第25卷第3期 数学研究与评论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

**文章编号**: 1000-341X(2005)03-0531-07 **文献标识码**: A

# 光滑 Banach 空间上扩张值函数的 Frechet 次微分

吴从炘[1], 杨富春[1,2]
(1. 哈尔滨工业大学理学院数学系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 云南大学数理学院数学系, 云南 昆明 650091)
(E-mail: fchyang@ynu.edu.cn)

**摘 要**: 首先证明了 Frechet 光滑 Banach 空间上齐次函数的次微分的一个有用定理, 然后利用下半连续函数和的次微分规则把 Clarke-Ledyaev 多方向中值不等式推广到多个函数的情形.

**关键词**: 次微分; 光滑空间; 解耦下确界; 法向锥; 多方向中值不等式.
**MSC(2000)**: 46G05, 49K15
**中图分类**: O177.92

## 1 引 言

近年来, 非光滑函数的次微分理论在控制论, 数学规划等领域中获得了广泛的应用 [1,2]. 同时, 由于应用问题的需要, 又促使次微分理论的研究向 Banach 空间扩展. 例如, 文 [3] 所考虑的源于控制论的问题就导致了在光滑 Banach 空间中求解的最优化问题. 在这些研究中函数和的次微分及多方向中值不等式发挥了重要的作用. 本文研究 Frechet 光滑 Banach 空间上定义的扩张值下半连续的 Frechet 次微分, 获得了一个重要结果. 并利用函数和的 Frechet 次微分规则把 Clarke-Ledyaev 多方向中值不等式 [4] 推广到多个函数的情形.

## 2 预备知识

设 $X$ 是实 Banach 空间, $X^*$ 为其共轭空间. 对 $S\subset X$, 用 $\mathrm{diam}S:=\sup\{\|x-y\|:x,y\in S\}$ 表示集 $S$ 的直径. 用 $i_S$ 表示集的指标函数, 即当 $x\in S$ 时, $i_S(x)=0$; 当 $x\notin S$ 时, $i_S(x)=+\infty$. 函数 $f:X\to\overline{R}=R\cup\{+\infty\}$ 称为在 $x\in\mathrm{Dom}(f):=\{x\in X:f(x)\in R\}$ 是 Frechet 可微的, 如果存在 $x^*\in X^*$ 使得对任何 $h\in X$, 极限

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-\langle x^*,h\rangle|}{\|h\|}=0$$

成立, 并称 $x^*$ 为 $f$ 在 $x$ 处的 Frecher 导数, 常将 $x^*$ 记为 $f'(x)$. 如果 $f':X\to X^*$ 是范数连续的, 则称 $f$ 是 $C^1$ 类的, 如果 Banach 空间 $X$ 上有等价的 $C^1$ 类 (在每个 $x\neq 0$ 处) 范数, 则称空间 $X$ 是 Frechet 光滑的.

设 $f_i:X\to\overline{R}, i=1,2,\cdots,I, S$ 是 $X$ 的子集. 定义 $f_1,\cdots,f_I$ 在 $S$ 上的解耦下确界为

$$\wedge[f_1,\cdots,f_I](S):=\liminf_{\eta\to 0}\{i_S(x_0)+\sum_{i=1}^{I}f_i(x_i):\mathrm{diam}(x_0,x_1,\cdots,x_I)\leq\eta\}.$$

**收稿日期**: 2003-04-21
**基金项目**: 云南省教育厅科研基金 (02ZD023) 和云南大学科研基金 (2004Z009C).

**定义 2.1** 设 $X$ 是 Frechet 光滑的 Banach 空间，$f: X \to \overline{R}$ 是下半连续函数，$x \in \mathrm{Dom}(f)$，称 $f$ 在 $x$ 处是 Frechet 次可微的，如果存在 $x^* \in X^*$ 及存在一个 $C^1$ 类函数 $g$ 满足 $g'(x) = x^*$，且 $f-g$ 在 $x$ 处取局部极小值. $x^*$ 称为 $f$ 在 $x$ 处的 Frechet 次导数，$f$ 在 $x$ 处的所有 Frechet 次导数所成之集记为 $\partial_F f(x)$，称其为 $f$ 在 $x$ 处的 Frechet 次微分.

