

以抛物弓形为边界的周期环域的三次系统的 Poincaré 分支

谭欣欣¹, 沈伯骞²

(1. 大连大学信息工程学院, 辽宁 大连 116622; 2. 辽宁师范大学数学系, 辽宁 大连 116029)

(E-mail: tanxdl@163.com)

摘 要: 本文以抛物弓形为边界的周期环域的三次系统的 Poincaré 分支为例, 说明具有相同边界的周期环域的相同次数的多项式系统的 Poincaré 分支. 由于周期环域内闭轨的不同, 它们所对应的 Abel 积分也不同, 所以它们的 Poincaré 分支所能分支出极限环的个数也是不同的.

关键词: 抛物弓形; Poincaré 分支; 极限环; Abel 积分; 三次 Hamilton 系统.

MSC(2000): 34C05, 34C07, 34C08

中图分类号: O175.12

1 引 言

对于一个给定了次数的多项式系统, 它在一定的边界周期环域内的 Poincaré 分支可以分支出极限环的个数, 决定于它所对应的 Abel 积分零点的个数. 这就是所谓的弱 Hilbert 第 16 问题, 或称 Hilbert-Arnold 问题^[1]. 近十几年来, 对弱 Hilbert 第 16 问题的研究, 出现了大量的工作. 特别是最近, 文 [4] 通过实例及一些参数的选取, 得到了 5 种形式相同的扰动三次 Hamilton 系统, 每种均具有 11 个极限环且极限环的分布也相同的结果; 文 [3]、[5]、[6] 着重研究了 5 次平面系统、多个参量扰动的 Hamilton 多项式向量场, 基于检验函数的方法, 借助于数值分析, 分别给出了系统存在极限环的个数以及实例, 讨论了多项式向量场的极限环分布, 且给出了复眼的结构图; 文 [7] 则全面回顾了 Hilbert 第 16 问题的进展, 以及它与平面向量场的分支的关系. 这些工作无疑为弱 Hilbert 第 16 问题的解决提供了有价值的信息.

本文以抛物弓形为边界的周期环域为例, 通过对扰动三次 Hamilton 系统的一般形式的 Abel 积分的计算, 说明具有相同边界的周期环域的三次系统的 Poincaré 分支, 由于周期环域内闭轨的不同, 它们所对应的 Abel 积分也不同. Abel 积分零点的个数也不同, 所以它们的 Poincaré 分支可能分支出极限环的个数也不相同.

2 抛物弓形内闭轨方程为 $y(-y - x^2 + 1) = h(0 < h < \frac{1}{4})$ 时的情形

考虑如下形状的三次 Hamilton 向量场的扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2y - 1 + \mu(a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \quad + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) \\ \dot{y} = -2xy + \mu(b_0 + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 \\ \quad + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2003-06-17

基金项目: 国家自然科学基金 (10471014), 大连大学信息科学与工程省高校重点实验室资助.

系统 (1) 当 $\mu = 0$ 时为 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H(x, y) = y(-y - x^2 + 1) = h. \quad (2)$$

当 $h = 0$ 时, 方程 (2) 表示抛物弓形; 当 $h = \frac{1}{4}$ 时, 方程 (2) 表示孤立点 $M(0, \frac{1}{2})$; 当 $0 < h < \frac{1}{4}$ 时, 方程 (2) 表示位于抛物弓形内的周期闭轨, 如图 1 所示

