第25卷第3期 数学研究与评论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0474-05 文献标识码: A

局部对称共形平坦黎曼流形中紧致极小子流形的一个刚性定理

王 琪[1,2]

(1. 浙江大学西溪校区数学系, 浙江 杭州 310028;
2. 贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘 要: 本文研究局部对称共形平坦黎曼流形中紧致极小子流形, 得到了这类子流形第二基本形式模长平方关于外围空间 Ricci 曲率的一个拼挤定理, 推广了文 [1] 中的结果.

关键词: 局部对称; 共形平坦; 紧致极小子流形; Ricci 曲率.
MSC(2000): 53C42
中图分类: O186.17

1 引 言

设 M^n 是等距浸入在 $(n+p)$ 维局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} 中的 n 维紧致极小子流形. S 表示 M^n 的第二基本形式模长的平方, T_c 和 t_c 分别表示 N^{n+p} 的 Ricci 曲率的上确界和下确界, K 表示 N^{n+p} 的数量曲率.

Li[1] 证明了:

定理 A 设 M^n 是单位球面 $S^{n+p}(p>1)$ 中紧致极小子流形. 如果 $S \le \frac{2}{3}n$ 在 M^n 上处处成立, 则 M^n 或者是全测地的, 或者是 S^4 中的 Veronese 曲面.

本文推广文 [1] 中结果, 获得了下列定理 1.

定理 1 设 M^n 是等距浸入在局部对称共形平坦黎曼流形 $N^{n+p}(p>1)$ 中的紧致极小子流形, 如果

$$S \le \frac{2n}{2(n+p-2)}[2(2t_c - T_c) - \frac{K}{n+p-1}],$$

则 M^n 或者是全测地的, 或者是 S^4 中 Veronese 曲面.

注 1 当 $N^{n+p} = S^{n+p}(1)$ 时. $t_c = T_c = n+p-1, K = (n+p)(n+p-1)$, 定理 1 的条件成为 $S \le \frac{2}{3}n$, 因此本文定理 1 推广了定理 A.

2 准备工作

设 M^n 是 $(n+p)$ 维局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} 中的 n 维紧致极小子流形. 选取 N^{n+p} 的幺正局部标架场 $e_1, \cdots, e_{n+p}$ 使限制于 M^n 时, $e_1, \cdots, e_n$ 是 M^n 的切向量. 约定指标取值范围是

$$1 \le A, B, C, \cdots \le n+p, \quad 1 \le i, j, k, \cdots \le n, \quad n+1 \le \alpha, \beta, \gamma, \cdots \le n+p.$$

收稿日期: 2003-03-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10271106)

令 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 为 $e_1,\cdots,e_{n+p}$ 的对偶标架场，由于 N^{n+p} 为共形平坦 (即共形曲率张量为零)，则 N^{n+p} 有下列结构方程 [2]

$$d\omega_A=-\sum_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\quad \omega_{AB}+\omega_{BA}=0 \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB}=-\sum_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}+\varphi_{AB},$$

$$\varphi_{AB}=\frac{1}{2}\sum_{CD}K_{ABCD}\omega_C\wedge\omega_D, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}K_{ABCD}=\frac{1}{n+p-2}[&\delta_{AC}K_{BD}-\delta_{AD}K_{BC}+K_{AC}\delta_{BD}-\\&K_{AD}\delta_{BD}-\frac{K}{n+p-1}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})],\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$K_{AB}=\sum_C K_{ACBC},\quad K=\sum_A K_{AA}. \tag{2.4}$$

因为 N 是局部对称的，即 K_{ABCD} 的协变导数为零，故 K 为常数.

当限制在 M 上时，有 [2,3]

$$\omega_\alpha=0,\quad \omega_{\alpha i}=\sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}. \tag{2.5}$$

$$d\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij},$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{kl}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{2.6}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{2.7}$$

$$d\omega_{\alpha\beta}=-\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\Omega_{\alpha\beta},$$

$$\Omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum_{kl}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{2.8}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\sum_i(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}). \tag{2.9}$$

令 $B=\sum_{ij\alpha}h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_j e_\alpha$ 为 M 的第二基本形，$S=\|B\|^2=\sum_{ij\alpha}(h^\alpha_{ij})^2$ 是 B 的模长平方. 用 H_α 表示矩阵 (h^α_{ij}). M 是极小的，意指

$$\mathrm{tr}H_\alpha=0,\quad \forall\alpha. \tag{2.10}$$

由 (2.3), (2.7) 和 (2.10) 得

$$\frac{1}{n+p-2}\sum_i K_{ii}=\frac{1}{2(n-1)}(R+S)+\frac{nK}{2(n+p-1)(n+p-2)}, \tag{2.11}$$