**定义 2.2** 称 $\varphi: X \to \overline{R}$ 是 $p(p \geq 0)$ 齐次 (或绝对齐次) 函数，如果 $\varphi$ 满足:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^p \varphi(x), \quad \lambda \in [0, +\infty), \quad \forall x \in X.$$

$$\varphi(\lambda x) = |\lambda|^p \varphi(x), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad \forall x \in X.$$

**定义 2.3** 设 $\varphi_p: X^1 \to \overline{R}$ 是 $p(p \geq 0)$ 齐次 (或绝对齐次) 函数，且 $(x_1^0, \cdots, x_I^0) \in \mathrm{dom}(\varphi_p)$，如果 $\varphi_p(x_1^0 + x, \cdots, x_1^0 + x) = \varphi_p(x_1^0, \cdots, x_I^0)$, $\forall x \in X$，则称 $\varphi_p$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_I^0)$ 处沿对角线方向是平移不变的.

**例** 设 $\varphi_p(x_1, \cdots, x_I) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \|x_i - x_j\|^p, p \geq 0$，则 $\varphi_p$ 是绝对齐次函数且在每个点 $(x_1, \cdots, x_I) \in X$ 处都是沿对角线方向平移不变的.

在下面的讨论中，我们还要用到如下两个结论:

**定理 2.4**[1] 设 $X$ 是 Frechet 光滑的 Banach 空间，$f_1, \cdots, f_I: X \to \overline{R}$ 是下半连续的下有界函数，且 $\wedge[f_1, \cdots, f_I](x) < +\infty$. 则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $x_i \in X$ 和 $x_i^* \in \partial_F f_i(x_i), i = 1, \cdots, I$，满足

$$\mathrm{diam}(x_1, \cdots, x_I) \cdot \max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_I^*\|) < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^I f_i(x_i) < \wedge[f_1, \cdots, f_I](x) + \varepsilon, \tag{2}$$

$$\|\sum_{i=1}^I x_i^*\| < \varepsilon. \tag{3}$$

**命题 2.5**[1] 设 $X$ 是 Frechet 光滑的 Banach 空间，$f: X \to \overline{R}$ 是下半连续函数，则 $x^* \in \partial_F f(x)$ 当且仅当

$$\liminf_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle}{\|h\|} \geq 0.$$

## 3 主要结论及证明

**定理 3.1** 设 $X$ 为 Frechet 光滑的 Banach 空间，$\varphi_p: X^1 \to \overline{R}$ 是下半连续的 $p(p \geq 0)$ 次齐次函数，且 $(x_1^0, \cdots, x_I^0) \in \mathrm{dom}(\varphi_p)$. 那么

(i) 对任何 $x_1^*, \cdots, x_I^*) \in \partial_F \varphi_p(x_1^0, \cdots, x_I^0)$，有

$$\sum_{i=1}^I \langle x_i^*, x_i^0 \rangle = p\varphi_p(x_1^0, \cdots, x_i^0); \tag{4}$$

(ii) 如果 $\varphi$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_I^0)$ 处沿对角线方向是平移不变的，则对任何 $(x_1^*, \cdots, x_I^*) \in \partial_F \varphi_p(x_1^0, \cdots, x_I^0)$，都有

$$\sum_{i=1}^I x_i^* = 0, \tag{5}$$

其中乘积空间 $X^I$ 赋予范数 $\|(x_1,\cdots,x_I)\|=\sum_{i=1}^I\|x_i\|$.