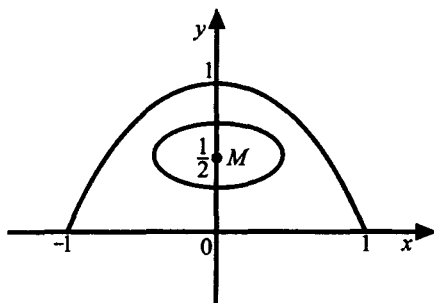


图 1 方程 (2) ($0 < h < \frac{1}{4}$) 的图象

系统 (1) 所对应的 Abel 积分

$$A(h) = \iint_{D(h)} (P_x + Q_y) dx dy,$$

其中 $D(h)$ 表示闭曲线 (2) 在 $0 < h < \frac{1}{4}$ 内所围区域, 因 $D(h)$ 关于 y 轴对称, 所以

$$A(h) = 2 \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{1}{3}(3a_{30} + b_{21}) \frac{h}{y^2} + (a_{10} + b_{01} - a_{30} - \frac{1}{3}b_{21}) \frac{1}{y} + (a_{11} + 2b_{02} + a_{30} + \frac{1}{3}b_{21}) + (a_{12} + 3b_{02})y \right] \sqrt{-y^2 + y - h} dy,$$

其中 $y_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4h})$, $y_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4h})$.

记 $A(h) = ahI_{-2}(h) + bI_{-1}(h) + cI_0(h) + dI_1(h)$ ($0 < h < \frac{1}{4}$), 这里

$$I_n(h) = \int_{y_1}^{y_2} y^n \sqrt{-y^2 + y - h} dy = \int_{y_1}^{y_2} y^n \sqrt{-(y - y_1)(y - y_2)} dy, \quad n = -2, -1, 0, 1,$$

$$a = 2(a_{30} + \frac{1}{3}b_{21}), \quad b = 2(a_{10} + b_{01} - a_{30} - \frac{1}{3}b_{21}),$$

$$c = 2(a_{11} + 2b_{02} + a_{30} + \frac{1}{3}b_{21}), \quad d = 2(a_{12} + 3b_{02}).$$

a, b, c, d 可以看作是四个相互独立的参数, 可以验证 $hI_{-2}(h), I_{-1}(h), I_0(h), I_1(h)$ 在 $0 < h < \frac{1}{4}$ 内是线性无关的. 为此来计算 $I_n(h)$ ($n = -2, -1, 0, 1$).

设 $\sqrt{-(y - y_1)(y - y_2)} = t(y - y_1)$ 得

$$I_n(h) = 2(y_2 - y_1)^2 \int_0^\infty \frac{t^2(y_2 + y_1 t^2)^n}{(1 + t^2)^{n+3}} dt,$$

$$\begin{aligned}
 I_{-2}(h) &= 2(y_2 - y_1)^2 \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(y_2 + y_1 t^2)^2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{h}} - 1\right)\pi, \\
 I_{-1}(h) &= 2(y_2 - y_1)^2 \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(y_2 + y_1 t^2)} = \sqrt{h}\left(\frac{1}{2\sqrt{h}} - 1\right)\pi, \\
 I_0(h) &= 2(y_2 - y_1)^2 \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{8}(1-4h)\pi, \\
 I_1(h) &= 2(y_2 - y_1)^2 \int_0^\infty \frac{t^2(y_2 + y_1 t^2)}{(1+t^2)^4} dt = \frac{1}{16}(1-4h)\sqrt{1-4h}\pi,
 \end{aligned}$$

所以有

$$A(h) = ah\left(\frac{1}{2\sqrt{h}} - 1\right)\pi + b\sqrt{h}\left(\frac{1}{2\sqrt{h}} - 1\right)\pi + c\frac{1}{8}(1-4h)\pi + d\frac{1}{16}(1-4h)\sqrt{1-4h}\pi.$$

因 $A(h)$ 可表示成四个线性无关函数 $hI_{-2}(h), I_{-1}(h), I_0(h), I_1(h)$ 关于四个独立参数 a, b, c, d 的线性组合, 所以有以下定理:

定理 1 系统 (1) 的 Poincaré 分支至少可以分支出三个极限环, 它们可以落在闭曲线 (2) 中的任意三条闭曲线的小邻域内.

