第25卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0538-05 文献标识码: A

局部 R_0- 代数

刘练珍, 李开泰
(西安交通大学理学院, 陕西 西安 710049)
(E-mail: lian712000@yahoo.com)

摘 要: 文提出了局部 R_0- 代数的概念, 并给出了相应的等价条件, 即 (i) R_0- 代数 L 是局部的, (ii) $\forall x \in L, \mathrm{ord}(x) < \infty$ 或 $\mathrm{ord}(\neg x) < \infty$, (iii) 每一个真滤子是 primary. 另外, 我们又证明了任一 R_0- 代数是局部 R_0- 代数的子直积.

关键词: BL- 代数; MV- 代数; R_0- 代数; 局部 R_0- 代数; 滤子.
MSC(2000): 03G25, 06D99
中图分类: O153.1

1 引 言

为证明无限值 Lukasiewicz 逻辑系统的完备性, C.C.Chang 提出并研究了 MV- 代数 [1], 并同时提出了局部有限 MV- 代数的概念. 此后, 在 1993 年, L.P.Belluce 等 [2] 推广了局部有限 MV- 代数的概念, 提出了局部 MV- 代数的概念. 由于 MV- 代数是一种特殊的 BL- 代数 [3], 因此, 在文 [4] 中, E.Turunen 等又将此思想推广到 BL- 代数, 提出了局部 BL- 代数的概念.

R_0- 代数 [5-6] 是由王国俊教授提出的另一种代数结构, 其目的在于提供形式系统 $\mathcal{L}$ 的完备性定理的证明, 并成功的达到了目的 [7]. 与 BL- 代数和 MV- 代数不同的是, 该结构有三种相互独立的运算 $\neg, \vee, \rightarrow$. 值得注意的是 MV- 代数和 BL- 代数均满足可分条件, 即 $x \wedge y = x \odot (x \rightarrow y)$, 而 R_0- 代数却不满足. 换句话说, BL- 代数和 MV- 代数是由连续三角模和它的相应的剩余蕴涵所诱导的代数体系, 然而, R_0- 代数却是由左连续三角模和它的相应的剩余蕴涵所诱导的代数体系. 因此, R_0- 代数与 MV- 代数和 BL- 代数是不同的. 所以, 对 R_0- 代数进行推广是有研究意义的.

本文将 C.C.Chang 的思想推广到 R_0- 代数, 提出了局部 R_0- 代数的概念, 并给出了相应的等价条件, 即, (i) R_0- 代数 L 是局部的, (ii) $\forall x \in L, \mathrm{ord}(x) < \infty$ 或 $\mathrm{ord}(\neg x) < \infty$, (iii) 每一个真滤子是 primary. 另外, 我们又证明了任一 R_0- 代数是局部 R_0- 代数的子直积.

2 基本概念及性质

定义 1[5] 设 L 是 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数, 如果 L 上存在偏序 $\leq$ 使得 $(L, \leq)$ 是有界分配格, $\vee$ 是关于 $\leq$ 的上确界运算, $\neg$ 是关于 $\leq$ 的逆序对合对应, 且以下条件成立, 则称 L 为 R_0- 代数:

(R1) $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$;

收稿日期: 2003-04-14
基金项目: 国家基础专项基金 (G1999032801), 国家自然科学基金 (50136030)

(R2) $1 \to x = x$;

(R3) $(y \to z) \wedge ((x \to y) \to (x \to z)) = y \to z$;

(R4) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(R5) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

(R6) $(x \to y) \vee ((x \to y) \to (\neg x \vee y)) = 1$.

定义 2[7] 设 L 是 R_0- 代数， $\emptyset \neq F \subseteq L$, 称 F 为 L 的滤子，如果 $\forall x, y \in L$,

(1) $1 \in F$;

(2) 若 $x \in F, x \to y \in F$, 则 $y \in F$.

设 L 是 R_0- 代数， F 为 L 的滤子. 若 $F \neq L$, 则称 F 为真滤子. 显然， F 是真滤子当且仅当 $0 \notin F$ 当且仅当对任意的 $x \in L$, x 与 $\neg x$ 不能同时在 F 中. 真滤子 F 称为素滤子，若对任意的 $x, y \in L$, $x \vee y \in F$ 蕴涵 $x \in F$ 或 $y \in F$. 真滤子 F 称为极大的，若 E 是任意一个滤子，且 $F \subseteq E$, 则 $E = F$ 或 $E = L$.