**证明** (i) 设 $(x_1^*,\cdots,x_I^*)\in\partial_F\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)$, 则由命题 2.5, 对任何非零向量 $(h_1,\cdots,h_I)\in X^1$, 有

$$\liminf_{\|(h_1,\cdots,h_I)\|\to 0}\frac{\varphi_p(x_I^0+h_1,\cdots,x_I^0+h_I)-\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)-\langle(x_1^*,\cdots,x_I^*),(h_1,\cdots,h_I)\rangle}{\|(h_1,\cdots,h_I)\|}\geq 0.$$

特别，当 $h_i=tx_i^0,i=1,\cdots,I,t>0$, 且 $x_i^0$ 不全为 0 时， $\|(h_1,\cdots,h_I)\|\to 0$ 等价于 $t\to 0^+$, 于是有

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{\varphi_p((1+t)x_1^0,\cdots,(1+t)x_I^0)-\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)-\langle(x_1^*,\cdots,x_I^*),(tx_1^0,\cdots,tx_I^0)\rangle}{t\|(x_1^0,\cdots,x_I^0)\|}\geq 0,$$

所以 $\frac{\langle(x_1^*,\cdots,x_I^*),(x_1^0,\cdots,x_I^0)\rangle}{\|(x_1^0,\cdots,x_I^0)\|}\leq\liminf_{t\to 0^+}\frac{[(1+t)^p-1]\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)}{t\|(x_1^0,\cdots,x_I^0)\|}$, 从而

$$\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,x_i^0\rangle\leq p\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0).$$

在上述过程中把 $t$ 换为 $-t$, 且不妨设 $1-t>0$, 则又有

$$\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,x_i^0\rangle\geq p\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0),$$

所以

$$\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,x_i^0\rangle=p\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0).\tag{6}$$

若 $x_i^0=0,i=1,\cdots,I$, 则 (6) 式显然成立.

(ii) 设 $(x_1^*,\cdots,x_I^*)\in\partial_F\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)$, 只要证 $\|\sum_{i=1}^I x_i^*\|=0.\forall x\in X$, 由于

$$\langle\sum_{i=1}^I x_i^*,x\rangle=\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,x\rangle=\langle(x_1^*,\cdots,x_I^*),(x,\cdots,x)\rangle,$$

由命题 2.5 及 $\varphi$ 的平移不变性，得

$$\begin{aligned}0\leq&\liminf_{\|(x,\cdots,x)\|\to 0}\frac{\varphi_p(x_1^0+x,\cdots,x_I^0+x)-\varphi_p(x_1^0,\cdots,x_I^0)-\langle(x_1^*,\cdots,x_I^*),(x,\cdots,x)\rangle}{\|x,\cdots,x)\|}\\=&\liminf_{\|(x,\cdots,x)\|\to 0}\frac{-\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,x\rangle}{I\|x\|}=-\frac{1}{I}\limsup_{\|x\|\to 0}\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,\frac{x}{\|x\|}\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$\limsup_{\|x\|\to 0}\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,\frac{x}{\|x\|}\rangle\leq 0.\tag{7}$$

在上述过程中，用 $-x$ 换 $x$ 又有

$$\liminf_{\|x\|\to 0}\sum_{i=1}^I\langle x_i^*,\frac{x}{\|x\|}\rangle\geq 0,\tag{8}$$

故有

$$\lim_{\|x\|\to 0}\sum_{i=1}^{I}\langle x_i^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle = 0. \tag{9}$$

又因为 $\lim_{\|x\|\to 0}\sum_{i=1}^{I}\langle x_i^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle = \lim_{\|x\|\to 0}\langle\sum_{i=1}^{I} x_i^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle = 0$, 即 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 当 $0 < \|y\| \le \delta$ 时,

$$\langle\sum_{i=1}^{I} x_i^*, \frac{y}{\|y\|}\rangle \le \varepsilon. \tag{10}$$

又当 $\|y\| > \delta$ 时, 取 $0 < k \le \frac{\delta}{\|y\|}$, 并令 $u = ky$, 则 $\|u\| \le \delta$, 于是有

$$\langle\sum_{i=1}^{I} x_i^*, \frac{y}{\|y\|}\rangle = \langle\sum_{i=1}^{I} x_i^*, \frac{ku}{\|ku\|}\rangle = \langle\sum_{i=1}^{I} x_i^*, \frac{u}{\|u\|}\rangle \le \varepsilon. \tag{11}$$

由 (10), (11) 知 $\|\sum_{i=1}^{I} x_i^*\| \le \sup_{\|x\|=1}\sum_{i=1}^{I}\langle x_i^*, x\rangle \le \varepsilon$. 所以

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = 0. \tag{12}$$

由定理 3.1, 我们很容易得到下面的推论.

