H 是可数生成的. 下文提到的模都是指可数生成模.

Fank 和 Larson 在 [1] 中给出了 Hilber C^*- 模上框架的定义.

定义 3 $\{x_j : j \in N\} \subseteq H$ 称为 Hilbert A- 模的框架, 若存在 $C, D > 0$, 使

$$C\langle x, x\rangle \le \sum_{j\in N} \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \le D\langle x, x\rangle, \quad \forall x \in H.$$

当 $C = D = 1$ 时, $\{x_i\}$ 称为正规框架.

注 设 $\{x_i\}$ 是框架, $\sum_{j\in N}\langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ 仅在弱拓扑下收敛, 若它在范数意义下收敛, 称之为标准框架, 为了叙述方便, 本文所指框架均为标准框架.

命题 3[1] H 是可数生成 Hilbert C^*- 模, 则它必有正规框架.

设 $\{x_j\}$ 是 H 的框架, 则存在可伴算子 $S: H \longrightarrow H$, 使 $x = \sum_{j\in N}\langle x, S(x_j)\rangle x_j, \forall x \in H$. 特别的, 当 $\{x_j\}$ 正规时, $x = \sum_{j\in N}\langle x, x_j\rangle x_j$. 可见, 框架必是 H 的一族生成元. 设 $\{x_i\}_{i\in N}$ 是 H 的一族生成元, 若它满足: $\sum_{j\in N} a_j x_j = 0 \Longleftrightarrow a_j x_j = 0$. 则称 $\{x_i\}$ 为 Hilbert 基.

下面我们来定义框架的不相交性.

定义 4[1] 设 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 分别是 H, K 的正规框架, 若 $\{x_i \oplus y_i\}$ 是 $H \bigoplus K$ 的正规框架, 则称 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 是强不相交的; 若 $\operatorname{span}_A\{x_i \oplus y_i\}_{i\in N}$ 仅在 $H \bigoplus K$ 稠密, 则称它们弱不相交, 其

中，$\mathrm{span}_A\{x_i\}_{i\in N} := \{\sum_{i=1}^n a_i x_i | a_i \in A, x_i \in H, n \in N\}$.

4 Hilbert C^*- 模上的酉系统

定义 5 Hilbert A- 模 H 上的一个酉系统 $\mathcal{U}$, 是指 $L(H)$ 中全体酉算子的一个子集，且 $1 \in \mathcal{U}$.

$\psi \in H$ 称为 $\mathcal{U}$ 的准游荡向量，若 $\mathcal{U}\psi := \{\mathcal{U}\psi, \mathcal{U} \in \mathcal{U}\}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}_A \mathcal{U}\psi$ 的正交 Hilbert 基，且 $\langle\psi,\psi\rangle$ 在 A 中可逆；若 $\mathcal{U}\psi$ 是 H 的正交 Hilbert 基，且 $\langle\psi,\psi\rangle$ 可逆，则称 ψ 是完全准游荡向量. 若 $\mathcal{U}\psi$ 是 H 的标准正交基，称 ψ 是完全游荡向量. 同样的，若 $\mathcal{U}\eta$ 是 H 的 (正规) 框架，则称 ψ 是 $\mathcal{U}$ 的 (正规) 框架向量.

设 $\psi \in \mathcal{W}(\mathcal{U}), \mathcal{C}_\psi(\mathcal{U}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), (T\mathcal{U} - \mathcal{U}T)\psi = \prime, \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}\}$ 称为局部换位子.

命题 4 设 H 是 Hilbert A- 模，$\mathcal{U}$ 是 H 上的酉系统，ψ 是 $\mathcal{U}$ 的完全准游荡向量，η 是完全正规框架向量，则存在 $S \in C_\psi(\mathcal{U})$, 使 $S\psi = \eta$, 且 S^* 是等距可伴算子.

证明 作 $\theta x := \sum_{U\in\mathcal{U}} \langle x, U\eta\rangle \langle\psi,\psi\rangle^{-\frac{1}{2}} U\psi$, 则 θ 是可伴的. 事实上，$\forall x = \sum a_U U\psi$,

$$\theta^*(x) = \theta^*(\sum a_U U\psi) := \sum a_U U\eta,$$

易见 θ^* 是定义好的.

