文章编号: 1000-341X(2005)03-0566-05 文献标识码: A

用拼图法研究 Ramsey 数下界的一些注记

吴 康[1], 苏文龙[2], 罗海鹏[3]
(1. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631; 2. 广西大学梧州分校, 广西 梧州 543002;
3. 广西科学院, 广西 南宁 530022)
(E-mail: gxkxylhp@public.nn.gx.cn)

摘 要: 指出论文《关于 Ramsey 数下界的部分结果》中的一些错误, 评注用拼图法研究 Ramsey 数下界的一些困难问题, 并提出两个猜想.

关键词: Ramsey 数; 下界; 拼图法.
MSC(2000): 05C55
中图分类: O157.5

1 由一个错误的"定理"引发的一些思考

论文《关于 Ramsey 数下界的部分结果》[1] 给出

定理 设 $l,s,t\geq 3$ 且 l,s,t 为整数, 有 $R(l,s+t-2)\geq R(l,s)+R(l,t)-1$. (以下简称为定理 A).

把已知的 $R(3,3)=6$ 代入定理 A 的不等式就得到错误的结果

$$R(3,4)=R(3,3+3-2)\geq R(3,3)+R(3,3)-1=11>9=R(3,4).$$

文献 [1] 的证明写道: "设 H 为具有 $R(l,s)-1$ 个顶点的简单图, 且 S_H 唯一. 由 Ramsey 数的定义知 H 中不含 l 点团, 也不含 s 独立点集. 同样设 Q 为具有 $R(l,t)-1$ 个顶点的简单图, 且 S_Q 唯一, 则 Q 不含 l 点团, 也不含 t 独立点集."(其中 S_H 与 S_Q 分别表示图 H 与 Q 的最大独立点集).

首先指出, 文献 [1] 误解了 Ramsey 数的定义, 认为"设 H 为具有 $R(l,s)-1$ 个顶点的简单图, 且 S_H 唯一"就可由 Ramsey 数的定义知"H 中不含 l 点团, 也不含 s 独立点集". 举反例说明其错误: 设 $l,s\geq 3, n=R(l,s)-1$, 令 $H=Kn-e$, 则 H 为具有 $R(l,s)-1$ 个顶点的简单图, 且 S_H 唯一; 但易知 H 含 $n-1>l$ 点团与唯一的 2 独立点集. 另一个反例是: 设 H 为星图 $K_{1,n-1}$, 则 H 为具有 $R(l,s)-1$ 个顶点的简单图, 且 S_H 唯一; 但显然 H 中含 2 点团与唯一的 $n-1>l$ 独立点集. 因此正确的理解是: 由"具有 $R(l,s)-1$ 个顶点并且 S_H 唯一"不能得到"图 H 不含 l 点团也不含 s 独立点集"的结论.

由于文献 [1] 对基本概念的理解有错误, 不难看出, 用"具有 $R(l,s)-1$ 个顶点且 S_H 唯一"的图 H 与"具有 $R(l,t)-1$ 个顶点且 S_Q 唯一"的图 Q 按照文献 [1] 的构图方法联边, 得到的拼凑图就有可能含 l 点团或者含 $s+t-2$ 独立点集, 不能得到"定理 A"的结论. 因此可以断言"定理 A"是错误的.

收稿日期: 2002-04-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10161003), 广西自然科学基金和华南师范大学科研基金

上述错误引发了一些思考. 为了叙述方便，把具有 $R(l,s)-1$ 个顶点并且既不含 l 点团也不含 s 独立点集的图称为 $R(l,s)$ Ramsey 图. 如果文献 [1] 不是对 Ramsey 数定义的理解有错误，把 “定理 A” 的 “证明” 补充完善，理解为 “设图 H 与图 Q 分别是 $R(l,s)$ Ramsey 与 $R(l,t)$ Ramsey 图，并且 S_H 与 S_Q 唯一”，那么按文献 [1] 的构图方法能够得到 “定理 A” 的结论吗？

回答是否定的. 必须考虑这个假设条件是否存在. 考察一些简单的 Ramsey 图. 熟知 $R(3,3)=6, R(3,4)=9$, 如图 1 是 $R(3,3)$ Ramsey 图；图 2 与图 3 都是 $R(3,4)$ Ramsey 图. 图 1 的最大独立点集有 5 个： $\{0,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{0,3\},\{1,4\}$, 最大独立点集不唯一. 图 2 的最大独立点集有 8 个： $\{0,2,5\},\{0,3,5\},\{0,3,6\},\{1,3,6\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},\{2,4,7\},\{2,5,7\}$, 最大独立点集不唯一. 图 3 比图 2 多 4 个最大独立点集： $\{0,2,6\},\{1,3,7\},\{2,4,6\},\{3,5,7\}$, 最大独立点集不唯一.

