第25卷第3期 数学研究与评论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0511-04 文献标识码: A

多项式的 B- 网结式及应用

赖义生[1], 王仁宏[2]

(1. 浙江工商大学统计与计算科学学院, 浙江 杭州 310035; 2. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)
(E-mail: laiyisheng@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文定义了多项式的 B- 网结式, 讨论了 B- 网结式的性质和 B- 网结式与非线性方程组的解之间的关系.

关键词: 多项式的 B- 网结式; 非线性方程组的解.
MSC(2000): 12Y05, 30C15, 14Q99
中图分类: O241, O187

1 引 言

在仿射 (射影) 坐标系下, 多项式的结式在代数学中占有非常重要的地位, 特别是在非线性方程组的求解中起着重要的作用 [1-4]. 由于多项式在单纯形上可表示成 B- 网形式 [5,6], 因此, 讨论多项式的 B- 网结式是非常重要的.

本文定义了多项式的 B- 网结式, 讨论了 B- 网结式的性质和 B- 网结式与方程组的解之间的关系.

2 B- 网结式

设 R 表示实数域, $X=(x_1,\cdots,x_n)$, $R[X]$ 是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变元的数域 R 上的多项式环. 设 Δ_n 是 R^n 中的一个 n 维单纯形, $v_0,v_1,\cdots,v_n$ 是 Δ_n 的顶点. 则 R^n 中任一点 X 都可表示成

$$X=w_0v_0+w_1v_1+\cdots+w_nv_n, \tag{2.1}$$

其中 $w_0+w_1+\cdots+w_n=1$. 称 $w=(w_0,w_1,\cdots,w_n)$ 为点 X 关于 Δ_n 的重心坐标.

众所周知: $R[X]$ 中任一 d 次多项式 $f(X)$ 在 Δ_n 上都可表示成

$$f(X)=F(w_0,w_1,\cdots,w_n)=\sum_{|\lambda|=d} b_\lambda w^\lambda, \tag{2.2}$$

$$w_0+w_1+\cdots+w_n=1,$$

其中 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_i\in\{0,1,\cdots,d\}$, $w^\lambda=w_0^{\lambda_0}w_1^{\lambda_1}\cdots w_n^{\lambda_n}$, $|\lambda|=\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n$, $b_\lambda=P_\lambda\frac{d!}{\lambda_0!\lambda_1!\cdots\lambda_n!}$. 我们称 $F(w)=F(w_0,w_1,\cdots,w_n)$ 为 $f(X)$ 的 B- 网多项式 [5,6]. 假设

收稿日期: 2003-07-01
基金项目: 国家自然科学基金 (102710222), 浙江省高校青年教师资助计划.

$F_1(w),\cdots,F_{n+1}(w)$ 分别为 $f_1(X),\cdots,f_{n+1}(X)\in R[X]$ 的 B- 网多项式，并且每一个 B- 网多项式 $F_i=\sum_{|\lambda|=d_i}b_{i,\lambda}w^{\lambda}(i=1,\cdots,n+1)$ 的次数 $d_i>0$. 则方程组

$$f_1(X)=f_2(X)=\cdots=f_{n+1}(X)=0 \tag{2.3}$$

转化成方程组

$$\begin{cases} F_1(w)=F_2(w)=\cdots=F_{n+1}(w)=0, \\ w_0+w_1+\cdots+w_n=1. \end{cases} \tag{2.4}$$

若把每个 B- 网多项式 F_i 看成具有 $n+1$ 个变元且次数为 d_i 的齐次多项式，则得到由 $n+1$ 个齐次方程组成的齐次方程组:

$$F_1(w)=F_2(w)=\cdots=F_{n+1}(w)=0. \tag{2.5}$$

定义 2.1 设 $F_1(w),\cdots,F_{n+1}(w)$ 分别是次数为正的多项式 $f_1(X),\cdots,f_{n+1}(X)\in R[X]$ 的 B- 网多项式，称 $n+1$ 个齐次多项式 $F_1,\cdots,F_{n+1}$ 的结式 $\mathrm{Res}(F_1,\cdots,F_{n+1})$ 为多项式 $f_1(X),\cdots,f_{n+1}(X)$ 的 B- 网结式，记作 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})$, 即 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})=\mathrm{Res}(F_1,\cdots,F_{n+1})$.