令 $S = \theta^*, \forall U \in \mathcal{U}$.

$$\begin{aligned}\langle S^*x, S^*x\rangle = \langle\theta x, \theta x\rangle &= \langle \sum_{U\in\mathcal{U}} \langle x, U\eta\rangle \langle\psi,\psi\rangle^{-\frac{1}{2}} U\psi, \sum_{U\in\mathcal{U}} \langle x, U\eta\rangle \langle\psi,\psi\rangle^{-\frac{1}{2}} U\psi\rangle \\ &= \sum_{U\in\mathcal{U}} \langle x, U\eta\rangle \langle\psi,\psi\rangle^{-\frac{1}{2}} \langle\psi,\psi\rangle \langle\psi,\psi\rangle^{-\frac{1}{2}} \langle U\eta, x\rangle = \langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

$S\psi = \eta$ 是显然的. 由 $SU\psi = U\eta$ 推出 $SU\psi = US\psi$, 因此 $S \in C_\psi(\mathcal{U})$.

5 Gabor 酉系统

定义 6 设 U, V 是 Hilbert A- 模上的酉算子，满足 $UV = \lambda VU, \lambda \in C$ 且 $|\lambda| = 1$, 则酉系统 $\mathcal{U} = \{U^m V^n : m, n \in Z\}$ 称为 Gabor 酉系统.

命题 5 设 $\mathcal{U} = \{U^m V^n : m, n \in Z\}$ 是 Gabor 酉系统，则 $C_\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$.

证明 $C_\psi(\mathcal{U}) \supseteq \mathcal{U}'$ 是显然的.

$\forall T \in C_\psi(\mathcal{U}), \forall U^{m_0} V^{n_0} \in \mathcal{U}$, 任取 $x \in H$ 不妨设 $x = U^m V^n \psi$ 则

$$\begin{aligned}TU^{m_0}V^{n_0}(x) &= (TU^{m_0}V^{n_0})(U^m V^n \psi) = \lambda^{-mn_0} TU^{m_0}U^m V^{n_0} V^n \psi \\ &= \lambda^{-mn_0} U^{m_0} U^m V^{n_0} V^n T\psi = U^{m_0} V^{n_0} U^m V^n T\psi \\ &= U^{m_0} V^{n_0} T U^m V^n \psi = U^{m_0} V^{n_0} Tx,\end{aligned}$$

故 $T \in \mathcal{U}'$

命题 6 $\forall \lambda \in C, |\lambda| = 1$, 则存在关于 λ 的 Gabor 酉系统 $\mathcal{U}$, 使 $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.

证明 设 $l^2(A) := \{\{a_i\}_{i\in Z} : \sum\limits_{i\in Z} a_i a_i^*$范数收敛$\}$. $\forall a \in A$ 定义 $a \cdot \{a_i\} := \{aa_i\}, \langle\{a_i\}, \{b_i\}\rangle := \sum a_i b_i^*$. 易见 $l^2(A)$ 是 Hilbert A- 模. 它具有双边标准正交基 $\{e_m\}_{m\in Z}, e_m = \{\cdots, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots\}$, 在 m 位置为 1, 其它位置为 0.

现在考虑 Hilbert C^*- 模 $H := l^2(A\times A)$, 它的标准正交基记为 $\{e_{mn}\}_{m,n\in Z}$. $\forall m,n\in Z$, 定义两个酉算子 $Ue_{mn} := e_{m+1,n}, Ve_{m,n} = \lambda^{-m}e_{m,n+1}$. 则 $UV = \lambda VU$, 所以 $\{U^mV^n : U,V\}$ 是 H 上的 Gabor 酉系统, 且有完全游荡向量 $e_{0,0}$,$\{U^mV^ne_{0,0} : m,n\in Z\}$ 是标准正交基.

下面给出 Gabor 酉系统的膨胀定理.

定理 1 设 $\mathcal{U}_1 = \{U_1^mV_1^n : m,n\in Z\}$ 是 H_1 上的 Gabor 酉系统. $\forall\eta\in H_1$ 是 $\mathcal{U}_1$ 的完全正规框架向量, 则存在 Gabor 酉系统 $\mathcal{U}_2 = \{U_2^mV_2^n : m,n\in Z\}$ 作用在 H_2 上和 $\mathcal{U}_2$ 的正规框架向量 ξ, 使 $\{U_1^mV_1^n\eta\bigoplus U_2^mV_2^m\xi : m,n\in Z\}$ 是 $H_1\bigoplus H_2$ 的标准正交基.

