文章编号: 1000-341X(2005)02-0337-04 文献标识码: A

二元 Weinman 型指数分布的特征及其应用

李国安
(宁波大学数学系, 浙江 宁波 315211)
(E-mail: liguoan@nbu.edu.cn)

摘 要: 导出了 Weinman 型二元指数分布的一个特征, 由此获得了参数 $\theta_j(j=0,1)$ 的最大似然估计及矩估计, 给出了二元 Weinman 型指数分布的二种模拟, 还得到了强度为二元 Weinman 分布时并联结构系统可靠度的估计.

关键词: Weinman 型; 二元指数分布; 特征; 参数估计; 模拟; 可靠度.
MSC(2000): 62H05, 62H12, 62N05
中图分类: O212.1

1 引 言

Weinman[1,2] 于 1966 年引入了如下的二元指数分布

$$p(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})x_1-\frac{1}{\theta_1}x_2], & x_1\le x_2,\\ \frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})x_2-\frac{1}{\theta_1}x_1], & x_2\le x_1,\end{cases}$$

它是所有不独立的二元指数分布中所含参数最小的二元指数分布, 同时又是一个对称的指数分布, 对它的特征及参数估计问题的研究具有一定的特殊的意义, Block[3] 于 1977 年给出了二元 Marshall& Olkin 型指数分布的一个特征, 本文在第二节从分布密度等价分拆角度出发讨论了二元 Weinman 型指数分布的特征, 在第三节获得了二元 Weinman 型指数分布的参数的最大似然估计及矩估计, 在第四节给出了二元 Weinman 型指数分布的模拟, 在第五节考虑与文 [4] 中相对应的模型, 获得了强度为二元 Weinman 型指数分布时并联结构系统可靠度的估计, 从而为进一步的研究奠定了基础.

2 二元 Weinman 型指数分布的特征

称 (X_1,X_2) 为服从二元 Weinman 型指数分布的随机变量, 指它有如下的密度函数:

$$p(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})x_1-\frac{1}{\theta_1}x_2], & x_1\le x_2,\\ \frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})x_2-\frac{1}{\theta_1}x_1], & x_2\le x_1,\end{cases}$$

记作 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$. 设 $Z=\min(X_1,X_2)$, 设 $I=i, Z=X_i, i=1,2$. 记 $P(I=i)=p_i$, 记 $p_if_i(z)$ 表示 (Z,I) 的联合密度, 则有:

引理 1 设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$, 则有

$$p_if_i(z)=\frac{1}{\theta_0}e^{-\frac{2}{\theta_0}z},\ \ z>0,\ i=1,2.$$

收稿日期: 2003-01-03

证明 直接计算可得.

引理 2 设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$, 则有

$$\begin{cases} p_1f_1(z)f^{(1)}_{|X_2-X_1|}(x)=\frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0})z-(\frac{1}{\theta_1})x], & z>0,x>0, \\ p_2f_2(z)f^{(2)}_{|X_1-X_2|}(x)=\frac{1}{\theta_0}\frac{1}{\theta_1}\exp[-(\frac{2}{\theta_0})z-(\frac{1}{\theta_1})x], & z>0,x>0, \end{cases}$$

证明 直接计算可得.

引理 3 设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$, 那么, $|X_1-X_2|$ 的密度函数为:

$$f_{|X_1-X_2|}(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta_1}\exp[-\frac{1}{\theta_1}x], & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 直接计算可得.

定理 1 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$ 当且仅当 $p_i=\frac{1}{2},i=1,2$. 且 (1),(2) 同时满足:

(1) 给定 $I=1$ 时, Z 与 X_2-X_1 相互独立, 且 $Z\sim E(\frac{\theta_0}{2}),X_2-X_1\sim E(\theta_1)$.

(2) 给定 $I=2$ 时, Z 与 X_1-X_2 相互独立, 且 $Z\sim E(\frac{\theta_0}{2}),X_1-X_2\sim E(\theta_1)$.

证明 由引理 2 并直接验证可得.

记 $X_1^*=Z=\min(X_1,X_2),X_2^*=\max(X_1,X_2)$. 称 (X_1,X_2) 为对称随机变量指的是 (X_1,X_2) 与 (X_2,X_1) 同分布.