**推论 3.2**[1] 设 $\varphi_p(x_1, \cdots, x_I) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\|x_i - x_j\|^p, p \ge 0, (x_1^0, \cdots, x_I^0) \in \mathrm{dom}(\varphi_p)$, 则对任何 $(x_1^*, \cdots, x_I^*) \in \partial_F\varphi_p(x_1, \cdots, x_I)$, 有

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = 0.$$

此外, 当 $p = 1$ 且 $\varphi_1(x_1, \cdots, x_I) > 0$ 时, 有

$$\max\{\|x_i^*\| : i = 1, \cdots, I\} \ge 1. \tag{13}$$

**证明** 只要证明 (13) 式, 当 $p = 1$ 且 $\varphi_1(x_1, \cdots, x_I) > 0$ 时, 由 (6) 式知

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, \cdots, x_I) &= \sum_{i=1}^{I}\langle x_i^*, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{I-1}\langle x_i^*, x_i - x_I\rangle \\ &\le \max\{\|x_i^*\| : i = 1, \cdots, I\}\varphi_1(x_1, \cdots, x_I).\end{aligned}$$

所以

$$\max\{\|x_i^*\| : i = 1, \cdots, I\} \ge 1.$$

**定理 3.3** 设 $X$ 是 Frechet 光滑的 Banach 空间, $S$ 是 $X$ 的非空闭凸子集, $f_1, \cdots, f_I : X \to \overline{R}$ 是下半连续函数, 且 $\wedge[f_1, \cdots, f_I](S) < +\infty, x \in \cap_{i=1}^{I}\mathrm{dom}(f_i)$. 并设对某个 $h > 0, f_i$ 在 $B_h([x, S])$ 上是下有界的, 其中 $[x, S] := co(\{x\} \cup S), B_h([x, S]) := \{z \in X : d_{[x,S]}(z) := \inf_{y\in[x,S]}\|y - z\| \le h\}$. 如果

$$\lim_{\delta\to 0}\inf_{y_1, \cdots, y_I \subset B_\delta(S)}\sum_{i=1}^{I} f_i(y_i) - (\sum_{i=1}^{I} f_i)(x) > r, \quad r \in R,$$

则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $z_1, \cdots, z_I \in B_\varepsilon([x,S])$ 和 $z_i^* \in \partial_F f_i(z_i), i = 1, \cdots, I$, 满足:

$$\sum_{i=1}^{I} f(z_i) < \wedge[f_1, \cdots, f_I]([x,S]) + |r| + \varepsilon,$$

$$r < \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^*, y - x \rangle + \varepsilon \|y - x\|, \quad \forall y \in S.$$

**证明** 我们分两步证明:

(1°) 当 $r = 0$ 时, 令 $\bar{f}_i := f_i + i_{B_h([x,S])}, i = 1, \cdots, I$. 则每个 $\bar{f}_i$ 都是 $X$ 上的下有界函数. 固定 $\eta \in (0, h/2)$ 满足 $\inf_{\{y_1,\cdots,y_I\} \subset B_{2\eta}(S)} \sum_{i=1}^{I} f_i(y_i) > \sum_{i=1}^{I} f_i(x)$, 不妨取

$$\varepsilon < \min\{\inf_{\{y_1,\cdots,y_I\} \subset B_{2\eta}(S)} \sum_{i=1}^{I} f_i(y_i) - \sum_{i=1}^{I} f_i(x), \eta\}.$$