证明 令 $H = l^2(A\times A)$,$\mathcal{U}$ 的定义如命题 6, 且记 $\psi := e_{0,0}$. 定义

$$W : H_1 \longrightarrow H, \forall x\in H$$
$$Wx = \sum_{m,n\in Z}\langle x, U_1^mV_1^n\eta\rangle U^mV^n\psi.$$

则 W 是等距的可伴算子, 由命题 2, WH_1 在 H 中是可补的, 令 P 是从 H 到 WH_1 上的正交投影. 下证 $P\in\mathcal{U}'$.

事实上

$$\begin{aligned}U^mV^n(Wx) &= U^mV^n\sum_{k,l\in Z}\langle x, U_1^kV_1^l\eta\rangle U^kV^l\psi = \sum_{k,l\in Z}\langle x, U_1^kV_1^l\eta\rangle U^mV^nU^kV^l\psi\\ &= \sum_{k,l\in Z}\lambda^{-nk}\langle x, U_1^kV_1^l\eta\rangle U^{k+m}V^{l+n}\psi\\ &= \sum_{k,l\in Z}\lambda^{-nk}\langle U_1^mV_1^nx, U_1^mV_1^nU_1^kV_1^l\eta\rangle U^{k+m}V^{l+n}\psi\\ &= \sum_{k,l\in Z}\langle U_1^mV_1^nx, U_1^{k+m}V_1^{l+n}\eta\rangle U^{k+m}V^{l+n}\psi = W(U_1^mv_1^nx),\\ PU^mV^n\psi &= W(U_1^mV_1^n\eta) = U^mV^n(W\eta) = U^mV^nP\psi,\end{aligned}$$

故 $P\in C_\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$.

令 $U_2 = P^\perp UP^\perp$,$V_2 = P^\perp VP^\perp$,$H_2 = P^\perp H$,$\xi = P^\perp\psi$. 易见, $\mathcal{U}_2$ 是 H_2 上的酉系统.

下证 ξ 为 $\mathcal{U}_2$ 的完全正规框架向量. $\forall x\in H$,

$$\begin{aligned}&\sum\langle P^\perp x, U_2^mV_2^n\xi\rangle\langle U_2^mV_2^n\xi, P^\perp x\rangle\\ &=\sum\langle P^\perp x, (P^\perp UP^\perp)^m(P^\perp VP^\perp)^nP^\perp\psi\rangle\langle(P^\perp UP^\perp)^m(P^\perp VP^\perp)^nP^\perp\psi, P^\perp x\rangle\\ &=\sum\langle P^\perp x, U^mv^n\psi\rangle\langle U^mV^n\psi, P^\perp x\rangle = \langle P^\perp x, P^\perp x\rangle.\end{aligned}$$

再证 $\{U_1^mV_1^n\eta\bigoplus U_2^mV_2^n : m,n\in Z\}$ 是 $H = H_1\bigoplus H_2$ 的标准正交基. $\forall y\in H_1, x\in H$ 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n\in Z}\langle y\bigoplus P^\perp x, U_1^mV_1^n\eta\bigoplus U_2^mV_2^n\xi\rangle\langle U_1^mV_1^n\eta\bigoplus U_2^mV_2^n\xi, y\bigoplus P^\perp x\rangle\\ &=\sum(\langle y, U_1^mV_1^n\eta\rangle + \langle P^\perp x, U_2^mV_2^n\xi\rangle)(\langle U_1^mV_1^n\eta, y\rangle + \langle U_2^mV_2^n\xi, P^\perp x\rangle)\\ &=\sum(\langle Wy, WU_1^mV_1^n\eta\rangle + \langle P^\perp x, U^mV^n\psi\rangle)(\langle WU_1^mV_1^n\eta, Wy\rangle + \langle U^mV^n\psi, P^\perp x\rangle)\end{aligned}$$

$$= \sum(\langle Wy, PU^mV^n\psi\rangle + \langle P^\perp x, U^mV^n\psi\rangle)(\langle PU^mV^n\psi, Wy\rangle + \langle U^mV^n\psi, P^\perp x\rangle)$$
$$= \sum(\langle PWy + P^\perp x, U^mV^n\psi\rangle)(\langle U^mV^n\psi, PWy + P^\perp x\rangle)$$
$$= \langle PWy + P^\perp x, PWy + P^\perp x\rangle = \langle PWy, PWy\rangle + \langle P^\perp x, P^\perp x\rangle$$
$$= \langle y, y\rangle + \langle P^\perp x, P^\perp x\rangle = \langle y \bigoplus P^\perp x, y \bigoplus P^\perp x\rangle,$$

所以 $\{U_1^mV_1^n\eta \bigoplus U_2^mV_2^n\xi : m,n \in Z\}$ 是 $H_1 \bigoplus H_2$ 的正规框架. 又由

$$\langle \eta \bigoplus \xi, \eta \bigoplus \xi\rangle = \langle \eta, \eta\rangle \bigoplus \langle \xi, \xi\rangle = \langle P\psi, P\psi\rangle + \langle P^\perp\psi, P^\perp\psi\rangle$$
$$= \langle P\psi + P^\perp\psi, \psi\rangle = 1,$$

因而，$\{U_1^mV_1^n\eta \bigoplus U_2^mV_2^n\xi\}$ 是 H 的标准正交基.