其中 $R=\sum_i R_{ii}$ 为 M 的数量曲率. 现在用 h^α_{ijk} 及 h^α_{ijkl} 表示 h^α_{ij} 在切丛连络与法丛连络的直和连络下的协变导数, 则 [3]

$$h^\alpha_{ijk}-h^\alpha_{ikj}=-K_{\alpha ijk};\tag{2.12}$$

$$h^\alpha_{ijkl}-h^\alpha_{ijlk}=\sum_m(h^\alpha_{mi}R_{mjkl}+h^\alpha_{mj}R_{mikl})-\sum_\beta h^\beta_{ij}R_{\alpha\beta kl}.\tag{2.13}$$

因 M 是极小的, 则

$$\sum_i h^\alpha_{iikl}=0,\quad \forall\alpha,k,l.\tag{2.14}$$

又由于 N^{n+p} 是局部对称的, 则 [3]

$$K_{\alpha ijkl}=\sum_\beta K_{\alpha\beta jk}h^\beta_{il}+\sum_\beta K_{\alpha i\beta k}h^\beta_{jl}+\sum_\beta K_{\alpha ij\beta}h^\beta_{kl}-\sum_m K_{mijk}h^\alpha_{ml},\tag{2.15}$$

其中 $K_{\alpha ijkl}$ 是 $K_{\alpha ijk}$ 的共变导数.

参照 [3] 的计算, 由 (2.12), (2.13), (2.14) 可知, h^α_{ij} 的 Laplacian

$$\Delta h^\alpha_{ij}=-\sum_k(K_{\alpha kikj}+K_{\alpha ijkk})+\sum_{mk}(h^\alpha_{mi}R_{mkjk}+h^\alpha_{mk}R_{mijk})-\sum_{\beta k}h^\beta_{ki}R_{\alpha\beta jk}.\tag{2.16}$$

由 (2.7), (2.9) 和 (2.15)

$$\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij}=\sum_{ijk\alpha\beta}(4K_{\alpha\beta j}h^\alpha_{jk}h^\beta_{jk}h^\beta_{ik}-K_{\alpha k\beta k}h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij})+\sum_{ijkm\alpha}h^\alpha_{ij}(h^\alpha_{mk}K_{mijk}+h^\alpha_{mi}K_{mkjk})+$$
$$\sum_{ijkm\alpha}h^\alpha_{ij}(h^\alpha_{mk}R_{mijk}+h^\alpha_{mi}R_{mkjk})+\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H^2_\alpha H^2_\beta)],\tag{2.17}$$

其中 $\mathrm{tr}H_\alpha$ 表示矩阵 H_α 的迹. 注意 M 是极小的, 由 (2.7)

$$\sum_{ijkm\alpha}h^\alpha_{ij}(h^\alpha_{mk}R_{mijk}+h^\alpha_{mi}R_{mkjk})=\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H^2_\alpha H^2_\beta)]-\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2+$$
$$\sum_{ijkm\alpha}h^\alpha_{ij}(h^\alpha_{mk}K_{mijk}+h^\alpha_{mi}R_{mkjk}).\tag{2.18}$$

由 (2.17) 和 (2.18)

$$\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij}=\sum_{ijk\alpha\beta}(4K_{\alpha\beta ij}h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik}-K_{\alpha k\beta k}h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij})+2\sum_{ijkm\alpha}h^\alpha_{ij}(h^\alpha_{mk}K_{mijk}+h^\alpha_{mi}K_{mkjk})+$$
$$2\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H^2_\alpha H^2_\beta)]-\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2.\tag{2.19}$$

此外, 由 Li[1], 当 $p>1$ 时

$$2\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H^2_\alpha H^2_\beta)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]+\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2\le\frac{3}{2}S^2.\tag{2.20}$$

3 定理 1 的证明

因矩阵 $(\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta))_{p\times p}$ 是实对称的，故可选取法标架场 $\{e_\alpha\}$ 使其对角化，即 $\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)=(\mathrm{tr}H_\alpha^2)\delta_{\alpha\beta}$. 用公式 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{ijk\alpha\beta}K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta&=\sum_{k\alpha\beta}K_{\alpha k\beta k}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]=\sum_{k\alpha\beta}K_{\alpha k\beta k}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2)]\delta_{\alpha\beta}\\&=\sum_{k\alpha}\frac{1}{n+p-2}[(K_{kk}+K_{\alpha\alpha})-\frac{K}{n+p-1}]\mathrm{tr}(H_\alpha^2)\\&\le\frac{n}{n+p-2}(2T_c-\frac{K}{n+p-1})S.\end{aligned}\tag{3.1}$$

对固定的 α, 可取切标架场 $\{e_i\}$ 使 $h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$. 于是

$$\begin{aligned}&\sum_{ijkm}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})=\frac{1}{2}\sum_{ik}(\lambda_i^\alpha-\lambda_k^\alpha)^2K_{ikik}\\&=\frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{1}{n+p-2}[(K_{kk}+K_{ii})-\frac{K}{n+p-1}](\lambda_i^\alpha-\lambda_k^\alpha)^2\\&\ge\frac{n}{n+p-2}(2t_c-\frac{K}{n+p-1})\mathrm{tr}(H_\alpha^2).\end{aligned}\tag{3.2}$$