证明 任意给定 $0 < h_1 < h_2 < h_3 < \frac{1}{4}$, 因 $hI_{-2}(h), I_{-1}(h), I_0(h), I_1(h)$, 在 $0 < h < \frac{1}{4}$ 内线性无关, 所以方程组

$$A(h_i) = ah_i I_{-2}(h_i) + bI_{-1}(h_i) + cI_0(h_i) + dI_1(h_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

存在非零解

$$a = \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}, \quad d = \bar{d}, \quad (3)$$

所以如果系统 (1) 的参数满足条件 (3), 则当 $0 < |u| < 1$ 时, 至少可分支出三个极限环, 它们分别落在三条闭曲线 $y(-y-x^2+1) = h_i (i=1, 2, 3, 0 < h_1 < h_2 < h_3 < \frac{1}{4})$ 的小邻域内. $\square$

在系统 (1) 中, $\mu = 0$ 对应的是抛物弓形, 由于 $h_i (i=1, 2, 3)$ 的任意性, 可取 $0 < h_1 < h_2 < h_3 \ll \frac{1}{4}$. 则当 $0 < |u| \ll h_1 < h_2 < h_3 \ll \frac{1}{4}$ 时, 系统 (1) 的 Poincaré 分支所分支出的极限环靠近抛物弓形, 所以这三个极限环可以看作是从系统 (1) 的中心环域边界的抛物弓形异宿轨所分支出的极限环. 即

推论 1 系统 (1) 可以从它的中心环域边界的抛物弓形异宿轨分支出三个极限环.

证明 略.

从以上推理看出, 系统 (1) 的 Poincaré 分支所能分支出具有位置任意性的极限环至多三个, 或从它的抛物弓形异宿轨至多只能分支出三个极限环, 那么是不是可以下结论说三次系统的 Poincaré 分支至多只能分支出具有位置任意性的三个极限环呢? 这不一定, 且看下面的例子:

3 抛物弓形内闭轨方程为 $\frac{(y-1)(y+x^2-4)}{-y} = h$ 时的情形

考虑以下三次系统

$$\begin{cases}
 \dot{x} = y^2 + x^2 - 4 + \mu(a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + \\
 \quad a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3), \\
 \dot{y} = 2xy(1-y) + \mu(b_0 + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + \\
 \quad b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3).
 \end{cases} \quad (4)$$

系统 (4) 当 $\mu = 0$ 时是可积系统, 但不是 Hamilton 系统, 当在系统 (4) 右边同以 $\frac{1}{y^2}$ 后, 得

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y^2 + x^2 - 4}{y^2} + \mu \left(\frac{a_0}{y^2} + \frac{a_{10}x}{y^2} + \frac{a_{01}}{y} + \frac{a_{20}x^2}{y^2} + \right. \\ \quad \left. \frac{a_{11}x}{y} + a_{02} + \frac{a_{30}x^3}{y^2} + \frac{a_{21}x^2}{y} + a_{12}x + a_{03}y \right), \\ \dot{y} = \frac{2x(1-y)}{y} + \mu \left(\frac{b_0}{y^2} + \frac{b_{10}x}{y^2} + \frac{b_{01}}{y} + \frac{b_{20}x^2}{y^2} + \frac{b_{11}x}{y} + \right. \\ \quad \left. b_{02} + \frac{b_{30}x^3}{y^2} + \frac{b_{21}x^2}{y} + b_{12}x + b_{03}y \right). \end{cases} \quad (5)$$

系统 (5) 当 $u = 0$ 时成为 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{(y-1)(y+x^2-4)}{-y} = h. \quad (6)$$

当 $h = 0$ 时, (6) 表示抛物弓形; 当 $h = 1$ 时, (6) 表示孤立点 $M(0, 2)$; 当 $0 < h < 1$ 时, (6) 表示抛物弓形内的闭轨族, 如图 2 所示