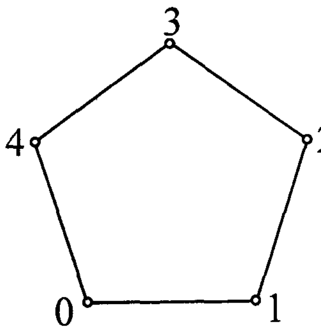

图 1

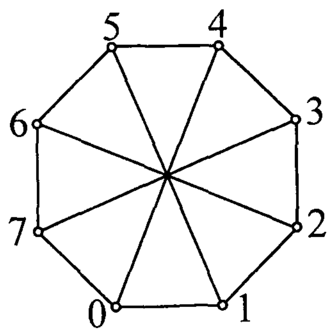

图 2

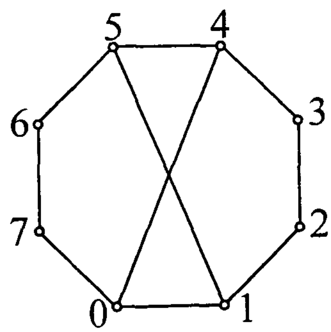

图 3

当前学术界关于 Ramsey 数下界的研究表明，目前已知的 $R(l,s)$ Ramsey 图都不满足 “最大独立点集唯一” 的假设条件. 因此可以断言：即使对假设条件作出某些补充，也不能得到 “定理 A” 所说的普遍成立的下界公式. 由此看来，如果不是在构图的方法和技巧上有很大的创新，那么按照文献 [1] 的构图方法是很难有所作为的.

2 由文献 [1] 的其他失误得到的启示

R.E.Greenwood 与 A.M.Gleason[2] 于 1955 年用构造性方法作循环图得到 Ramsey 数的下界 $R(3,3)\ge 6, R(3,4)\ge 9, R(3,5)\ge 14, R(4,4)\ge 18, R(3,3,3)\ge 17$, 再用存在性方法证明 $R(3,3)\le 6, R(3,4)\le 9, R(3,5)\le 14, R(4,4)\le 18, R(3,3,3)\le 17$, 从而在历史上首先计算得 5 个 Ramsey 数的准确值 $R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(3,5)=14, R(4,4)=18, R(3,3,3)=17$. 近年来，随着计算机技术的迅猛发展，Ramsey 数的研究有许多新的进展. 美国学者 S.P.Radziszowski 于 1993 年在 Rochester Institute of Technology 首次发表综述论文 “Small Ramsey Numbers”[3], 以后在《 The Electronic Journal of Combinatorics 》上每年发表一个更新版本，定期报道各国学者在 Ramsey 数定界方面的全部最新成果，并且收载大量参考文献，成为当今学术界研究 Ramsey 数的重要参照依据. 兹摘抄动态综述论文 [3] 的关于二色 Ramsey 数 $R(k,l)$ 的部分结果如下：

$k\backslash l$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35–41	49–61	56–84	69–115
5			43–49	58–87	80–143	101–216	121–316
6				102–165	111–298	127–495	169–780
7					205–540	216–1031	232–1713

注意到，严谨的学者 B.D.McKay 与 S.P.Radziszowski 在文献 [6] 中得到上界 $R(5,5)\leq 49$, 但文献 [1] 不了解当前的学术动态，引用了 $R(5,5)=55$, 以及其他一些错误结果 $R(3,3)=3, R(5,6)=94, R(6,6)=178$ 等，并且不知道求 Ramsey 数有多么困难:

"P.Erdös 多次用下面这个比喻来说明求 Ramsey 数的困难程度. 设想一群外星人侵入地球，并威胁说如果地球上的人类不能在一年内求出 $R(5,5)$ 的值，他们就要消灭人类. 此时我们最好的策略也许是动员地球上所有计算机和计算机科学家来解决这个困难的问题，以使人类免遭灭顶之灾. 然而，如果外星人要求我们求出 $R(6,6)$, 那么除了对这批入侵者发动先发制人的打击外，别无其它选择" (转引自 [4]:234 或 [5]:17) □ P.Erdös 还说："需要过上百万年，我们才会得到一些认识，甚至那时也不能达到完全的认识，因为我们面对的是无限"(转引自 [5]:147). 美国数学会前任主席 R.L.Graham 猜想人类至少 100 年内发现不了 $R(5,5)$ 的准确值 (转引自 [5]:146).

这就提供一个启示：引用他人的文献必须谨慎. 此外，文献 [1] 中 "求 $R(5,5)$ 的下界，已知 $R(5,5)=55$" 等由准确值求下界是毫无意义的.

3 一般的二色 Ramsey 数 $R(k,q)$ 的非平凡下界公式是否存在？

构造性方法是研究 Ramsey 数下界的一个重要方法，迄今已知的最好的 Ramsey 数的下界都是用构造性方法作出的. 为了避免文献 [1] 与文献 [2] 所说的构造性方法混淆，我们把文献 [1] 的方法称为拼图法.

1987 年 R.Mathon[7] 用拼图法证明了多色 Ramsey 数 $Rn(q)$ 的一个下界公式，A.Robertson[8] 也得到一些多色 Ramsey 数的下界公式. 但除了 1993 年 F.R.K.Chung[9] 等人得到关于 $R(3,q)$ 这种特殊类型的下界公式 $R(3,4t+1)\geq 6R(3,t+1)-5$ 外，被文献 [3] 收录的一般的二色 Ramsey 数. $R(k,q)$ 只有一个平凡的下界公式:

$$R(k,p+q-1)\geq R(k,p)+R(k,q)-1. \tag{1}$$

论文 [3] 说它是 Easy, 因为这确实很容易：只须用到非常简单的拼图法而没有任何技巧. 把 $R(k,p)$ Ramsey 图与 $R(k,q)$ Ramsey 图简单地拼凑到一起，不必再添加任何联边，就得到一个新的图 G, 易知图 G 中既没有 k 点团，也没有 $p+q-1$ 独立点集，这就推导得平凡的下界公式 (1). 由熟知的 $R(k,l)=R(l,k)$ 即得

$$R(p+q-1,k)\geq R(p,k)+R(q,k)-1. \tag{2}$$

把 p,q,k 分别换成 $k-t,t+1,l$ 即得

$$R(k,l)\geq R(k-t,l)+R(t+1,l)-1. \tag{3}$$

公式 (1),(2),(3) 是等价的. 应用公式 (1) 并由 $R(4,12)\geq 128$[10] 等已知结果可以推出 $R(4,13)\geq 133, R(4,14)\geq 141, R(4,15)\geq 153$; 应用公式 (1) 并由 $R(6,6)\geq 102$[11] 可以推出 $R(6,11)\geq 203$,

这些结论被认为是迄今已知的最好下界收录到动态综述论文 [3] 中. 论文 [3] 说它们是 Easy; 但它们多年来保持着最佳纪录，可见公式 (1) 虽然平凡但却是很有用的.

由于 Ramsey 数问题的复杂性, 用拼图法对公式 (1) 作任何实质性的改进都是非常困难的. 这是因为在构作拼凑图时往往会顾此失彼，容易出现像文献 [1] 那样的错误. 需要高超的构图技巧：既要添加较多联边使独立数尽量减少，又不能添加太多联边以免团数的增加. G.Exoo[12] 把 35 个顶点的循环图 G_{35} 与其他 4 个点 a 、 b 、 c 、 d 巧妙地联边，再用计算机验证这个拼凑图的团数为 2, 独立数为 9, 从而得到迄今已知的最好的结论 $R(3,10)\geq 40$. 这表明用拼图法即使改进个别 Ramsey 数的下界也是很困难的.