对 $\bar{f}_i, i = 1, \cdots, I$ 和 $f_{I+1} = i_{[x,S]}$ 运用定理 2.4 得到 $z_i (i = 1, \cdots, I), u, \|z_i - u\| < \varepsilon$, 以及 $z_i^* \in \partial_F \bar{f}_i(z_i) = \partial_F f_i(z_i), u^* \in N_F([x,S], u)$ 满足

$$\max(\|z_1^*\|, \cdots, \|z_I^*\|, \|u^*\|) \cdot \operatorname{diam}(z_1, \cdots, z_I, u) < \varepsilon, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{I} f_i(z_i) < \wedge[f_1, \cdots, f_I]([x,S]) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{I} f_i(x) + \varepsilon, \tag{15}$$

$$\|\sum_{i=1}^{I} z_i^* + u^*\| < \varepsilon, \tag{16}$$

其中 $N_F([x,S], u)$ 是集 $[x,S]$ 在点 $u$ 处的 Frechet 法向锥, 即 $N_F([x,S], u) = \partial_F i_{[x,S]}(u)$.

由于 $[x,S]$ 是闭凸集, 故

$$N_F([x,S], u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, w - u \rangle \le 0, \quad \forall w \in [x,S]\}. \tag{17}$$

由 (16), (17) 得

$$\begin{aligned} 0 \le \langle -u^*, w - u \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^*, w - u \rangle - \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^* + u^*, w - u \rangle \\ &\le \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^*, w - u \rangle + \|\sum_{i=1}^{I} z_i^* + u^*\| \cdot \|w - u\| \\ &< \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^*, w - u \rangle + \varepsilon \|w - u\|, \quad \forall w \in [x,S] \backslash \{u\}, \end{aligned}$$

即

$$0 < \langle \sum_{i=1}^{I} z_i^*, w - u \rangle + \varepsilon \|w - u\|, \quad \forall w \in [x,S] \backslash \{u\}. \tag{18}$$

而且还有 $d(u,S)\ge\eta$, 事实上, 如果 $d(u,S)<\eta$, 则

$$d(z_i,S)\le\|u-z_i\|+d(u,S)\le\eta+\eta=2\eta,$$

于是 $\{z_i:i=1,\cdots,I\}\subset B_{2\eta}(S)$, 从而

$$\sum_{i=1}^{I}f_i(z_i)\ge\inf_{\{y_1,\cdots,y_I\}\subset B_{2\eta}(S)}\sum_{i=1}^{I}f_i(y_i)\ge\sum_{i=1}^{I}f_i(x)+\varepsilon.$$

此与 (15) 式矛盾.

由于 $u\in[x,S]$, 从而 $\exists\bar t\in[0,1]$ 使 $u=(1-\bar t)x+\bar t\bar y,\bar y\in S$. 于是有

$$\eta\le\|u-\bar y\|=(1-\bar t)\|x-\bar y\|,$$

由于 $x\notin S$, 则有 $1-\bar t>0$. 又任取 $y\in S$, 令 $w:=y+\bar t(\bar y-y)$, 又有 $w\ne u$, 代入 (18) 式即可推得

$$0<\langle\sum_{i=1}^{I}z_i^*,y-x\rangle+\varepsilon\|y-x\|,\quad\forall y\in S. \tag{19}$$

(2°) 当 $r\ne0$ 时, 考虑乘积空间 $X\times R$, 赋予范数 $\|(x,r)\|=\|x\|+|r|,(x,r)\in X\times R$. 取足够小的 $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon/2)$, 使 $\lim_{\delta\to0}\inf_{\{y_1,\cdots,y_I\}\subset B_\delta(S)}\sum_{i=1}^{I}f_i(y_i)-(\sum_{i=1}^{I}f_i)(x)>r+\varepsilon_1$, 并令

$$f_{I+1}(t):=-(r+\varepsilon_1)t,\quad t\in[0,1].$$

于是

$$\lim_{\delta\to0}\inf_{\{(y_1,1)\cdots,(y_I,1)\}\subset B_\delta(S)\times\{1\}}\sum_{i=1}^{I}\bar f_i(y_i,1)=\lim_{\delta\to0}\inf_{\{y_1,\cdots,y_I\}\subset B_\delta(S)}\sum_{i=1}^{I}f_i(y_i)-(r+\varepsilon_1)$$