在 R_0- 代数 L 中，对任意的 $x, y \in L$, 定义 $x \odot y = \neg(x \to \neg y), x \oplus y = \neg x \to y$. 可以证明 $\odot$ 和 $\oplus$ 是对偶的三角模和三角余模. 为方便起见，用 x^n 记 $\underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{n}$, 这里 $n \geq 1$.

定义 3 设 L 是 R_0- 代数， $x \in L$, 使 $x^m = 0$ 成立的最小自然数 m 叫做元素 x 的阶，记为 $\mathrm{ord}(x)$. 若这样的 m 不存在，则称 x 的阶为无限，即 $\mathrm{ord}(x) = \infty$.

引理 1[7] 设 L 是 R_0- 代数，则对任意的 $x, y, z \in L$,

(1) $x \leq y$ 当且仅当 $x \to y = 1$.

(2) $x \to (y \to x) = 1$.

(3) $\neg x = x \to 0$.

(4) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$.

(5) $x \odot y \leq x \wedge y$.

(6) $(x \odot y) \to z = x \to (y \to z)$.

(7) $x \odot \neg x = 0$.

(8) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$.

(9) $x \odot (y \wedge z) = (x \odot y) \wedge (x \odot z)$.

(10) $x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

引理 2[7] 设 L 是 R_0- 代数， $\emptyset \neq F \subseteq L$. F 是 L 的滤子的充要条件是

(1) 若 $x, y \in F$, 则 $x \odot y \in F$;

(2) 若 $x \leq y, x \in F$, 则 $y \in F$.

特别地， F 是素滤子当且仅当对任意的 $x, y \in L$, $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$.

引理 3[7] 设 L 是 R_0- 代数， $\emptyset \neq X \subseteq L$, 记

$$\langle X \rangle = \{a \in L | \exists n \in N, \exists x_i \in X, i = 1, \ldots, n, a \geq x_1 \odot \cdots \odot x_n\},$$

则 $\langle X \rangle$ 是包含 X 的最小滤子，称之为由 X 生成的滤子.

引理 4 任意真滤子都可延拓为一个极大滤子.

3 局部 R_0- 代数

定义 4 R_0- 代数 L 称为局部的，如果 L 有唯一的极大滤子.

设 L 是 R_0- 代数，定义 $D(L)=\{x\in L|\forall n, x^n>0\}$.

注 $\forall x\in L, x\in D(L)$ 当且仅当 $\mathrm{ord}(x)=\infty$.

引理 5 设 L 是 R_0- 代数，F 是 L 的一个真滤子，则 $F\subseteq D(L)$.

证明 设 F 是 L 的一个真滤子，若 $x\in F$, 则对任意的 $n\geq 1$, $x^n\in F$. 因为 $0\notin F$, 因此 $x^n\neq 0$, 即 $x\in D(L)$, 所以 $F\subseteq D(L)$.

引理 6 设 L 是 R_0- 代数，则下列条件等价：

(i) $D(L)$ 是滤子.

(ii) $\forall x,y\in L$, 对任意的 $n\geq 1$, 若 $x^n,y^n\neq 0$, 则 $x^n\odot y^n\neq 0$.

证明 假设 (i) 成立. 设 $x,y\in L$, 对任意的 $n\geq 1$, 若 $x^n,y^n\neq 0$, 那么 $x,y\in D(L)$. 又由 $D(L)$ 是 L 的滤子知 $x\odot y\in D(L)$, 所以

$$x^n\odot y^n=(x\odot y)^n\in D(L),$$

即 $x^n\odot y^n\neq 0$, 因而 (ii) 成立. 反过来，显然，$1\in D(L)$. 令 $x, x\to y\in D(L)$, 那么对任意的 $n\geq 1$, $x^n>0, (x\to y)^n>0$. 由条件 (ii) 有

$$x^n\odot(x\to y)^n=(x\odot(x\to y))^n>0.$$

又 $y\geq(x\odot(x\to y))$, 所以

$$y^n\geq(x\to(x\to y))^n,$$

因此 $y\in D(L)$, 故 $D(L)$ 是个滤子.

定理 1 在 R_0- 代数 L 中，下列条件等价：

(i) $D(L)$ 是个滤子.

(ii) $\langle D(L)\rangle$ 是个真滤子.

(iii) $D(L)$ 是 L 的唯一的极大滤子.

(iv) L 是局部的.

