第25卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0376-05 **文献标识码:** A

关于除环上分块矩阵秩的等式

刘永辉 [1,2], 郭文彬 [3]

(1. 枣庄学院数学系, 山东 枣庄 277160; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080;
3. 聊城大学数学系, 山东 聊城 252000)

摘 要: 本文使用双矩阵分解方法研究除环上分块矩阵秩的等式, 给出了 Marsaglia-Styan 公式一个新的证明并获得了一些新的秩等式的刻划.

关键词: 除环; 分块矩阵; 秩等式; 双矩阵分解.
MSC(2000): 15A33, 15A09
中图分类: O151.21

1 引言与引理

关于除环上分块矩阵的秩等式, 文献 [1,2,3,10] 已有研究. 注意到这些研究所使用的方法和 [4] 大致相同. 本文则使用双矩阵分解方法研究除环上分块矩阵秩的等式. 首先利用块矩阵技巧给出 Marsaglia-Styan 公式一个简洁直观的证明, 继而得到了一类分块矩阵秩等式的充要条件. 由文献 [7,8,9] 知, 这类秩的等式关系在研究分块矩阵广义逆的块独立中起到重要作用.

通篇文章, F 表示一个除环, $F^{m\times n}$ 和 $F_r^{m\times n}$ 分别表示 F 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合和全体秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵的集合. GL_n 表示 F 上的全体 n 阶可逆矩阵. 若 $A\in F^{m\times n}$, $\mu(A)$ 表示 A 的左行空间, $R(A)$ 表示 A 的右列空间, $r(A)$ 表示 A 的秩, I_k 表示 k 阶单位阵, $0_{l\times m}$ 表示 $l\times m$ 零矩阵, 一般地记成 0.

引理 1.1[5] 设 $A\in F_r^{m\times n}, B\in F_s^{m\times p}$ 和 $C\in F_t^{q\times n}$, 则有 $P\in GL_m, Q\in GL_n, Q_0\in GL_p$ 和 $U\in GL_n, V\in GL_m, V_0\in GL_q$ 使得

(1) $PAQ=D_A,\quad PBQ_0=D_B$, 其中

$$D_A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r\\ m-r\end{array}\\ r,\ n-r & \end{array},\quad D_B=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l} s_1\\ r-s_1\\ s_2\\ m-r-s_2\end{array}\\ s_1,\ s_2,\ p-s & \end{array};$$

(2) $VAU=W_A,\quad V_0CU=W_C$, 其中

$$W_A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r\\ m-r\end{array}\\ r,\ n-r & \end{array},\quad W_C=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l} t_1\\ t_2\\ q-t\end{array}\\ t_1,\ r-t_1,\ t_2,\ n-r-t_2 & \end{array},$$

收稿日期: 2002-09-24
基金项目: 国家自然科学基金 (10371044)

这里 $s=s_1+s_2, t=t_1+t_2$.

2 主要结果

首先使用块矩阵技巧给出 Marsaglia-Styan 公式一个简洁的证明.

定理 2.1 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times p}, C\in F^{q\times n}$ 和 $D\in F^{q\times p}$, 则有

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r(A)+\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix}.$$

其中 $E_A=I-AA^{(1)}, F_A=I-A^{(1)}A, S_A=D-CA^{(1)}B$, $A^{(1)}$ 为 A 的任意一个 $\{1\}$- 逆.

证明 根据 [6], F 上任一矩阵均存在 $\{1\}$- 逆. 记 $A^{(1)}$ 为 A 的某一个 $\{1\}$- 逆.

$$\begin{aligned}
r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix} \\
&= r\left(\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ AA^{(1)} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= r\begin{pmatrix} 0 & E_AB & 0 \\ A & AA^{(1)}B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & E_AB & 0 \\ A & 0 & 0 \\ C & D-CA^{(1)}B & 0 \end{pmatrix} \\
&= r\left(\begin{pmatrix} 0 & E_AB & 0 \\ A & 0 & 0 \\ C & S_A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & A^{(1)}A \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\right) \\
&= r\begin{pmatrix} 0 & E_AB & 0 \\ A & 0 & A \\ C & S_A & CA^{(1)}A \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & E_AB & 0 \\ 0 & 0 & A \\ CF_A & S_A & 0 \end{pmatrix} \\
&= r(A)+r\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

推论 2.2 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times p}, C\in F^{q\times n}$, 则有

(1) $r(A,B)=r(A)+r(E_AB)=r(B)+r(E_BA)$;

(2) $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=r(A)+r(CF_A)=r(C)+r(AF_C)$;

(3) $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=r(B)+r(C)+r(E_BAF_C)$,

这里 $E_A=I-AA^{(1)}, F_A=I-A^{(1)}A, E_B=I-BB^{(1)}, F_C=I-C^{(1)}C, A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}$ 分别为 A,B,C 的任一个 $\{1\}$- 逆.