$$>\sum_{i=1}^{I}f_i(x)+f_{I+1}(0)=\sum_{i=1}^{I+1}\bar f_i(x,0),$$

其中 $\bar f_i:X\times R\to\overline{R},i=1,\cdots,I+1,\bar f_i(x,t):=f_i(x),\bar f_{I+1}(x,t):=f_{I+1}(t)$. 由第一步的证明知

$$\exists(z_i,t_i)\in B_\varepsilon[(x,0),S\times\{1\}],(z_i^*,t_i^*)=(z_i,t_i)^*\in\partial_F\bar f_i(z_i,t_i)=\partial_F f_i(z_i)\times\{0\},$$

$$i=1,\cdots,I,(z_{I+1},t_{I+1})^*\in\partial_F\bar f_{I+1}(z_{I+1},t_{I+1})=\{0\}\times\{-(r+\varepsilon_1)\}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{I+1}\bar f_i(z_i,t_i)<\wedge[\bar f_I,\cdots,\bar f_{I+1}]([(x,0),S\times\{1\}])+\varepsilon_1, \tag{20}$$

$$0<\langle(z_I,t_I)^*+\cdots+(z_{I+1},t_{I+1})^*,(y,1)-(x,0)\rangle+\varepsilon_1\|(y,1)-(x,0)\|,\quad\forall(y,1)\in S\times\{1\}. \tag{21}$$

由 (20) 式可得

$$\sum_{i=1}^{I}f_i(z_i)-(r+\varepsilon_I)t_{I+1}<\wedge[\bar f_1,\cdots,\bar f_{I+1}]([(x,0),S\times\{1\}])+\varepsilon_1,$$

$$\sum_{i=1}^{I} f_i(z_i) < \wedge[f_1,\cdots,f_I]([x,S]) + |r| + \varepsilon. \tag{22}$$

(21) 式即为

$$0 < \langle(\sum_{i=1}^{I} z_i^*, -(r+\varepsilon_1)), (y-x,1)\rangle + \varepsilon_1\|(y-x,1)\|,$$

从而

$$0 < \langle(\sum_{i=1}^{I} z_i^*, y-x\rangle - r + \varepsilon_1\|y-x\|,$$

所以

$$r < \langle(\sum_{i=1}^{I} z_i^*, y-x\rangle + \varepsilon\|y-x\|, \quad \forall y \in S.$$

**注** 定理 3.3 是单个函数的 Clarke-Ledyaev 多方向中值不等式 [4] 对函数组情形的推广形式.

## 参考文献：

[1] BORWEIN J M, ZHU Q J. *A survey of subdifferential calculus with applications* [J]. Nonlinear Anal., 1999, **38**: 687–773.
[2] BORWEIN J M, ZHU Q J. *Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces wih applicaations to metric regularity* [J]. SIAM J. Control Optim., 1996, **34**: 1568–1591.
[3] BORWEIN J M, ZHU Q J. *Variational analysis in non-reflexive spaces and applications to control problems with L Perturbations* [J]. Nonlinear Anal., 1997, **28**: 889–915.
[4] ZHU Q J. *Clarke-Ledyaev mean value inequality in smooth Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1998, **32**: 315–324.

# Frechet Subdifferentials of Extended Functions in Smooth Banach Spaces

*WU Cong-xin*[1], *YANG Fu-chun*[1,2]
( 1. Dept. of Math., Harbin Institute of Technology, Helongjiang 150001, China;
2. Dept. of Math., Yunnan University, Kunming 650091, China )

**Abstract:** We obtain a useful result about Frechet subdifferentials of homogeneous function defined in Frechet smooth Banach space. Then we extend the Clarke-Ledyaev multidirectional mean value inequality to a group of functions by use of the sum rules for Frechet subdifferentials of lower semicontinuous functions.

**Key words:** Frechet subdifferential; smooth Banach spaces; decoupled infimum; normal cone; multidirectional mean value inequality.