第25卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0548-05 文献标识码: A

# 半 Σ 准投射模自同态环的稳定秩

魏加群
(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)
(E-mail: weijiaqun@njnu.edu.cn)

**摘 要**: 本文证明了若半 Σ 准投射模是弱 $n$ 满投射的, 则其自同态环的稳定秩至多为 $n$, 从而部分推广了文献 [3] 的一个主要结果.

**关键词**: 半 Σ 准投射模; 稳定秩; 弱 $n$ 满投射.
**MSC(2000)**: 16D70
**中图分类**: O153.3

## 1 引 言

设 $R$ 是环, 我们记 $R^n = R\times\cdots\times R$, ${}^nR=\{b^t, b\in R^n\}$. 若 $b\in R^n$ 满足条件 $b({}^nR)=R$, 则称 $b$ 是幺模行. 若对任意幺模行 $b=(b_1,b')\in R\times R^n$, 都存在 $x\in R^n$ 使得 $b_1x+b'$ 是 $R^n$ 的幺模行, 则称环 $R$ 的稳定秩至多为 $n$. 稳定秩的概念是由 Bass 引入的, 用以研究 $K_1$ 群的稳定性 [1] 模的自同态环的稳定秩与模在直和中的消去性质有很大的联系. 例如文献 [6] 就证明了对于 von Neumann 正则环上的模 $M$ 来说, 其自同态环的稳定秩至多为 $n$ 当且仅当 $M$ 满足 $n$ 弱消去性质. Canfell[4] 和武同锁 [3] 分别研究了准投射模的自同态环的稳定秩至多为 1 和至多为 $n$ 的情况. 本文则考虑了更一般的情况, 确切的说, 考虑了半 Σ 准投射模自同态环的稳定秩至多为 $n$ 时的情形. 通过引入弱 $n$ 满投射的概念, 本文给出了半 Σ 准投射模自同态环的稳定秩至多为 $n$ 的一个充分条件. 特别对于准投射模来说, 这个条件也是必要的, 从而部分推广了文献 [3] 的一个结果. 本文还进一步研究了弱 $n$ 满投射及其对偶的一些性质.

本文中的环均是有单位元的结合环, 模一般指右酉模. 以下总设 $P$ 是环 $R$ 上的模.

## 2 主要结果

记 $\mathrm{Gen}(P):=\{M|M$ 是 $R$- 模, 且存在某个集合 $X$ 以及满同态 $P^{(X)}\to M\}$. 显然 $\mathrm{Gen}(P)$ 对商模是封闭的.

**定义 2.1** 设 $n$ 是正整数, $P$ 是 $R$- 模. 若对任意正合列 $0\to \mathrm{Ker}g\to P\xrightarrow{g} M\to 0$, 其中 $\mathrm{Ker}g\in\mathrm{Gen}(P)$, 和任意满同态 $f: P^n\to M$, 都存在一个满同态 $h: P^n\to P$ 使得 $f=gh$, 即存在下列交换图:

$$\begin{tikzcd} & & & P^n \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}g \arrow[r] & P \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

此时则称 $P$ 是弱 $n$ 满投射的. 若在定义中去掉 $\mathrm{Ker}g\in\mathrm{Gen}(P)$ 的限制条件, 则称 $P$ 是 $n$ 满投射的 [3].

收稿日期: 2002-10-25

设 $P^{(X_2)} \to P^{(X_1)} \to M \to 0$ 是任意一个正合列. 若它诱导一个正合列 $\mathrm{Hom}_R(P, P^{(X_2)}) \to \mathrm{Hom}_R(P, P^{(X_1)}) \to \mathrm{Hom}_R(P, M) \to 0$, 则称 $P$ 是半 Σ 准投射的. 半 Σ 准投射模的概念是日本数学家 Sato 在研究范畴等价时引入的 [2]. 易见半 Σ 准投射模是比准投射模更为广泛的概念.

**命题 2.2** 若 $P$ 是半 Σ 准投射模, 则任何满态射 $P^{(X)} \to P^{(Y)}$ 都是可裂的. 特别的, 任何满态射 $P^n \to P$ 都是可裂的.

**证明** 对任何满同态 $h: P^{(X)} \to P^{(Y)}$, 考虑正合列 $\mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(X)}) \to \mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(Y)}) \to D \to 0$. 其中 $D$ 是一个右 $S$- 模, $S = \mathrm{End}_R(P^{(Y)})$. 则用函子 $-\otimes_S P^{(Y)}$ 作用后有诱导正合列 $\mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(Y)}) \otimes_S P^{(Y)} \to \mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(Y)}) \otimes_S P^{(Y)} \to D \otimes_S P^{(Y)} \to 0$. 考虑下面的标准正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(X)}) \otimes_S P^{(Y)} & \to & \mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(Y)}) \otimes_S P & \to & D \otimes_S P^{(Y)} & \to & 0 \\
\downarrow \rho_{P_{(X)}} & & \downarrow \rho_{P_{(Y)}} & & \downarrow & & \\
P^{(X)} & \to & P^{(Y)} & \to & 0 & \to & 0
\end{array}$$