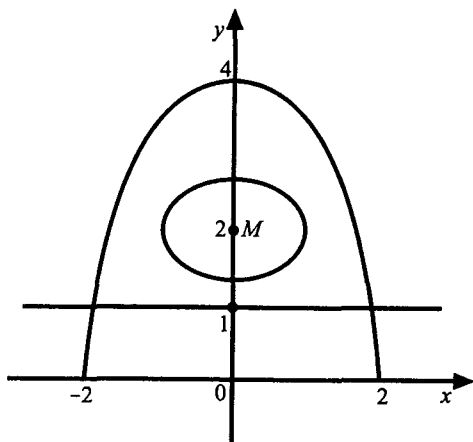


图 2 方程 (6) ($0 < h < 1$) 的图象

注意: 图 2 中抛物弓形的形状位置虽不同于图 1, 但通过非奇异线性变换总可以把图 2 中的抛物弓形变成与图 1 相一致. 我们这里之所以写成方程 (6), 只是为了计算 Abel 积分方便.

系统 (5) 所对应的 Abel 积分为

$$A(h) = \iint_{D(h)} \left[(a_{12} + b_{03}) + a_{11}\left(\frac{1}{y}\right) + (a_{10} - b_{01})\left(\frac{1}{y^2}\right) + (3a_{30} - b_{20})x^2\left(\frac{1}{y^2}\right) - \right. \\ \left. 2b_0\left(\frac{1}{y^3}\right) - 2b_{20}x^2\left(\frac{1}{y^3}\right) \right] dx dy.$$

其中 $D(h)$ 表示闭曲线 (6) ($0 < h < 1$) 所围区域. 与前段类似, 可将 $A(h)$ 化成:

$$\begin{aligned} A(h) &= 2 \int_{y_1}^{y_2} \left[(a + bh)\frac{1}{y} + (c + dh)\frac{1}{y^2} + e\frac{1}{y^3} + (f + gh)\frac{1}{1-y} + kh\frac{1}{(1-y)^2} \right] \cdot \\ &\quad \sqrt{(1-y)[y^2 + (h-5)y + 4]} \cdot dy \\ &= 2(a + bh)\varphi_{-1}(h) + (c + dh)\varphi_{-2}(h) + e\varphi_{-3}(h) + (f + gh)\psi_{-1}(h) + kh\psi_{-2}(h), \end{aligned} \quad (7)$$

这里 y_1 和 y_2 是方程 $y^2 + (h-5)y + 4 = 0$ 的两个根: $y_1 = \frac{1}{2}[5-h-\sqrt{(5-h)^2-16}]$, $y_2 = \frac{1}{2}[5-h+\sqrt{(5-h)^2-16}]$.

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \int_{y_1}^{y_2} y^n \sqrt{(1-y)(y-y_1)(y-y_2)} dy, \quad n = -1, -2, -3, \\ \psi_n(h) &= \int_{y_1}^{y_2} (1-y)^n \sqrt{(1-y)(y-y_1)(y-y_2)} dy, \quad n = -1, -2, \\ \begin{cases} a = 2b_0 + a_{10} - b_{01} + a_{11} + 5b_{20} + 3a_{30}, & b = \frac{11}{3}b_{20} + a_{30}, \\ c = 2b_0 + a_{10} - b_{01} + \frac{14}{3}b_{20} + 4a_{30}, & d = 2b_{20}, \\ e = 2b_0 + 8b_{20}, & f = 2b_0 + a_{10} - b_{01} + a_{11} + 5b_{20} + 3a_{30} + a_{12} + b_{03}, \\ g = \frac{11}{3}b_{20} + a_{30}, & k = \frac{5}{3}b_{20} + a_{30}. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

其实可以通过计算验证: (7) 式中的函数组

$$\varphi_{-1}(h), h\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h), h\varphi_{-2}(h), \varphi_{-3}(h), \psi_{-1}(h), h\psi_{-1}(h), \psi_{-2}(h)$$

在 $0 < h < 1$ 内是线性无关的. 但注意到 $g = b$, $k = b - d$, 所以 (7) 式中的八个参数 a, b, c, d, e, f, g, k 中只有六个是相互独立的, 所以 $A(h)$ 至多只能表示成六个线性无关函数关于六个独立参数的线性组合.