利用推论 2.2, 容易证得

推论 2.3 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times p}, C\in F^{q\times n}$, 则有

(1) $r(A,B)=r(A)+r(B)\Leftrightarrow R(A)\cap R(B)=\{0\}\Leftrightarrow \mu(E_AB)=\mu(B)\Leftrightarrow \mu(E_BA)=\mu(A)$;

(2) $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=r(A)+r(C)\Leftrightarrow \mu(A)\cap\mu(C)=\{0\}\Leftrightarrow R(CF_A)=R(C)\Leftrightarrow R(AF_C)=R(A)$,

这里 E_A, E_B, F_A, F_C 同推论 2.2.

定理 2.4 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times p}, C\in F^{q\times n}$, 记

$$M_0=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

则下列陈述是等价的

(1) $r(M_0)=r(A)+r(B)+r(C)$;

(2) $r(A,B)=r(A)+r(B), r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=r(A)+r(C)$;

(3) $R(A)\cap R(B)=\{0\}, \mu(A)\cap\mu(C)=\{0\}$.

证明 由推论 2.3 知, (2) $\Leftrightarrow$ (3).

由于

$$r(M_0)\le r(A,B)+r(C)\le r(A)+r(B)+r(C),$$

$$r(M_0)\le r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}+r(B)\le r(A)+r(B)+r(C),$$

从而 (1) $\Rightarrow$ (2) 成立.

根据推论 2.2 和推论 2.3 知

$$r(A,B)=r(A)+r(B)\Leftrightarrow r(A)=r(E_BA),$$

$$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=r(A)+r(C)\Leftrightarrow r(A)=r(AF_C).$$

若 (2) 成立, 则由秩的 Frobenius 不等式知

$$r(E_BAF_C)\ge r(E_BA)+r(AF_C)-r(A)=r(A),$$

又显然有 $r(E_BAF_C)\le r(A)$, 从而有 $r(E_BAF_C)=r(A)$. 再由推论 2.2 知, (2) $\Rightarrow$ (1) 成立.

定理 2.5 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times p}, C\in F^{q\times n}$ 和 $D\in F^{q\times p}$, 记

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则下列陈述是等价的

(1) $r(M)=r(A)+r(B)+r(C)+r(D)$;

(2) $r(A,B)=r(A)+r(B), \quad r(C,D)=r(C)+r(D)$

$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=r(A)+r(C), \quad r\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}=r(B)+r(D)$;

(3) $R(A)\cap R(B)=\{0\}, \quad R(C)\cap R(D)=\{0\}$,

$\mu(A)\cap\mu(C)=\{0\}, \quad \mu(B)\cap\mu(d)=\{0\}$.

证明 由推论 2.3 知 (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2) 类似于定理 2.4 的证明. 下面只需证明 (2) $\Rightarrow$ (1).

根据引理 1.1, 有

$$(A,B)=(P^{-1}D_AQ^{-1},P^{-1}D_BQ_0^{-1})=P^{-1}(D_A,D_B)\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q_0^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1}W_AU^{-1} \\ V_0^{-1}W_CU^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_A \\ W_C \end{pmatrix} U^{-1},$$

从而

$$r(A,B) = r(D_A, D_B), \quad r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} W_A \\ W_C \end{pmatrix}.$$

由引理 1.1 中的式 (1) 和式 (2) 知

$$r(A,B) = r + s_2, \quad r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r + t_2.$$

于是有

$$r(A,B) = r(A) + r(B) \Leftrightarrow s_1 = 0, \quad r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(C) \Leftrightarrow t_1 = 0.$$