现有的文献资料表明，学术界多年来试图就一般的情形改进公式 (1) 的各种努力都未见成效，这就促使人们进一步思考一个非常困难的问题：一般的二色 Ramsey 数 $R(k,q)$ 的非平凡的下界公式是否存在？作为公式 (1) 的推广，有两个猜想：

猜想 1 对于任意整数 $k,p\geq 3$, 存在仅与 k 有关的参数 $a\geq k-1$, 使不等式 $R(k,p+1)\geq R(k,p)+a$ 成立.

猜想 2 对于任意给定的整数 $k\geq 3$, 都存在仅与 k 有关的参数 $b\geq 1,c\geq -1$, 使不等式 $R(k,p+q-b)\geq R(k,p)+R(k,q)+c$ 对于任意整数 $p,q\geq b+2$ 成立.

当参数 $a=k-1,b=1$ 与 $c=-1$ 时就归结到公式 (1) 及其推论 (平凡的情形), 它们都是已知的、正确的；当参数为 $a\geq k,b\geq 2$ 或者 $c\geq 0$ 时就是有待证明的猜想，其中参数 a 或 b 或 c 的任何微小的改进 (例如 $a=k,b=1$ 与 $c=0$) 都是很有意义的并且是很困难的. 属于猜想 2 的更进一步的情形是参数 $b=2$ 与 $c=-1$(即文献 [1] 试图证明而未获成功的 “定理”), 这是更有意义的并且是更加困难的问题.

参考文献：

[1] 刘富贵. 关于 Ramsey 数下界的部分结果 [J]. 数学的实践与认识， 2002, **32**(1): 97–99.
LIU Fu-gui. *Some results for the lower bound of Ramsey numbers* [J]. Math. Practice Theory, 2002, **32**(1): 97–99. (in Chinese)

[2] GREENWOOD R E, GLEASON A M. *Combinatorial Relations and Chromatic Graphs* [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955, **7**: 1–7.

[3] RADZISZOWSKI S P. *Small Ramsey numbers* [J]. Electron. J. Combin., 2004, **10**: 1–48.

[4] 李乔. 组合数学基础 [M]. 北京：高等教育出版社， 1993.
LI Qiao. *Combinatorics Basic* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese)

[5] 李乔. 拉姆塞理论 [M]. 长沙：湖南教育出版社， 1990.
LI Qiao. *Ramsey Theory* [M]. Changsha: Hunan Education Press, 1990. (in Chinese)

[6] MCKAY B D, RADISZOWSKI S P. *Subgraph counting identities and Ramsey numbers* [J]. Journal of Combinatorial Theory， Series B, 1997, **69**: 193–209.

[7] MATHON R. *Lower bounds for Ramsey numbers and association schemes* [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1987, **42**: 122–127.

[8] ROBERTSON A. *Some Results in Ramsey Theory* [D]. Department of Mathematics， Temple University, 1999.

[9] CHUNG F R K, CLEVE R, DAGUM P. *A Note on Constructive Lower Bounds for the Ramsey Numbers* $R(3,t)$ [J]. Journal of Combinatorial Theory， Series B, 1993, **57**: 150–155.

[10] SU Wen-long, LUO Hai-peng, LI Qiao. *New lower bounds of classical Ramsey nu mbers R(4,12),R(5,11) and R(5,12)* [J]. Chinese Science Bulletin, 1998, **43**: 528.

[11] KALBFLEISCH J G. *Construction of specail edge chromatic graphs* [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, **8**: 575–584.

[12] EXOO G. *On two classical Ramsey numbers of the from R(3,n)* [J]. SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1989, **2**: 488–490.

Some Notes on Lower Bound for Ramsey Numbers Using Patching Method

WU Kang[1], *SU Wen-long*[2], *LUO Hai-peng*[3]
(1. South China Normal University, Guangzhou 510631, China;
2. Guangxi University Wuzhou Branch, Wuzhou 543002, China;
3. Guangxi Academy of Sciences, Nanning 530022, China)

Abstract: In this paper, we point out some mistakes in [1], and remark on some difficult problems on lower bounds for Ramsey numbers by using patching method. Moreover, we give two suppositions.

Key words: Ramsey numbers; the lower bounds; patching method.