易见标准态射 $\rho_{P_{(X)}}$ 和 $\rho_{P_{(Y)}}$ 是同构, 因此有 $D \otimes_S P^{(Y)} = 0$. 但因 $P$ 是半 Σ 准投射模, 由文献 [2] 引理 1.3 可知, $P$ 是半 Σ 准投射的当且仅当对任意 $X, P^{(X)}$ 都是半 Σ 准投射的. 又由文献 [2] 定理 2.1 可知, $D \cong \mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, D \otimes_S P^{(Y)}) = 0$. 因此 $\mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(X)}) \to \mathrm{Hom}_R(P^{(Y)}, P^{(Y)})$ 是标准的满态射. 从而, 对单位态射 $I_{P^{(Y)}}: P^{(Y)} \to P^{(Y)}$, 存在一个态射 $g: P^{(Y)} \to P^{(X)}$ 使得 $1_{P^{(Y)}} = hg$. 即满态射 $h: P^{(X)} \to P^{(Y)}$ 是可裂的. □

**定理 2.3** 设 $P$ 是半 Σ 准投射模, $S = \mathrm{End}_R(P)$. 若 $P$ 是弱 $n$ 满投射的, 则 $S$ 的稳定秩至多为 $n$.

**证明** 设 $b + cd = 1$, $b \in S$, 其中 $c \in S^n$, $d \in {}^nS$. 则存在正合列 $(*): P \to {}^bP \to {}^{\pi}P/\mathrm{im}(b) \to 0$, 其中 $\mathrm{im}(b)$ 是 $b$ 的像. 考虑下面的图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P^n & & \\
 & & \alpha \swarrow & & \downarrow \pi c & & \\
0 & \to & \mathrm{im}(b) & \to P & \xrightarrow{\pi} & P/\mathrm{im}(b) & \to & 0
\end{array}$$

因为 $\pi cd = \pi + \pi cd = \pi$ 是满的, 故 $\pi c$ 是满态射. 由于 $P$ 是弱 $n$ 满投射的, 且 $\mathrm{im}(b) \in \mathrm{Gen}(P)$, 因此存在满同态 $\alpha: P^n \to P$ 满足条件 $\pi c = \pi\alpha$. 则有 $\pi(\alpha - c) = 0$, 故 $\mathrm{im}(\alpha - c) \subseteq \mathrm{Ker}\pi = \mathrm{im}(b)$. 因此我们有下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P^n & & \\
 & \beta \swarrow & \downarrow \alpha - c & & \\
P & \xrightarrow{b} & \mathrm{im}(b) & \to & 0
\end{array}$$

因 $P$ 是半 Σ 准投射的, 故有诱导正合列 $\mathrm{Hom}_R(P^n, P) \to \mathrm{Hom}_R(P^n, b)\mathrm{Hom}_R(P^n, P) \to \mathrm{Hom}_R(P^n, p/\mathrm{im}(b)) \to 0$. 从而可知有标准满态射 $\mathrm{Hom}_R(P^n, P) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, \mathrm{im}(b))$. 因此存在 $\beta: P^n \to P$ 使得 $b\beta = \alpha - c$. 又由前面的命题可知, $\alpha$ 是可裂的. 易见 $b\beta + c = \alpha$ 即是 $S_n$ 的幺模行. 由定义可知, $S$ 的稳定秩至多为 $n$. □

**推论 2.4** 设 $P$ 是半 Σ 准投射 $R$- 模且是 $n$ 满投射的, 并满足调换 (exchange) 性质. 令 $S = \mathrm{End}_R(P)$. 则:

(1) 若 $P^n\oplus A\cong P\oplus B$, 则 $A$ 同构 $B$ 于的一个直和项.

(2) 由 $P=A_1\oplus B_1$, $P^n=A_2\oplus B_2$, 其中 $A_1\cong A_2$, 则 $A$ 同构 $B$ 于的一个直和项.

**证明** 由定理 2.3 可知, $S$ 的稳定秩至多为 $n$. 再由 [5] 定理 13 知结论成立. □

尽管我们不知道对半 $\Sigma$ 准投射模来说, 弱 $n$ 满投射性是否也是其自同态环的稳定秩至多为 $n$ 的必要条件. 但是对准投射模来说, 弱 $n$ 满投射性确实也是必要条件.

**定理 2.5** 若 $P$ 是准投射 $R$- 模, $S=\mathrm{End}_R(P)$. 则下列条件等价:

(1) $S$ 的稳定秩至多为 $n$.

(2) $P$ 是 $n$ 满投射的.