定理 2 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$ 当且仅当 (X_1,X_2) 为对称随机变量且 $X_1^*,X_2^*-X_1^*$ 相互独立, $X_1^*\sim E(\frac{\theta_0}{2}),X_2^*-X_2^*\sim E(\theta_1)$.

证明 直接验证可得.

此特征与文 [3] 中关于二元 Marshall-olkin 指数分布的特征类似, 如此表述可推广到多元情形, 而文 [3] 的表述无法推广.

3 二元 Weinman 型指数分布的参数估计

应用上述引理及定理, 可得到参数 (θ_0,θ_1) 最大似然估计及矩估计, 设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1)$, $(X_{1l},X_{2l})(i=1,2,\cdots,n)$ 为它的样本, $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n Z_l$, $\overline{|X_1-X_2|}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_{1l}-X_{2l}|$, 那么有:

定理 3 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1),(X_{1l},X_{2l})(l=1,2,\cdots,n)$ 为它的样本, 则参数 θ_0,θ_1 的最大似然估计及矩估计均为: $\hat{\theta}_0=2\overline{Z},\hat{\theta}_1=\overline{|X_1-X_2|}$.

证明 由引理 1 和引理 3 知, θ_0,θ_1 的矩估计分别为: $\hat{\theta}_0=2\overline{Z},\hat{\theta}_1=\overline{|X_1-X_2|}$. 由引理 2 和定理 2 得似然函数

$$L=\frac{1}{(\theta_0\theta_1)^n}\exp[-(\frac{2}{\theta_0})\sum_{l=1}^n\min(X_{1l},X_{2l})-\frac{1}{\theta_1}\sum_{l=1}^n|X_{2l}-X_{1l}|],$$

$$\ln L=-\ln\theta_0-\ln\theta_1-\frac{2}{\theta_0}\sum_{l=1}^n\min(X_{1l},X_{2l})-\frac{1}{\theta_1}\sum_{l=1}^n|X_{2l}-X_{1l}|,$$

分别令 $\frac{\partial\ln L}{\theta_0}=0,\frac{\partial\ln L}{\theta_1}=0$. 可得 θ_0,θ_1 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_0=2\overline{Z},\hat{\theta}_1=\overline{|X_1-X_2|}$.

定理 4 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{WBVED}(\theta_0,\theta_1),(X_{1l},X_{2l})(l=1,2,\cdots,n)$ 为它的样本, 则 $\hat{\theta}_0=2\overline{Z},\hat{\theta}_1=\overline{|X_1-X_2|}$ 分别为参数 θ_0,θ_1 的最小方差无偏估计及优效估计.

证明　由 $Z\sim E(\frac{\theta_0}{2}),|X_2-X_1|\sim E(\theta_1)$. 可得

$$I(\theta_0)=E[\frac{\partial}{\partial\theta_0}\ln\frac{2}{\theta_0}\exp(-\frac{2}{\theta_0}Z)]^2=\frac{4}{\theta_0^4}EZ^2-\frac{4}{\theta_0^3}EZ+\frac{1}{\theta_0^2}=\frac{1}{\theta_0^2},$$

又因为 $E\hat{\theta}_0=\theta_0,D\hat{\theta}_0=\frac{\theta_0^2}{n},E\hat{\theta}_1=\theta_1,D\hat{\theta}_1=\frac{\theta_1^2}{n}$, 定理得证.

4 二元 Weinman 型指数分布的模拟

根据定理 1, 先独立地产生三组容量均为 500 的 (0,1) 上均匀分布的伪随机数:

$$u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in},\quad i=1,2,3;n=500,$$

然后将它们转换成二点分布及参数为 $\frac{\theta_0}{2}$ 和 θ_1 的指数分布的伪随机数, 最后产生服从 WBVED(θ_0,θ_1) 的伪随机数:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\quad n=500.$$

也可根据定理 2, 先独立地产生二组容量均为 500 的 (0,1) 上均匀分布的伪随机数:

$$u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in},\quad i=1,2,3;n=500.$$

然后将它们转换成参数为 $\frac{\theta_0}{2}$ 和 θ_1 的指数分布的伪随机数，并注意到 (X_1,X_2) 为对称随机变量，最后可产生服从 WBVED(θ_0,θ_1) 的伪随机数:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),(y_1,x_1),(y_2,x_2),\cdots,(y_n,x_n),\quad n=500.$$

5 可靠度的估计

考虑由两个结构单元 A_1 和 A_2 并联组成的系统 [4], 设 A_1 和 A_2 的强度 $(X_1,X_2)\sim$ WBVED(θ_0,θ_1), 系统 A 所承受的应力 X 服从指数分布 $E(b)$, 其密度函数为

$$g(x)=\frac{1}{b}\exp(-\frac{1}{b}x),\quad x>0,$$

其中 $b>0$ 是未知参数.　X 的分布函数记为 $G(x)$. 又设应力与强度相互独立. 上述假定称为模型 M_A.