证明 假设 (i) 成立. 显然，$\langle D(L)\rangle=D(L)$. 由于 $0\notin D(L)$, 故 $\langle D(L)\rangle$ 是个真滤子. 假设 (ii) 成立. 由引理 5 有 $\langle D(L)\rangle\subseteq D(L)$, 又 $D(L)\subseteq\langle D(L)\rangle$, 因此 $\langle D(L)\rangle=D(L)$. 这表明 $D(L)$ 是一个真滤子. 设 E 为 L 的任一极大滤子，由引理 5 知 $E\subseteq D(L)$, 再由 E 的极大性及 $D(L)$ 是真滤子知 $E=D(L)$. 因此 $D(L)$ 是 L 的唯一的极大滤子. 若 (iii) 成立，则 (iv) 显然成立. 若 (iv) 成立，令 F 是 L 的唯一的极大滤子. 设 $x\in D(L)$, 则 $\langle x\rangle$ 是个真滤子，由引理 4, $\langle x\rangle$ 可以延拓为一个极大滤子 F_x, 由 F 的唯一性知 $F_x=F$, 因此 $x\in F$, 故 $D(L)\subseteq F$. 反过来，由引理 5 又有 $F\subseteq D(L)$, 所以 $D(L)=F$, 由此可知 $D(L)$ 是一个滤子.

定理 2 设 L 是 R_0- 代数，L 是局部的充要条件是

$$\forall x\in L,\ \ \mathrm{ord}(x)<\infty\ \text{ 或 }\ \mathrm{ord}(\neg x)<\infty.$$

证明 假设 L 是局部的 R_0- 代数. 由定理 1, $D(L)$ 是个滤子. 若存在 $x\in L$ 使得对任意 $n\geq 1$, $x^n>0$ 且 $(\neg x)^n>0$. 由引理 6 有 $x^n\odot(\neg x)^n\neq 0$, 但这与 $(x\odot\neg x)^n=0$ 相矛盾. 所以 $\forall x\in L$, $\mathrm{ord}(x)<\infty$ 或 $\mathrm{ord}(\neg x)<\infty$. 反过来，$1\in D(L)$. 若 $x, x\to y\in D(L)$, 则 $\neg(x\odot\neg y)=x\to y\in D(L)$. 所以 $\mathrm{ord}(x\odot\neg y)=m_1$, 即 $(x\odot\neg y)^{m_1}=x^{m_1}\odot(\neg y)^{m_1}=0$. 因

此 $(\neg y)^{m_1} \le \neg(x^{m_1})$. 由 $x \in D(L)$ 知对任意的 $n \ge 1, x^n > 0$, 从而对任意的 $m \ge 1, (x^{m_1})^m = x^{m_1 m} > 0$. 因此 $x^{m_1} \in D(L)$. 于是 $\mathrm{ord}(\neg(x^{m_1})) = m_2 < \infty$, 即 $(\neg(x^{m_1}))^{m_2} = 0$. 因此

$$((\neg y)^{m_1})^{m_2} \le (\neg(x^{m_1}))^{m_2} = 0.$$

所以

$$(\neg y)^{m_1 m_2} = (x^{m_1})^{m_2} = 0,$$

即 $\mathrm{ord}(\neg y) \le \infty$. 因此 $\mathrm{ord}(y) = \infty$, 即 $y \in D(L)$. 所以 $D(L)$ 是滤子，故由定理 1 知 L 是局部的.

定义 5 设 L 是 R_0- 代数， F 是 L 的一个真滤子. 称 F 是 primary, 对任意的 $x, y \in L$, 若 $\neg(x \odot y) \in F$, 则存在自然数 n, 使得 $\neg(x^n) \in F$ 或 $\neg(y^n) \in F$.

定理 3 设 F 是 L 的一个滤子， F 是 L 的 primary 滤子当且仅当 L/F 是局部 R_0- 代数.

证明 设 L/F 是局部 R_0- 代数且 $\neg(x \odot y) = y \to \neg x \in F$. 那么 $y/F \to \neg x/F = (y \to \neg x)/F = 1/F$, 因此 $y/F \le \neg x/F$. 假设对任意自然数 n, 有 $\neg(x^n) \notin F$, 那么 $\neg(x^n)/F \ne 1/F$, 所以 $x^n/F \ne 0/F$. 由于 L/F 是局部的，由定理 2, 存在自然数 m 使得 $(\neg x)^m/F = 0/F$. 从而 $y^m/F \le (\neg x)^m/F = 0/F$, 因此 $\neg(y^m)/F = 1/F$, 即 $\neg(y^m) \in F$, 故 F 是 primary 滤子. 反过来，若 F 是 primary 滤子，由于 $\neg(x \odot \neg x) = 1 \in F$, 故存在自然数 n, 使得 $\neg(x^n) \in F$ 或 $\neg((\neg x)^n) \in F$, 即 $\neg(x^n)/F = 1/F$ 或 $\neg((\neg x)^n)/F = 1/F$, 所以 $x^n/F = 0/F$ 或 $(\neg x)^n/F = 0/F$. 由定理 2 知， L/F 是局部的.

