第25卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0358-05 文献标识码: A

二阶代数微分方程的代数解

高凌云
(暨南大学数学系, 广州 广东 510632)
(E-mail: tgaoly@jnu.edu.cn)

摘 要: 本文讨论了二阶代数微分方程的代数解的存在性问题, 例子表明了定理中的条件是精确的.

关键词: 代数体函数; 代数解; 微分方程.
MSC(2000): 30D35, 34A34
中图分类: O174.52

1 引 言

有关代数体函数的值分布理论的通常记号, 请参见文献 [1].

关于复微分方程的代数体解的存在性问题, 许多作者都作了讨论并得到了很多的结果 (见文献 [2-6]). 在本文里, 考虑如下二阶微分方程的代数解的存在性问题

$$(w'')^n = P(z,w)/Q(z,w), \tag{1}$$

其中

$$P(z,w)=\sum_{i=0}^{p}a_i(z)w^i, Q(z,w)=\sum_{j=0}^{q}b_j(z)w^j, a_p\neq 0, b_q\neq 0, \{a_i(z)\}, \{b_j(z)\},\ i=0,\dots,p; j=0,\dots,q$$

为有限多个极点的亚纯函数, 且它们无公共零点, n 为正整数.

定理 1 设 $w(z)$ 为方程 (1) 的 ν 值代数体解. 若 $p<n+q$, 则

$$\min\{n,n+q-p\}\log^+ M(r,w) \le K[\sum_{i=0}^{p}\log^+ M(r,a_i)+\sum_{j=0}^{q-1}\log^+ M(r,b_j)]+ O(\log r), (r\notin E),$$

其中 K 为正常数, E 为线测度为有穷的区间序列.

定理 2 设 $w(z)$ 为方程 (1) 的 ν 值代数体解, 若 $p<n+q$, 则 $w(z)$ 为代数解.

为证明以上的两定理, 我们需要如下引理, 照 [1,pp192–193] 中的引理 4.5–4.6 的证明, 我们可得如下的引理 1 和引理 2.

引理 1 设 $w(z)$ 为超越的代数体函数且仅有有限多个极点, $w(z), w'(z)$ 和 $w''(z)$ 在 $|z|>r_0$ 全纯, 则对常数 $C_i>0, i=1,2,3$ 存在, 使得当 $r\ge r_1\ge r_0$ 时

$$M(r,w)\le C_1+C_2r+C_3r^2M(r,w'').$$

收稿日期: 2002-04-01
基金项目: 国家自然科学基金 (10471065), 广东省自然科学基金 (04010474)

引理 2　设 $w(z)$ 为超越的亚纯函数且仅有有限多个极点，则对 $\alpha>0$ 除去总长度为有穷的 r 区间序列有

$$M(r,w'')\leq 2^{1+\frac{1}{\alpha}}[M(r,w)]^{2\alpha+1},M(r,w')\leq 2^{\frac{1}{\alpha}}[M(r,w)]^{\alpha+1},(r\notin E).$$

2 定理 1 的证明

设 E 为线测度为有穷的区间序列．首先证明 w 的极点由 $\{b_j\}$ 的零点和极点以及 $\{a_i(z)\}$ 的极点所控制.

设 z_0 为 w 的 τ 重极点，但不是 $\{b_j\}$ 的零点和极点以及 $\{a_i(z)\}$ 的极点，则有

$$w(z)=(z-z_0)^{-\tau/\lambda}w_1(z),w_1(z_0)\neq 0,\infty,$$

$$w''(z)=(z-z_0)^{\frac{-(\tau+2\lambda)}{\lambda}}w_2(z),w_2(z_0)\neq 0,\infty.$$

重新写 (1) 为如下形式:

$$\sum_{j=0}^{q}b_j(z)w^j(w'')^n=\sum_{i=0}^{p}a_i(z)w^i. \tag{2}$$

从而由 (2) 有 $q\tau+n(\tau+2\lambda)\leq p\tau$. 而 $p\leq q+n$, 故 $n\lambda\leq 0$. 这是不可能的.

这表明 w 的极点由 $\{b_j\}$ 的零点和极点以及 $\{a_i(z)\}$ 的极点所控制.

令 $S=\{z|b_j=0\}\bigcup\{z|b_j(z)=\infty\}\bigcup\{z|a_i(z)=\infty\}$. 我们不妨将 (1) 重新写成

$$b_q^n\{Q_1(z,w)w''\}^n=P(z,w)Q(z,w)^{n-1}, \tag{3}$$

其中 $Q_1(z,w)=Q(z,w)/b_q$.