推论 1 设 $\mathcal{U} = \{U^mV^n : m,n \in Z\}$ 是作用在 Hilber C^*- 模 H 上的 Gabor 酉系统，且 $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. 任取 η 是 $\mathcal{U}$ 的非完全正规框架向量，则 η 可膨胀成 $\mathcal{U}$ 的完全游荡向量 ψ, 即存在 ξ 是 $\mathcal{U}$ 的非交换正规框架向量，使得 $(\mathcal{U}\eta \bigoplus \mathcal{U}\xi)$ 是 H 的标准正交基.

我们说 Gabor 酉系统 $\mathcal{U}$ 的两个正规框架向量 ξ, η 是强 (弱) 不相交的，是指 $\mathcal{U}\xi, \mathcal{U}\eta$ 是强 (弱) 不相交的.

定理 2 设 $\mathcal{U}$ 是 H 上的 Gabor 酉系统，$\mathcal{W}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, η_1, η_2 是 $\mathcal{U}$ 的非交换正规框架向量，它们膨胀成的完全游荡向量分别记为 ψ_1, ψ_2, 并且定义酉算子 $W : H \longrightarrow H, W(U^mV^n\psi_1) = U^mV^n\psi_2$. 记 $M(\eta_i) := \overline{\mathrm{span}}_A\mathcal{U}\eta_i, i = 1, 2$, 则

(1) η_1, η_2 是弱不相交的 $\Leftrightarrow M(\eta_1) \bigcap M(W^*\eta_2) = 0$;

(2) η_1, η_2 是强不相交的 $\Leftrightarrow M(\eta_1) \perp M(W^*\eta_2)$.

证明 (1)($\Longleftarrow$) 由于 H 有标准正交基，故有正交投影 P, Q 分别是从 H 到 $M(\eta_1), M(\eta_2)$ 上的正交投影. 由上一定理的证明知 $P, Q \in \mathcal{U}'$

当 $m = n = 0$ 时，$W\psi_1 = \psi_2$. 因此 $WU^mV^n\psi_1 = U^mV^n\psi_2 = U^mV^nW\psi_1$ 故 $W \in \mathcal{U}'$

要证 η_1, η_2 是弱不相交的，就是要证 $span_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\}$ 在 $M(\eta_1) \bigoplus M(\eta_2)$ 中稠密.

令 $s \bigoplus t \perp \overline{\mathrm{span}}_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mB^n\eta_2 : m,n \in Z\}$, 其中 $s \in M(\eta_1), t \in M(\eta_2)$ 则有

$$0 = \langle s \bigoplus t, U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\rangle = \langle s, U^mV^n\eta_1\rangle + \langle t, U^mV^n\eta_2\rangle$$
$$= \langle s, U^mV^nP\psi_1\rangle + \langle t, U^mV^nQ\psi_2\rangle = \langle s, U^mV^n\psi_1\rangle + \langle t, U^mV^n\psi_2\rangle$$
$$= \langle s, U^mV^n\psi_1\rangle + \langle t, U^mV^nW\psi_1\rangle = \langle s + W^*t, U^mV^n\psi_1\rangle.$$

由于 $\{U^mV^n\psi : m,n \in Z\}$ 是 H 的标准正交基，故 $s + W^*t = 0$. 又因为 $W^*t \in M(W^*\eta_2), s \in M(\eta_1)$ 及 $M(\eta_1) \bigcap M(W^*\eta_2) = 0$ 得 $s = 0$. $W^*t = 0$ 知 $t = 0$. 所以 $\mathrm{span}_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\}^\perp = 0$.

$H \bigoplus H$ 有标准正交基，知 $\mathrm{span}_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\}$ 在 $M(\eta_1) \bigoplus M(\eta_2)$ 中可补. 这样我们就推出 η_1, η_2 是弱不相交的.