引理 7 素滤子是 primary.

证明 设 F 是 L 的素滤子，由引理 2, $\forall x, y \in L$, 有 $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$. 若 $\neg(x \odot y) \in F$ 且 $x \to y \in F$, 那么

$$(x \to y) \odot \neg(x \odot y) = (x \to y) \odot (y \to \neg x) \le x \to \neg x = \neg(x^2) \in F.$$

同理，若 $\neg(x \odot y) \in F$ 且 $y \to x \in F$, 则有 $\neg(y^2) \in F$. 所以 F 是 primary 滤子.

引理 8 L 是全序 R_0- 代数的充要条件是任一真滤子都是素滤子.

证明 设 L 是全序 R_0- 代数且 F 为任一真滤子. 则 $\forall x, y \in L$, 有 $x \le y$ 或 $y \le x$, 所以 $x \to y = 1 \in F$ 或 $y \to x = 1 \in F$. 由引理 2 知， F 是素滤子. 反过来，令 $x, y \in L$. 因为 $\{1\}$ 是素滤子，故 $x \to y \in \{1\}$ 或 $y \to x \in \{1\}$, 即 $x \to y = 1$ 或 $y \to x = 1$. 所以 $x \le y$ 或 $y \le x$, 因而 L 是全序 R_0- 代数.

由引理 7, 8 及定理 3 可得下述推论：

推论 全序 R_0- 代数是局部的.

定理 4[7] 任一 R_0- 代数是全序 R_0- 代数的子直积.

由推论及定理 4, 我们又得到如下结论：

定理 5 任一 R_0- 代数是局部 R_0- 代数的子直积.

定理 6 L 是局部的充要条件是 L 的每一个真滤子是 primary.

证明 设 L 是局部 R_0- 代数且 F 是 L 的一个真滤子. 由引理 5 有 $F \subseteq D(L)$. 若 $\neg(x \odot y) \in F$, 则 $\neg(x \odot y) \in D(L)$, 从而 $\mathrm{ord}(\neg(x \odot y)) = \infty$, 所以 $\mathrm{ord}(x \odot y) < \infty$. 因此 $\mathrm{ord}(x) < \infty$ 或 $\mathrm{ord}(y) < \infty$, 即存在自然数 n, 使得 $x^n = 0$ 或 $y^n = 0$, 从而 $\neg(x^n) = 1 \in F$ 或 $\neg(y^n) = 1 \in F$,

故 F 是 primary. 反之, 由于 $\{1\}$ 是 primary 滤子, 故由定理 3 知 $L/\{1\}$ 是局部 R_0- 代数. 因为 $L \cong L/\{1\}$, 所以 L 是局部 R_0- 代数.

参考文献:

[1] CHANG C C. *Algebraic analysis of many valued logic* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**: 467–490.

[2] BELLUCE L P, NOLA A DI, LETTIERI A. *Local MV-algebras* [J]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1993, 42: 347-361.

[3] HÁJEK P. *Metamathematics of Fuzzy Logic* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] TURUNEN E, SESSA S. *Local BL-algebras* [J]. Mult. Val. Logic, 2001, **6**(1-2): 229–250.

[5] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
WANG Guo-jun. *Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[6] 王国俊. MV- 代数, BL- 代数, R_0- 代数与多值逻辑 [J]. 模糊系统与数学, 2002, **15**(3): 1–15.
WANG Guo-jun. *MV-algebras, BL-algebras, R_0-algebras and multi-valued logic* [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, **15**(3): 1–15. (in Chinese)

[7] 裴道武, 王国俊. 形式系统 $\mathcal{L}$ 的完备性及其应用 [J]. 中国科学, E 辑, 2002, **32**(1): 56–64.
PEI Dao-wu, WANG Guo-jun. *The completeness and application of formal system $\mathcal{L}$* [J]. Science in China, Ser. E, 2002, **32**(1): 56–64. (in Chinese)

Local R_0-Algebras

LIU Lian-zhen, LI Kai-tai

(College of Science, Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China)

Abstract: Local R_0-algebras are defined and studied. The following statements are proved to be equivalent: (i) R_0-algebra L is local; (ii) $\forall x \in L$, either $\mathrm{ord}(x) < \infty$ or $\mathrm{ord}(\neg x) < \infty$; (iii) Every proper filter is primary. Moreover, it is proved that each R_0- algebra is a subdirect product of the local R_0-algebras.

Key words: MV-algebras; BL-algebras; R_0-algebra; local R_0-algebras.