(3) $S_S$ 是 $n$ 满投射的.

(4) $P$ 是弱 $n$ 满投射的.

(5) $S_S$ 是弱 $n$ 满投射的.

**证明** 由文献 [3] 可知 (1)⇔(2)⇔(3). (4)⇒(1) 由上面的定理. (2)⇒(4) 显然. (1)⇔(3)⇔(5) 是 (1)⇔(2)⇔(4) 的特例. □

下面给出弱 $n$ 满投射模的两个性质.

**命题 2.6** 设 $P$ 是弱 $n$ 满投射的, $b$ 是 $P$ 的一个满自同态. 若有 $\mathrm{Ker}b\in\mathrm{Gen}(P)$, 则 $b$ 是可裂的.

**证明** 令 $\pi:P^n\to P$ 和 $i:P\to P^n$ 分别是标准投射和标准入射. 则由弱 $n$ 满投射的定义可知, 存在满态射 $h:P^n\to P$ 满足条件 $\pi=bh$. 因此有 $b(hi)=\pi i=1$, 即 $b$ 是可裂的. □

**命题 2.7** 设 $P$ 是弱 $n$ 满投射的, $Q$ 是 $P$ 的直和项. 若 $\mathrm{Hom}_R(P/Q,Q)=0$, 则 $Q$ 也是弱 $n$ 满投射的.

**证明** 设 $P=Q\oplus K$, $\pi:K^n\to K$ 是标准投射. 若有正合列 $0\to\mathrm{Ker}f\to Q\to{}^fM\to 0$, 其中 $\mathrm{Ker}f\in\mathrm{Gen}(Q)$, 以及满态射 $Q^n\to{}^gM$, 则可得正合列 $0\to\mathrm{Ker}f'\to Q\oplus K\to{}^{f'}M\oplus K\to 0$ 及满态射 $Q^n\oplus K^n\to{}^{g'}M\oplus K$, 其中 $f'=\begin{bmatrix}f&0\\0&1\end{bmatrix}$, $g'=\begin{bmatrix}g&0\\0&\pi\end{bmatrix}$. 我们把 $P$ 中的元素写成列的形式. 因 $Q$ 是 $P$ 的直和项, 故 $\mathrm{Ker}f'\cong\mathrm{Ker}f\in\mathrm{Gen}(Q)\subseteq\mathrm{Gen}(P)$. 由于 $P$ 是弱 $n$ 满投射的, 因而存在满态射 $h:Q^n\oplus K^n\to Q\oplus K$ 满足条件 $g'=f'h$. 令 $h=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{bmatrix}$. 则有

$$\begin{bmatrix}g&0\\0&\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{bmatrix}.$$

由条件 $\mathrm{Hom}_R(P/Q,Q)=0$, 即 $\mathrm{Hom}_R(K,Q)=0$, 可得 $h_{12}=0$. 又因 $h$ 是满态射, 故 $h_{11}:Q^n\to Q$ 也是满态射. 又由上式计算可知 $g=fh_{11}$, 因此 $Q$ 是弱 $n$ 满投射的. □

记 $\mathrm{Cogen}(P):=\{M|M$ 是 $R$- 模, 且存在某个集合 $X$ 以及单同态 $M\to P^X\}$. 显然 $\mathrm{Cogen}(P)$ 对子模是封闭的.

对偶于弱 $n$ 满投射模的概念, 我们有如下定义:

**定义 2.8** 设 $n$ 是正整数, $P$ 是 $R$- 模. 若对任意正合列 $0\to M\to{}^gP\to\mathrm{im}(g)\to 0$, 其中 $\mathrm{im}(g)\in\mathrm{Cogen}(P)$, 和任意单同态 $f:M\to P^n$, 都存在一个单同态 $h:P\to P^n$ 使得 $f=hg$, 即存在下列交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P^n & & \\ & & h\nearrow & & \uparrow h & & \\ 0 & \to & \mathrm{im}(g) & \to P & \xrightarrow{g} & M & \to & 0\end{array}$$

此时称 $P$ 是弱 $n$ 单内射的. 若在定义中去掉 $\mathrm{im}(g)\in\mathrm{Cogen}(P)$ 的限制条件, 则称 $P$ 是 $n$ 单内射的 [3].

设 $0\to M\to P^{X_1}\to P^{X_2}$ 是任意一个正合列. 若它诱导一个正合列 $\mathrm{Hom}_R(P^{X_2},P)\to\mathrm{Hom}_R(P^{X_1},P)\to\mathrm{Hom}_R(M,P)\to 0$, 则称 $P$ 是半 II 准内射的. 易见半 II 准内射模是比准内射模更为广泛的概念 [3].