现在我们删去 (7) 式中参数 g 和 k 所对应的函数, 来计算函数

$$\varphi_{-1}(h), h\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h), h\varphi_{-2}(h), \varphi_{-3}(h), \psi_{-1}(h),$$

从而考察它们在 $0 < h < 1$ 内的线性无关性. 在这六个函数中, 最难计算的是 $\varphi_{-3}(h)$, 其实不是难而是繁. 为减少篇幅, 我们略去 $\varphi_{-3}(h)$, 即在 (7) 式中令 $e = 0$ 考虑当 $b_0 = -4b_{20}$ 时的特殊情形.

先来计算

$$\varphi_n(h) = \int_{y_1}^{y_2} y^n \sqrt{(1-y)(y-y_1)(y-y_2)} dy, \quad n = -1, -2,$$

设 $1-y = -t^2$ 得

$$\varphi_n(h) = 2t_1 t_2 \int_{t_1}^{t_2} t^2 (1+t^2)^n \sqrt{-(1-\frac{t^2}{t_1^2})(1-\frac{t^2}{t_2^2})} dt,$$

其中

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{y_1 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}[3-h-\sqrt{(5-h)^2-16}]}, \\ t_2 &= \sqrt{y_2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}[3-h+\sqrt{(5-h)^2-16}]}, \end{aligned}$$

再设 $t = t_2 \sqrt{1 - \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2} z^2}$, 得

$$\varphi_n(h) = \frac{2(t_2^2 - t_1^2)}{t_2} \int_0^1 \frac{z^2 (1-z^2) [t_2^2 - (t_2^2 - t_1^2) z^2] [(1+t_2^2) - (t_2^2 - t_1^2) z^2]^n}{\sqrt{(1-z^2)(1 - \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2} z^2)}} dz, \quad (9)$$

在 (9) 中, 令 $n = -1$, 得

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(h) &= \frac{2(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2} \int_0^1 \frac{z^2(1-z^2)[t_2^2 - (t_2^2 - t_1^2)z^2]}{[(1+t_2^2) - (t_2^2 - t_1^2)z^2]} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1 - \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2}z^2)}} \\ &= \frac{2(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2^2} [-I_2(h) + \frac{t_2^2 - t_1^2 - 1}{t_2^2 - t_1^2} I_1(h) - \frac{t_1^2 + 1}{(t_2^2 - t_1^2)^2} I_0(h) + \\ &\quad \frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{(t_2^2 - t_1^2)^2} H_1(h)],\end{aligned}\quad (10)$$

在 (9) 中, 令 $n = -2$, 得

$$\begin{aligned}\varphi_{-2}(h) &= \frac{2(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2} \int_0^1 \frac{z^2(1-z^2)[t_2^2 - (t_2^2 - t_1^2)z^2]}{[(1+t_2^2) - (t_2^2 - t_1^2)z^2]^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1 - \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2}z^2)}} \\ &= \frac{2(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2} [\frac{1}{t_2^2 - t_1^2} I_1(h) + \frac{t_1^2 + 2}{(t_2^2 - t_1^2)^2} I_0(h) - \frac{t_1^2 t_2^2 - 1}{(t_2^2 - t_1^2)^3} H_1(h) - \\ &\quad \frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{(t_2^2 - t_1^2)^3} H_2(h)],\end{aligned}\quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned}I_n(h) &= \int_0^1 \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad n = 0, 1, 2, \\ H_m(h) &= \int_0^1 \frac{dz}{(z^2 - a)^m \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad m = 1, 2, \\ k^2 &= \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2}, \quad a = \frac{1+t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}.\end{aligned}$$