令

$$U(z)=\frac{w^{q+1}}{q+1}+\sum_{k=0}^{q-1}(\frac{b_k}{b_q})\frac{w^{k+1}}{k+1},$$

$$V(z)=qw^{q-1}w'+\sum_{k=0}^{q-1}(\frac{b_k}{b_q})''\frac{w^{k+1}}{k+1}+2\sum_{k=0}^{q-1}(\frac{b_k}{b_q})'w^kw'+k\sum_{k=0}^{q-1}(\frac{b_k}{b_q})w^{k+1}(w')^2.$$

则

$$Q_1(z,w)w''=U''-V(z). \tag{4}$$

明显地有 $U(z)$ 和 U'' 的极点均包含在 S 中. 将 (4) 代入 (3) 中，有

$$b_q^n\{U''-V(z)\}^n=P(z,w)Q(z,w)^{n-1}. \tag{5}$$

因 $U(z)$ 和 U'' 的极点个数为有限，故依引理 1, 有

$$M(r,U)\leq C_1+C_2r+C_3r^3M(r,U''),(r\notin E). \tag{6}$$

令 z_r 满足 $M(r,U'')=|U''(z_r)|,|z_r|=r,(r\notin E)$. 则有

$$\{U''-V(z)\}^n\leq|U''(z_r)-V(z_r)|^n\leq M(r,\frac{P(z,w)Q(z,w)^{n-1}}{b_q^n}). \tag{7}$$

而

$$M(r,\frac{P(z,w)Q(z,w)^{n-1}}{b_q^n})\leq\frac{K_1M(r,w)^{p+q(n-1)}\{\sum_{i=0}^{p}M(r,a_i)\}\{\sum_{j=0}^{q}M(r,b_j)\}^{n-1}}{r^{nd}},\tag{8}$$

其中 $d=\deg_z^{b_q(z)}$.

利用引理 2($(\alpha=1)$), 有

$$M(r,V)\leq K_2M(r,w)^{q-1}M(r,w')+\frac{K_3M(r,w)^q\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^3}{r^d}+\frac{K_4M(r,w)^{q-1}M(r,w')\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^2}{r^d}.\tag{9}$$

再结合引理 2($(\alpha=1)$), 有

$$M(r,w')\leq 4\{M(r,w)\}^2.\tag{10}$$

将 (10) 代入 (9) 中有

$$M(r,V)\leq\frac{K_5M(r,w)^{q+1}\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^3}{r^d}.\tag{11}$$

又

$$M(r,U)\geq\frac{M(r,w)^{q+1}}{q+1}-\frac{K_6M(r,w)^q\{\sum_{j=0}^{q}M(r,b_j)\}}{r^d}.$$

故

$$M(r,U'')-M(r,V(z))\geq(\frac{M(r,w)^{q+1}}{q+1}-\frac{K_6M(r,w)^q\{\sum_{j=0}^{q}M(r,b_j)\}}{r^d}-C_1-C_2r)/C_3r^2-\frac{K_5M(r,w)^{q+1}\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^3}{r^d}.\tag{12}$$

由 (5),(8),(12) 便得

$$M(r,w)^{\min\{1,(n+q-p)/n\}}\leq\frac{K_7\{\sum_{i=0}^{p}M(r,a_i)\}^{1/n}\{\sum_{j=0}^{q}M(r,b_j)\}^{(n-1)/n}}{r^d}+K_8\frac{\sum_{j=0}^{q}M(r,b_j)+\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^2+\{\sum_{j=0}^{q-1}M(r,b_j)\}^3}{r^d},$$

上式两边取 $\log^+$, 便得

$$\min\{n,n+q-p\}\log^+M(r,w)\leq K_9\sum_{i=0}^{p}\log^+M(r,a_i)+K_{10}\sum_{j=0}^{q-1}\log^+M(r,b_j)+O(\log r),(r\notin E).$$

3 定理 2 的证明

先估计 $N(r,w)$. 分两大情况讨论：

(1) 设 z_0 为 w 的 τ 重极点，为 $b_q(z)$ 的 t 重零点和某个 $a_i(z)$ 的 s 重极点.