以上并联结构系统 A 的可靠度为

$$\begin{aligned}P_A&=P(\max(X_1,X_2)>X)=\int_0^\infty P(\max(X_1,X_2)>x)\mathrm{d}G(x)\\&=\int_0^\infty[\frac{2\theta_1}{2\theta_1-\theta_0}\exp(-\frac{1}{\theta_1}x)-\frac{\theta_0}{2\theta_1-\theta_0}\exp(-\frac{2}{\theta_0}x)]\frac{1}{b}\exp(-\frac{1}{b}x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2\theta_1^2}{(2\theta_1-\theta_0)(b+\theta_1)}-\frac{\theta_0^2}{(2\theta_1-\theta_0)(2b+\theta_0)}.\end{aligned}$$

设有来自 (X_1,X_2,X) 的样本 $(X_{1l},X_{2l},X_l)(l=1,2,\cdots,n)$. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n X_l$. 则 P_A 的估计为

$$\hat{P}_A=\frac{|\overline{X_1-X_2}|^2}{(|\overline{X_1-X_2}-\overline{Z})(\overline{X}+|\overline{X_1-X_2}|)}-\frac{\overline{Z}^2}{(|\overline{X_1-X_2}|-\overline{Z})(\overline{X}+\overline{Z})}.$$

类似文 [4] 同样地可以讨论 $\hat{P}_A$ 的统计性质.

定理 5 在模型 M_A 的条件下，有

(1) $\hat{P}_A \xrightarrow{\text{a.s.}} P_A \ (n \to \infty)$, (2) $\sqrt{n}(\hat{P} - P_A) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2) \ (n \to \infty)$,

其中

$$\sigma^2 = \frac{4b^4\theta_0^2}{(2b+\theta_0)^4(b+\theta_1)^2} + \frac{4b^4\theta_1^2}{(b+\theta_1)^4(2b+\theta_0)^2} + \frac{4b^4(2\theta_0\theta_1 + 2\theta_1 b + \theta_0 b)^2}{(b+\theta_1)^2(2b+\theta_0)^4}.$$

证明 直接计算可得.

参考文献:

[1] WEINMAN D G. *A multivariate extension of the exponential distribution* [D]. Ph. D. Thesis, Arizona State University, 1966.

[2] JOHNSON N L, KOTZ S. *Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions* [M]. New York : John Wiley & Sons , 1972, 268.

[3] BLOCK H W. *A characterization of a bivariate exponential distribution* [J]. Ann. Statist., 1977, 5: 808–812.

[4] YO Ci-nan. Estimate of reliability for parallel structural system with strength having MOBVE distribution[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A, 2000, **15**: 484–490.

[5] AZLAROV T A, VOLODIN N A. *Characterization Problems Associated with the Exponential Distribution* [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

[6] KOTZ S, BALAKRISHNAN N, JOHNSON N L. *Continuous Multivariate Distributions, Vol.1* [M]. New York: Wiley-Interscience, 2000.

[7] BALAKRISHNAN N, BASU A P. *The Exponential Distribution* [M]. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 1995.

Characterization of the Bivariate Exponential Distribution of Weinman and Its Application

LI Guo-an

(Dept. of Math., Ningbo University, Zhejiang 315211, China)

Abstract: A characterization of the bivariate exponential distribution of Weinman is derived. Then, it is used to obtain the maximum likelihood estimators and the moment estimators of parameters of the Weinman type's bivariate exponential distribution, as well as two simulations of the bivariate exponential distribution of Weinman. Moreover, the estimator of reliability for parallel structural system with strength having the Weinman type's bivariate exponential distribution are also given.

Key words: Weinman type; bivariate exponential distribution; characterization; parameter estimation; simulation; reliability.