显然，方程组 (2.4) 的任何一个解都是齐次方程组 (2.5) 的一个非平凡解，而齐次方程组 (2.5) 的任何一个不在超平面 $F_0=w_0+w_1+\cdots+w_n=0$ 上的非平凡解 $(w_0,w_1,\cdots,w_n)$ 都唯一对应方程组 (2.4) 的一个解 $\left(\frac{w_0}{\sum_{i=0}^{n}w_i},\frac{w_1}{\sum_{i=0}^{n}w_i},\cdots,\frac{w_n}{\sum_{i=0}^{n}w_i}\right)$. 因此我们有

定理 2.1 假设 $F_1(w),\cdots,F_{n+1}(w)$ 分别是次数为正的多项式 $f_1(X),\cdots,f_{n+1}(X)$ 的 B- 网多项式，那么

(1) 若方程组 (2.3) 有解，则 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})=0$;

(2) 若 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})=0$, 且存在某个 i 使 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{i-1},f_i+1,f_{i+1},\cdots,f_{n+1})\neq 0$, 则方程组 (2.3) 有解.

证明 (1) 方程组 (2.3) 有解，则方程组 (2.4) 有解，因而方程组 (2.5) 有非平凡解，故 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})=0$.

(2) 设 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n+1})=0$, 则齐次方程组 (2.5) 有非平凡解 [3], 设为 $w'=(w_0,w_1,\cdots,w_n)$. 因为 $f_1(X),\cdots,f_i(X)+1,\cdots,f_{n+1}(X)$ 的 B- 网多项式分别是 $F_1(w),\cdots,F_i(w)+(w_0+w_1+\cdots+w_n)^{d_i},\cdots,F_{n+1}(X)$, 且 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{i+1},\cdots,f_{n+1})\neq 0$, 所以齐次方程组

$$F_1(w)=\cdots=F_i(w)+(w_0+w_1+\cdots+w_n)^{d_i}=\cdots=F_{n+1}(X)=0 \tag{2.6}$$

只有零解. 因而 w' 必不落在超平面 $F_0=w_0+w_1+\cdots+w_n=0$ 上，故方程组 (2.3) 有解.

3 B- 网结式与方程组的解

假设 $F_1(w),\cdots,F_n(w)$ 分别是多项式 $f_1(X),\cdots,f_n(X)\in R[X]$ 的 B- 网多项式，其中 $F_i=\sum_{|\lambda|=d_i}b_{i,\lambda}w^{\lambda}(i=1,\cdots,n)$. 则求解方程组

$$f_1(X)=\cdots=f_n(X)=0 \tag{3.1}$$

等价于求解方程组

$$\begin{cases} F_1(w)=\cdots=F_n(w)=0, \\ w_0+w_1+\cdots+w_n=1. \end{cases} \tag{3.2}$$

下面我们仅考虑方程组 (3.2) 的无挠零点问题.

定理 3.1 假设多项式 $f_1(X),\cdots,f_n(X)\in R[X]$ 的次数分别为 $d_1,\cdots,d_n>0$. 又设 $G_i=w_i-k_iw_0$, 其中 k_i 是参数，且 G_i 是多项式 $g_i(X)\in R[X]$ 的 B- 网多项式， $i=1,\cdots,n$. 则 $BRes(f_1,\cdots,f_n,g_i)$ 是关于 k_i 的一元 $\prod_{i=1}^n d_i$ 次多项式，且方程组 (3.2) 的任一无挠零点 $w'=(w_0',\cdots,w_n')$ 的分量坐标 w_i' 与 w_0' 的比值 $\frac{w_i'}{w_0'}$ 都是这个多项式的根.

证明 把参数 k_i 看成常数，则

$$B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_n,g_i)=\mathrm{Res}(F_1,\cdots,F_n,G_i),$$

故 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_n,g_i)$ 是关于 k_i 的一元 $\prod_{i=1}^n d_i$ 次多项式 [2-4]. 设 $w'=(w_0',\cdots,w_n')$ 是方程组 (3.2) 的一个无挠零点. 则方程组

$$\begin{cases} F_1(w)=\cdots=F_n(w)=0,\\ G_i=w_i-k_i'w_0=0\end{cases}$$

有非平凡解，其中 $k_i'=\frac{w_i'}{w_0'}$. 因而 k_i' 使得 $\mathrm{Res}(F_1,\cdots,F_n.G_i)=0$, 即 k_i' 是 $B\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_n,g_i)$ 的一个根.