因而 D_B 和 W_C 有如下形式

$$D_B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ s \\ m-r-s \end{array} \\ s,\ p-s & \end{array}, \quad W_C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} t \\ q-t \end{array} \\ r,\ t,\ n-r-t & \end{array}.$$

根据 [6], 取 A 的两个特殊的 $\{1\}$- 逆为

$$A_1^{(1)} = Q\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P, \quad A_2^{(1)} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V.$$

通过直接计算可知

$$A_1^{(1)}B = Q\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}PP^{-1}D_BQ_0^{-1} = 0,$$

$$CA_2^{(1)} = V_0^{-1}W_CU^{-1}U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V = 0.$$

由定理 2.1 的证明可知

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix} 0 & (I-AA_1^{(1)})B & 0 \\ A & AA_1^{(1)}B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ A & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix} \\ &= r\left(\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ A & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & A_2^{(1)}A \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\right) \\ &= r\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ A & 0 & A \\ C & D & CA_2^{(1)}A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ A & 0 & A \\ C & D & 0 \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \\ C & D & 0 \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

再由定理 2.4 知, 若 (2) 成立必有

$$r\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(D),$$

于是定理 2.5 得证.

作者感谢魏木生教授、陈果良教授的指导.

参考文献:

[1] 屠伯勋. 除环上矩阵的子矩阵的秩的恒等式与不等式 [J]. 数学研究与评论, 1989, **9**(3): 337–345.
TU Bo-xun. *Identities and inequalities on the rank of submatrices of a matrix over a division ring* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1989, **9**(3): 337–345. (in Chinese)

[2] 王卿文. 关于 P- 除环上分块矩阵秩的一些恒等式 [J]. 数学研究与评论, 1995, **15**(5): 97–101.
WANG Qing-wen. *Some identities for the ranks of partitioned matrices over a p-division ring* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1995, **15**(5): 97–101. (in Chinese)

[3] 庄瓦金. 非交换主理想环上分块矩阵的秩 [J]. 数学研究与评论, 1994, **14**(2): 265–270.
ZHUANG Wa-jin. *The rank of partitioned matrices over noncommutative principal ideal domain* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1994, **14**(2): 265–270. (in Chinese)

[4] MARSAGLIA G, STYAN G P H. *Equalities and inequalities for ranks of matrices* [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1974, **2**: 269–292.

[5] 王卿文. 任意体上的双矩阵分解与矩阵方程 [J]. 数学学报, 1996,**39**(3): 396–403.
WANG Qing-wen. *Pairwise matrix decompositions and matrix equation over an arbitrary skew field* [J]. Acta Math Sinica, 1996, **39**(3): 396–403. (in Chinese)

[6] 庄瓦金. 体上矩阵的广义逆 [J]. 数学杂志, 1986, **6**(1): 105–112.
ZHUANG Wa-jin. *Generalized inverses of matrices over a skew field* [J]. J. Math., 1986, **6**(1): 105-112. (in Chinese)

[7] WEI Mu-sheng and GUO Wen-bin. *On g-inverses of a bordered matrix: revisited* [J]. Linear Algebra Appl., 2002, **347**(1-3): 189–204.

[8] WANG Yi-ju. *On the block independence in reflexive inner inverse and M-P inverse of block matrix* [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998, **19**(2): 407–415.

[9] WANG Yi-ju. *Some equivalent conditions for block independence of reflexive inner inverse of block matrix* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2002, **22**(3): 375–379.

[10] 王卿文, 薛有才. 体与环上的矩阵方程 [M]. 北京: 知识出版社, 1996.
WANG Qing-wen, XUE You-cai. *Matrix Equations over Skews and Rings* [M]. Beijing: Knowledge Press, 1996. (in Chinese)

On Rank Equalities of Partitioned Matrices over a Division Ring

LIU Yong-hui[1,2], *GUO Wen-bin*[3]
(1. Dept. Math., Zaozhuang University, Shandong 277160, China;
2. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China;
3. Dept. of Math., Liaocheng University, Shandong 252000, China)

Abstract: By applying the decomposition of the pairwise matrices over a division ring, we give a new proof of Marsaglia-Styan rank formula. We also obtain some equivalent characterizations of some new rank equalities of the partitioned matrices.

Key words: Division ring; partitioned matrix; rank equalities; decomposition of pairwise matrices.