再来计算

$$\psi_{-1}(h) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{1-y} \sqrt{(1-y)(y-y_1)(y-y_2)} dy.$$

方法同前, 设 $1-y = -t^2$, $t = t_2 \sqrt{1 - (\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2})z^2}$, 其中

$$t_1 = \sqrt{y_1 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}[3 - h - \sqrt{(5-h)^2 - 16}]},$$

$$t_2 = \sqrt{y_2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}[3 - h + \sqrt{(5-h)^2 - 16}]},$$

得

$$\begin{aligned}\psi_{-1}(h) &= -2 \frac{(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2} \int_0^1 \frac{z^2(1-z^2)}{\sqrt{(1-z^2)(1 - \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2}z^2)}} dz \\ &= \frac{2(t_2^2 - t_1^2)^2}{t_2} [I_2(h) - I_1(h)].\end{aligned}\quad (12)$$

注意在 (10),(11),(12) 式中的 $I_0(h)$, $I_1(h)$, $H_1(h)$ 的表达式分别为

$$I_0(h) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$I_1(h) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -\frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta + \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$H_1(h) = \int_0^1 \frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\sin^2\theta-a)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

这里 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\sin^2\theta-a)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ 分别称为第一、

二、三类椭圆积分, 它们之间不能互化. 所以 $I_0(h)$, $I_1(h)$ 和 $H_1(h)$ 之间也不能互化.

现在把 (10), (11), (12) 式中的 $I_2(h)$, $H_2(h)$ 分别用 $I_0(h)$, $I_1(h)$ 和 $H_1(h)$ 来表达.

根据文 [2], 对积分 $I_n(h)$ 有以下循环公式:

$$(2n-1)k^2 I_n(h) - (2n-2)(k^2+1)I_{n-1}(h) + (2n-3)I_{n-2}(h) = 0, \quad n \geq 2.$$

令 $n=2$, 得

$$I_2(h) = \frac{1}{3k^2} [2(k^2+1)I_1(h) - I_0(h)], \quad (13)$$

又根据文 [2], 对积分 H_m 有以下循环公式:

$$(2m-2)[-a+(k^2+1)a^2-3k^2a^3]H_m(h) - (2m-3)[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]H_{m-1}(h) + \\ (2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}(h) - (2m-5)k^2H_{m-3}(h) = 0, \quad -\infty < m < +\infty,$$

令 $m=2$, 得

$$H_2(h) = \frac{1}{2[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]} \{[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]H_1(h) - k^2H_{-1}(h)\}.$$

注意到 $H_{-1}(h) = \int_0^1 \frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1(h) - aI_0(h)$, 所以

$$H_2(h) = \frac{1}{2[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]} \{[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]H_1(h) - k^2I_1(h) + k^2aI_0(h)\}. \quad (14)$$

将 (13),(14) 代入 (10),(11),(12) 中, 得

$$\varphi_{-1}(h) = \frac{2(t_2^2-t_1^2)^2}{t_2} \left\{ -\frac{1+t_2^2}{t_2^2-t_1^2} I_1(h) + \left[\frac{t_2^2}{3(t_2^2-t_1^2)} - \frac{t_1^2+1}{(t_2^2-t_1^2)^2} \right] I_0(h) + \frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{(t_2^2-t_1^2)^2} H_1(h) \right\} \\ \varphi_{-2}(h) = \frac{2(t_2^2-t_1^2)^2}{t_2} \left\{ \left[\frac{1}{t_2^2-t_1^2} + \frac{k^2(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{2(t_2^2-t_1^2)^2[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]} \right] I_1(h) + \right. \\ \left. \left[\frac{t_1^2+2}{t_2^2-t_1^2} - \frac{k^2a(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{2(t_2^2-t_1^2)^2[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]} \right] I_0(h) + \right. \\ \left. \left[-\frac{t_1^2t_2^2-1}{(t_2^2-t_1^2)^2} - \frac{3(1+t_1^2)[1-2a(k^2+1)+k^2a^2]}{2(t_2^2-t_1^2)^2[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]} \right] H_1(h) \right\}, \\ \psi_{-1}(h) = \frac{2(t_2^2-t_1^2)^2}{t_2} \left\{ \left[\frac{2(k^2+1)}{3k^2} - 1 \right] I_1(h) - \frac{1}{3k^2} I_0(h) \right\}.$$