从方程组 (3.2) 可知，设 $w_i=k_iw_0, i=1,\cdots,n$. 则求方程组 (3.1) 在单纯形 Δ_n 内部的零点问题就转化成求方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\lambda|=d_1} b_{1,\lambda}k^{\lambda_1}\cdots k^{\lambda_n}=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \sum\limits_{|\lambda|=d_n} b_{n,\lambda}k^{\lambda_1}\cdots k_n^{\lambda}=0\end{cases} \tag{3.3}$$

在 R^{n^+} 中的正根，反之亦然. 因为方程组 (3.3) 的每一个正根 $k'=(k_1',\cdots,k_n')$ 与方程组 (3.2) 在 Δ_n 内的零点之间存在一一对应关系. 即

$$k'=(k_1',\cdots,k_n')\leftrightarrow w'=\left(\frac{1}{1+\sum_{i=1}^n k_i'},\frac{k_1'}{1+\sum_{i=1}^n k_i'},\cdots,\frac{k_n'}{1+\sum_{i=1}^n k_i'}\right). \tag{3.4}$$

根据定理 3.1, k_i' 是一元多项式 $B\mathrm{Res}(f_1\cdots f_n,g_i)$ 的一个正根. 因此, 我们只要求出 $B\mathrm{Res}(f_1\cdots f_n,g_i)$ 的所有正根，再代入方程组 (3.3), 以便求解其他未知数.

例 求代数曲线 $f_1=16x^2-3xy-16y^2-50x+100y-100$ 与 $f_2=4x^2+9xy+17y^2-40x-720y+200$ 在三角形 $\Delta_2=[(0,0),(-2,4),(4,2)]$ 内的交点. f_1 与 f_2 对应的 B- 网多项式分别为

$$\begin{aligned} F_1&=2w_1^2-2w_1w_2+w_2^2+3w_0w_1-2w_0w_2-w_0^2,\\ F_2&=w_1w_2-2w_0^2,\end{aligned} \tag{3.5}$$

故 $B\mathrm{Res}(f_1,f_2,g_1)=(k_1+2)(k_1-1)(k_1-\frac{\sqrt{17}-1}{4})(k_1+\frac{\sqrt{17}+1}{4})$. 把一元多项式 $B\mathrm{Res}(f_1,f_2,g_1)$ 的两个正根 $k_1^{(1)}=1, k_1^{(2)}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ 分别代入方程组

$$\begin{cases} k_1k_2=2\\ 2k_1^2-2k^1k_2+k_2^2+3k_1-2k_2-1=0\end{cases} \tag{3.6}$$

得 $k_1^{(1)} = 2, k_2^{(2)} = \frac{\sqrt{17}+1}{2}$. 因此代数曲线 $f_1 = 0$ 与 $f_2 = 0$ 在 Δ 的交点为 $w^{(1)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}), w^{(2)} = (\frac{3\sqrt{17}-5}{32}, \frac{14-2\sqrt{17}}{32}, \frac{23-\sqrt{17}}{32})$.

参考文献:

[1] STURMFELS B. *On the Newton polytope of the resultant* [J]. J. Algebraic Combin., 1994, **3**: 207–236.
[2] STURMFELS B, ZELEVINSKY A. *Multigraded resultants of sylvester type* [J]. J. Algebra, 1994, **163**: 115–127.
[3] COX D, LITTLE J, O'SHEA D. *Using Algebraic Geometry* [M]. Springer, 1998.
[4] PEDERSEN P, STURMFELS B. *Product formulas for sparse resultants and chow forms* [J]. Math. Z., 1993, **214**: 377–396.
[5] WANG Ren-hong. *Multivariate spline and algebraic geometry* [J]. J. Comput. Appl. Math., 2000, **121**: 153–163.
[6] WANG Ren-hong, LAI Yi-sheng. *Real piecewise algebraic variety* [J]. J. Comput. Math., 2003, **21**(4): 473–480.

B-net Resultant of Polynomials and Its Application

LAI Yi-sheng[1], *WANG Ren-hong*[2]

(1. College of Statistics and Computer Science, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310035, China;
2. Dept. of Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: The B-net resultant of polynomials is defined, and its properties and the relations between it and the solutions of a system of nonlinear equations are discussed.

Key words: B-net resultant of polynomials; the solutions of a system of nonlinear equations.