从而

$$2\sum_{ijkm\alpha}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})\ge\frac{n}{n+p-2}(4t_c-\frac{2K}{n+p-1})S.\tag{3.3}$$

注意到 $K_{\alpha\beta ij}=0(\forall\alpha,\beta,i,j)$, 由 (2.19), (2.20), (3.1) 和 (3.3)

$$\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\ge S\{\frac{n}{n+p-2}[(4t_c-2T_c)-\frac{K}{n+p-1}]-\frac{3}{2}S\}.\tag{3.4}$$

已知 $\frac{1}{2}\Delta S=\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha$, 因此，由定理 1 的假设条件和 (3.4) 得 $\Delta S\ge0$. 由 M 为紧致及 Hopf 原理， S 应为常数，则

$$h_{ijk}^\alpha=0,\quad\forall\alpha,i,j,k\tag{3.5}$$

$$\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha=0.\tag{3.6}$$

而且 (3.4) 取等号，即

$$\sum_{\alpha ij}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha=S\{\frac{n}{n+p-2}[(4t_c-2T_c)-\frac{K}{n+p-1}]-\frac{3}{2}S\}.\tag{3.7}$$

于是 (3.1), (3.2) 及 (3.3) 均取等号. 记

$$C=\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2-\sum_{\alpha ijk}h_{ij}^\alpha(K_{\alpha kikj}+K_{\alpha ijkk})$$

因为 N^{n+p} 是局部对称的，从 (2.15), (3.1), (3.3) 及 (3.5) 中取等号得

$$C=\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\beta ijk}(3K_{\alpha\beta ij}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-K_{\alpha k\beta k}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})+\sum_{ijkm\alpha}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})$$
$$=\frac{2n}{n+p-2}(t_c-T_c)S. \tag{3.8}$$

但是，将 (3.5) 代如 C 的定义中也有 [4]

$$C=\sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{ijk\alpha}(h_{ikk}^{\alpha}K_{\alpha jij}+h_{ijk}^{\alpha}K_{\alpha ijk})-\mathrm{div}\omega=-\mathrm{div}\omega, \tag{3.9}$$

其中 ω 为 $\omega=\sum_{\alpha ijk}(h_{ik}^{\alpha}K_{\alpha jij}+h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijk})\omega_k$. 而 $\mathrm{div}\omega=\sum_{\alpha ijk}\nabla_k(h_{ik}^{\alpha}K_{\alpha jij}+h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijk})$ 是 ω 的散度. 由 (3.8), (3.9) 得

$$\mathrm{div}\omega=\frac{2n}{n+p-2}(T_c-t_c)S. \tag{3.10}$$

现在，由 (3.4), (3.5) 和 (3.6), S 只有以下两种情况

(i) $S=0$, 此时 M 是全测地的.

(ii) $S=\frac{2n}{2(n+p-2)}[(4t_c-2T_c)-\frac{K}{n+p-1}]$ 是一个正常数. 此时，由 Green 散度定理及 (3.10)

$$\int_M\frac{2n}{n+p-2}(T_c-t_c)S=0. \tag{3.11}$$

因此 $T_c=t_c$. 由 Ricci 张量的对称性及 N^{n+p} 为共形平坦， N^{n+p} 必是一个常截曲率空间，直接从 [1] 知 M 为 S^4 中 Veronese 曲面.

参考文献:

[1] LI An-min, LI Jin-min. *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere* [J]. Arch. Math. (Basel), 1992, **58**(6): 582–594.

[2] CHEN Guang-hua, XU Sen-lin. *Rigidity of compact minimal submanifolds in a locally symmetric and conformally that Riemann manifold* [J]. Acta Math. Sci. (English Ed.), 1996, **16**(1): 89–96.

[3] YAU S T. *Submanifolds with constant mean curvature. I, II* [J]. Amer. J. Math., 1974, **96**: 346–366

[4] XU Hong-wei. *On closed minimal submanifolds in pinched Riemann manifolds* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, **347**(5): 1743–1751.

A Pinching Theorem of Minimal Submanifolds to Ambient Riemannian Manifolds

WANG Qi[1,2]

(1. Dept. of Math., Zhejiang University, Hangzhou 310028, China;
2. Dept. of Math. & Comp. Sci., Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: In this paper, the author works out a pinching theorem of compact minimal submanifolds of locally symmetric and conformally flat Riemannian manifolds. The result in this paper generalizes the theorem in Li[1].

Key words: locally symmetric and conformally flat; compact minimal submanifolds; Ricci curvature.