(i) 当 $b_q w^q (w'')^n$ 的极点的重数不等于 (2) 左边各项的重数．则有

$$q\tau + n(\tau + 2\lambda) - t\lambda \le p\tau + \sum_{i=0}^{p} s(a_i, \infty),$$

故

$$\tau \le \frac{(t-2n)\lambda}{q+n-p} + \frac{1}{q+n-p}\sum_{i=0}^{p} s(a_i, \infty).$$

(ii) 当 $b_q w^q (w'')^n$ 的极点的重数等于 (2) 左边某一项 $b_k w^k (w'')^n$ 的重数．则有

$$q\tau + n(\tau + 2\lambda) - t\lambda \le k\tau + n(\tau + 2\lambda),$$

故

$$\tau \le t\lambda/(q-k).$$

(2) 设 z_0 为 w 的 τ 重极点，为 $b_q(z)$ 的 t 重极点和某个 $a_i(z)$ 的 s 重极点.

(i) 当 $b_q w^q (w'')^n$ 的极点的重数不等于 (2) 左边各项的重数．则有

$$q\tau + n(\tau + 2\lambda) + t\lambda \le p\tau + \sum_{i=0}^{p} s(a_i, \infty),$$

故

$$\tau \le \frac{(t+2n)\lambda}{q+n-p} + \frac{1}{q+n-p}\sum_{i=0}^{p} s(a_i, \infty).$$

(ii) 当 $b_q w^q (w'')^n$ 的极点的重数等于 (2) 左边某一项 $b_k w^k (w'')^n$ 的重数．则有

$$q\tau + n(\tau + 2\lambda) + t\lambda \le k\tau + n(\tau + 2\lambda),$$

故 $(q-k)\tau + t\lambda \le 0$. 这不可能.

综合上面两大情形，即可证得

$$N(r,w) \le K_{11}[N(r,b_q) + N(r,\frac{1}{b_q}) + K_{12}\sum_{i=0}^{p} N(r,a_i)], \tag{13}$$

其中 K_{11}, K_{12} 为正常数.

而依定理 1, 有

$$\min\{n, n+q-p\} m(r,w) \le K_{13}[\sum_{i=0}^{p} m(r,a_i) + \sum_{j=0}^{q-1} m(r,b_j)] + O(\log r), (r \notin E), \tag{14}$$

其中 K_{13} 为正常数.

结合不等式 (13) 和不等式 (14), 有

$$T(r,w)=O(\log r),(r\notin E),$$

这表明 w 是 (1) 的代数解.

4 两个例子

现给两个例子表明我们定理的条件是精确的.

例 1 超越的代数体函数 $w(z)=(\sin z)^{\frac{1}{2}}$ 为微分方程

$$w''=\frac{-1-w^4}{4w^3}.$$

的解，此时， $p=4=n+q$.

例 2 设有微分方程

$$w''=\frac{(2\nu+1)w^{4\nu}+2w^{2\nu}-\nu+1}{\nu^2 w^{2\nu-1}}$$

可验证超越的代数体函数 $w(z)=(tgz)^{\frac{1}{\nu}}$ 为它的解，此时， $p=4\nu>2\nu=n+q$.

参考文献:

[1] 何育赞，肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学出版社， 1988.
HE Yu-zan, XIAO Xiu-zhi. *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1988.

[2] TODA N. *On algebroid solutions of some binomial differential equations in the complex plane* [J]. Proc. Japan Acad. Math. Sci., Ser. A, 1988, **64**(3): 61–64.

[3] HE Yu-zan, Xiao Xiu-zhi. *Admissible solutions of ordinary differential equations* [J]. Contemp. Math., 1983, **25**: 51–61.

[4] TODA N, KATO M. *On some algebraic differential equations with algebroid solutions* [J]. Proc. Japan Acad. Math. Sci., Ser. A, 1985,**61**(10): 325–328.

[5] 陈特为. 具有代数体函数解的一类常微分方程 [J]. 数学季刊， 1991,**6**(4): 45–51.
CHEN Te-wei. *One class of ordinary differential equations which possess algebroidal solutions in the complex domain* [J]. Chinese Quart. J. Math., 1991,**6**(4): 45–51.

[6] 高凌云. 复代数微分方程的代数体允许解的一些结果 [J]. 系统科学与数学， 2001, **21**(2): 213–222.
GAO Ling-yun. *Some results on admissible algebroid solutions of complex differential equations* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 2001,**21**(2): 213–222.

Algebroidal Solutions of Second-Order Algebraic Differential Equations

GAO Ling-yun
(Dept. of Math., Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: This paper investigates the existence of algebroidal solutions of the second-order differential equations in the complex plane. Two examples show that the conditions of the theorems are sharp.

Key words: Algebroidal function; algebraic solution; differential equations.