**命题 2.9** (1) P 是半 II 准内射的当且仅当对任意 $X$, $P^X$ 都是半 II 准内射的.

(2) 若 $P$ 是半 II 准内射模, 则任何单态射 $P^X\to P^Y$ 都是可裂的. 特别的, 任何单态射 $P\to P^n$ 都是可裂的.

**证明** (1) 充分性是显然的. 下证必要性

对任意正合列 $0\to M\to P^{Y_1}\to P^{Y_2}$. 用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,P^Y)\cong(\mathrm{Hom}_R(-,P))^X$ 作用, 则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(P^{Y_2},P^X) & \to & \mathrm{Hom}_R(P^{Y_1},P^X) & \to & \mathrm{Hom}_R(M,P^X) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(\mathrm{Hom}_R(P^{Y_2},P))^X & \to & (\mathrm{Hom}_R(P^{Y_1},P))^X & \to & (\mathrm{Hom}_R(M,P))^X & \to & 0
\end{array}$$

其中垂直的态射都是标准同构. 因 $P$ 是半 II 准内射的, 故下行是正合的. 因此上行也是正合的, 即得所证.

(2) 考虑正合列 $0\to 0\to P^X\to{}^hP^Y$. 因 $P$ 是半 II 准内射的, 由 (1) 可知 $P^X$ 也是半 II 准内射的, 故有正合列 $\mathrm{Hom}_R(P^Y,P^X)\to\mathrm{Hom}_R(P^X,P^X)\to\mathrm{Hom}_R(0,P^X)(=0)\to 0$, 从而, 对单位态射 $1_{P^X}:P^X\to P^X$, 存在一个态射 $g:P^Y\to P^X$ 使得 $1_{P^X}=gh$. 即单态射 $h:P^X\to P^Y$ 是可裂的. □

对偶于半 Σ 准投射模的结果, 我们有以下关于半 II 准内射模的结论, 其证明也是对偶的, 故从略.

**定理 2.10** 设 $P$ 是半 II 准内射模, $S=\mathrm{End}_R(P)$. 若 $P$ 是弱 $n$ 单内射的, 则 $S$ 的稳定秩至多为 $n$.

**推论 2.11** 设 $P$ 是半 II 准内射 $R$- 模且是 $n$ 单内射的, 并满足调换 (exchange) 性质. 令 $S=\mathrm{End}_R(P)$. 则:

(1) 若 $P^n\oplus A\cong P\oplus B$, 则 $A$ 同构 $B$ 于的一个直和项.

(2) 若 $P=A_1\oplus B_1$, $P^n=A_2\oplus B_2$, 其中 $A_1\cong A_2$, 则 $A$ 同构 $B$ 于的一个直和项.

**定理 2.12** 若 $P$ 是准内射 $R$- 模, $S=\mathrm{End}_R(P)$. 则下列条件等价:

(1) $S$ 的稳定秩至多为 $n$.

(2) $P$ 是 $n$ 单内射的.

(3) $S_S$ 是 $n$ 单内射的.

(4) $P$ 是弱 $n$ 单内射的.

(5) $S_S$ 是弱 $n$ 单内射的.

**命题 2.13** 设 $P$ 是弱 $n$ 单内射的, $b$ 是 $P$ 的一个单自同态. 若有 $\mathrm{im}(b)\in\mathrm{Cogen}(P)$, 则 $b$ 是可裂的.

**命题 2.14** 设 $P$ 是弱 $n$ 单内射的，$Q$ 是 $P$ 的直和项. 若 $\mathrm{Hom}_R(Q, P/Q)=0$, 则 $Q$ 也是弱单内射的.

## 参考文献:

[1] BASS H. *Algebraic K-Theory* [M]. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.
[2] SATO M, *Fuller's theorem on equivalences* [J]. J. Algebra, 1978, **52**: 274–284.
[3] WU Tong-suo. *On the stable range of endomorphism rings of quai projective modules* [J]. Comm. Algebra, 1998, **26**(1): 139–146.
[4] CANFELL M J. *Completions of diagrams by automorphisms and Bass' first stable range condition* [J]. J. Algebra, 1995, **176**: 480–503.
[5] WU Tong-suo, XU Yong-hua. *On the stable range of exchange rings* [J]. Comm. Algebra, 1997, **25**(7): 2355–2365.
[6] MENAL P, MONCASI J. *On regular rings with stable range 2* [J]. J. Pure. Appl. Albebra, 1982, **24**(1): 25–40.

# Stable Range of Endomorphism Rings of Semi $\Sigma$ Quasi Projective Modules

*WEI Jia-qun*
(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Jiangsu 210097, China )

**Abstract**: We prove that the endomorphism ring of semi-$\Sigma$-quasi-projective module $P$ has stable range at most $n$ provided $P$ is weakly $n$-epi-projective. Consequently, we partially generalize a main result in [3].

**Key words**: semi-$\Sigma$-quasi-projective module; stable range; weakly $n$-eip-projective.