在 $\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h), \psi_{-1}(h)$ 的表达式中的 k 和 a 都可用 t_1 和 t_2 的代数式表达; 而 t_1 和 t_2 又都可用 h 的代数表达式表达. 但真正要把它都化为 h 的表达式, 其形式相当复杂. 实际上也没有这个必要, 因为我们已经不难看出 $\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h)$ 和 $\psi_{-1}(h)$ 是线性无关的了. 所以有以下引理:

引理 1 设 $F_1(h), F_2(h), \dots, F_n(h)$ 线性无关, 且此函数组的任意两个不同的线性组合之商都不会出现因子 h , 则对于任何整数 m , 函数组

$$F_1(h), F_2(h), \dots, F_n(h), hF_1(h), hF_2(h), \dots, hF_n(h), \dots, h^m F_1(h), \dots, h^m F_n(h) \quad (15)$$

也必线性无关.

证明 如果函数组 (15) 线性相关, 则必存在非零常数组 $a_i^j (j = 0, 1, 2, m; i = 1, 2, \dots, n)$, 使得以下恒等式成立:

$$[a_1^0 F_1(h) + a_2^0 F_2(h) + \dots + a_n^0 F_n(h) + a_1^1 h F_1(h) + a_2^1 h F_2(h) + \dots + a_n^1 h F_n(h)] + \dots + [a_1^m h^m F_1(h) + a_2^m h^m F_2(h) + \dots + a_n^m h^m F_n(h)] \equiv 0. \quad (16)$$

不失一般性, 不妨设 (16) 式左端第一个中括号内的常数 $a_i^0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 不全为零. 由于函数组 $F_i(h) (i = 1, 2, \dots, n)$ 线性无关, 所以第一个中括号内的函数不恒等于零. 又因为函数组 $F_i(h) (i = 1, 2, \dots, n)$ 的任意两个不同的线性组合之商都不会出现因子 h , 所以 (16) 式中第一个中括号内的函数也决不可能被 (16) 式中其它中括号内的函数所消掉. 这与 (16) 式是恒等式的结论相矛盾. $\square$

根据 $g = b, k = b - d$, 将 (7) 式写成

$$\begin{aligned} A(h) &= a\varphi_{-1}(h) + b[h\varphi_{-1}(h) + h\psi_{-1}(h) + h\psi_{-2}(h)] + c\varphi_{-2}(h) + \\ &\quad d[h\varphi_{-2}(h) + h\psi_{-2}(h)] + f\psi_{-1}(h) + e\varphi_{-3}(h) \\ &\triangleq aF_1(h) + bF_2(h) + cF_3(h) + dF_4(h) + fF_5(h) + eF_6(h), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 a, b, c, d, f, e 的表达式已在 (8) 中给出, 它们是相互独立的六个参数. 因 $\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h), \psi_{-1}(h)$ 满足引理 1 的条件, 所以函数组 $\varphi_{-1}(h), h\varphi_{-1}(h), \varphi_{-2}(h), h\varphi_{-2}(h), \psi_{-1}(h)$ 也线性无关. 从而 $F_1(h), F_2(h), \dots, F_5(h)$ 这五个函数也必线性无关. 所以当 $e = 0$ 时, $A(h)$ 可表示为五个线性无关函数关于五个独立参数的线性组合, 从而可推知三次系统 (4) 在 $e = 2b_0 + 8b_{20} = 0$ 的特殊情况下, 其 Poincaré 分支就已经可以分支出具有位置任意性的四个极限环了. 其实系统 (4) 是可以分支出具有位置任意性的五个极限环的, 只是我们嫌 $\varphi_{-3}(h)$ 计算太繁, 只考虑 $e = 0$ 的特殊情形, 把 $\varphi_{-3}(h)$ 的计算略去了.