($\Longrightarrow$) 设 $\mathrm{span}_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\}$ 在 $M(\eta_1) \bigoplus M(\eta_2)$ 中稠密. 假设 $M(\eta_1) \bigcap M(W^*\eta_2) \neq (0)$, 则存在 $0 \neq x \in M(\eta_1) \bigcap M(W^*\eta_2) \neq (0)$ 同时有 $y \in M(\eta_2)$ 使 $-x = W^*y$.

$$\langle x \oplus y, U^mV^n\eta_1 \oplus U^mV^n\eta_2\rangle = \langle x, U^mV^nP\psi\rangle + \langle y, U^mV^nW\psi_1\rangle = \langle x + W^*y, U^mV^n\psi_1\rangle = 0.$$

这样我们得到非零元 $x \oplus y \in \mathrm{span}_A\{U^mV^n\eta_1 \bigoplus U^mV^n\eta_2\}^{\perp}$, 此与条件矛盾. 因此

$$M(\eta_1)\bigcap M(W^*\eta_2) = 0.$$

(2) ($\Longleftarrow$) $\forall s \in M(\eta_1), t \in M(\eta_2)$ 由 $M(\eta_1) \perp M(W^*\eta_2)$, 我们有:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in Z} \langle s\oplus t, U^mV^n\eta_1 \oplus U^mV^n\eta_2\rangle\langle U^mV^n\eta \oplus U^mV^n\eta_2, s\oplus t\rangle \\
&= \sum(\langle s, U^mV^n\eta_1\rangle + \langle t, U^mV^n\eta_2\rangle)(\langle U^mV^n\eta_1, s\rangle + \langle U^mV^n\eta_2, t\rangle) \\
&= \sum(\langle s, U^mV^nP\psi_1\rangle + \langle t, U^mV^nQ\psi_2\rangle)(\langle U^mV^nP\psi_1, s\rangle + \langle U^mV^nQ\psi_2, t\rangle) \\
&= \sum(\langle s, U^mV^n\psi_1\rangle + \langle t, U^mV^nW\psi_1\rangle)(U^mV^n\psi_1, s\rangle + \langle U^mV^nW\psi_1, t\rangle) \\
&= \sum(\langle s+W^*t, U^mV^n\psi_1\rangle)(\langle U^mV^n\psi_1, s+W^*t\rangle) \\
&= \sum\langle s+W^*t, s+W^*t\rangle = \langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle = \langle s\oplus t, s\oplus t\rangle.
\end{aligned}$$

($\Longrightarrow$) $\forall s \in M(\eta_1), t \in M(\eta_2)$, 有

$$\sum\langle s\oplus t, U^mV^n\eta_1 \oplus U^mV^n\eta_2\rangle\langle U^mV^n\eta_1 \oplus U^mV^n\eta_2, s\oplus t\rangle = \langle s+W^*t, s+W^*t\rangle.$$

因为 η_1,η_2 是正交框架向量, 故 $\langle s\oplus t, s\oplus t\rangle = \langle s+W^*t, s+W^*t\rangle$, 因此 $\langle s, W^*t\rangle + \langle W^*t, s\rangle = 0$. 又有:

$$\begin{aligned}
\langle U^mV^n\eta_1, U^mV^nW^*\eta_2\rangle &= \langle \eta_1, W^*\eta_2\rangle = \langle P\psi_1, W^*Q\psi_2\rangle \\
&= \langle QWP\psi_1, W\psi_1\rangle = \langle W^*QWP\psi_1, \psi_1\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

这就证明了 $\langle U^mV^nW^*\eta_1, U^mV^nW^*\eta_2\rangle = 0$, 即 $M(\eta_1) \perp M(W^*\eta_2)$.

参考文献:

[1] FRANK M, LARSON D R. *A module frame concept for Hilbert C^*-modules* [J]. The functional and harmonic analysis of wavelets and frames (San Antonio, TX, 1999), 207–233, Contemp. Math., 247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[2] E.C.Lance, *Hilbert C^*-modules* [M]. A toolkit for operator algebraists. London Mathematical Society Lecture Note Series, 210. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] HAN De-guang, LARSON D R. *Frames, bases and group representations* [J]. Mem. Amer. Math. Soc., 2000, **147**: 697.

Gabor Unitary Systems On Hilbert C^*-Modules

MENG Bin

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu 210016, China)

Abstract: We introduce the notion of Gabor unitary system on Hilbert C^*-module and study some properties of it. We prove the dilation theorem and find out the equivalent conditions for the disjointness of two normalized tight frame vectors for a Gabor unitary system on Hilbert C^*-module.

Key words: Hilbert C^*-module; modular frame; Gabor unitary system; disjointness.