4 结论

从以上所讨论的系统 (1) 和系统 (4) 的 Poincaré 分支可以看出, 虽然他们同样都是三次系统的以抛物弓形为边界的周期环域, 但是他们所能分支出的极限环的个数是不同的. 系统 (1) 可分支出三个极限环, 而系统 (4) 实际上是可以分支出五个极限环的. 那末我们还能不能给出一些其它形状的以抛物弓形为边界的周期环域的三次系统的 Poincaré 分支, 使它可以分支出更多个数的极限环呢? 比如当抛物线弓形内闭轨方程为 $\frac{(y-1)(y+x^2-4)}{-y^2} = h$ 时, 结果又将会如何? 它所

对应的 Abel 积分也是可以表示成三类椭圆积分的形状的. 限于篇幅, 我们将另文探讨. 这里我们指出, 本文的大量篇幅是花在对积分 $\varphi_{-1}(h)$, $\varphi_{-2}(h)$ 和 $\psi_{-1}(h)$ 等的计算上, 计算的目的并不在于得到它们的精确表达式, 而是在于考察这些函数的线性无关性. 考虑到 Abel 积分计算的复杂性, 于是我们提出这样的问题: 能否不通过对 Abel 积分的计算, 就能判断出它们的线性无关性? 这个问题的解决必将为多项式系统的弱 Hilbert 第 16 问题开创出一个新的研究途径.

参考文献:

- [1] 张芷芬, 李承治, 郑治明, 等. 向量场的分岔理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997, 98-104.
ZHANG Zhi-fen, LI Cheng-zhi, ZHENG Zhi-ming, et al. *The Basic of Bifurcation Theory for Vector Fields* [M]. Beijing: China Higher Education Press, 1997, 98-104.
- [2] 格·马·菲赫金格尔茨. 微积分教程, 第二卷第一分册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1956, 79-84.
Ф и х т е г о л б д . Г М . *The Course of Differential-Integral Calculus* [M]. Beijing: China Higher Education Press, 1956, 79-84.
- [3] LI Ji-bin, CHAN H S Y, CHUNG K W. Bifurcations of limit cycles in a Z_6 -equivariant planar vector field of degree 5 [J]. *Sci. China Ser. A*, 2002, 45(7): 817-826.
- [4] LIU Zheng-rong, YANG Zhi-yan, JIANG Tao. The same distribution of limit cycles in five perturbed cubic Hamiltonian systems [J]. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2003, 13(1): 243-249.
- [5] LI Ji-bin, CHAN H S Y, CHUNG K W. Investigations of bifurcations of limit cycles in a Z_2 -equivariant planar vector field of degree 5 [J]. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2002, 12(10): 2137-2157.
- [6] CHAN H S Y, CHUNG K W, LI Ji-bin. Bifurcations of limit cycles in a Z_3 -equivariant planar vector field of degree 5 [J]. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2001, 11(8): 2287-2298.
- [7] LI Ji-bin. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields [J]. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2003, 13(1): 47-106.

Poincaré Bifurcation of a Cubic System with Parabolic Arch Boundary and Periodic Ring

TAN Xin-xin¹, SHEN Bo-qian²

(1. College of Information Engineering, Dalian University, Liaoning 116622, China;

2. Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract: By specific examples, we show that Poincaré' bifurcation of a polynomial system, being of period annulus with the same degree and the same boundary, can produce different number of limit cycles because of different closed orbits in period annulus. Thus, a new approach is created for the study of weakened Hilbert's 16th problem of polynomial system.

Key words: Parabolic Arch; Poincaré bifurcation; limit cycle; Abelian integral; cubic Hamiltonian system.