第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0665-06 文献标识码: A

诱导 I-Fuzzy 拓扑空间

岳跃利, 方进明
(中国海洋大学数学系, 山东 青岛 266071)
(E-mail: yueliyue@163.com)

摘 要: 本文引入了生成 I-Fuzzy 拓扑空间的概念, 研究了 Fuzzifying 拓扑空间 (X,τ) 与其相应的生成 I-Fuzzy 拓扑空间 $(I^X,\omega(\tau))$ 的联系; 然后介绍了 ω, ι 算子及它们的运算性质; 最后给出并研究了 I-Fuzzy 诱导空间, I-Fuzzy 弱诱导空间, I-Fuzzy 满层空间的定义和它们间的联系.

关键词: Fuzzifying 拓扑; I-Fuzzy 诱导拓扑空间; I-Fuzzy 底空间; I-Fuzzy 满层空间; 光滑良紧.
MSC(2000): 54A10, 54A40
中图分类: O189

1 生成 I-Fuzzy 拓扑

Chang[1] 定义的模糊拓扑空间是学者们研究的最多的一类拓扑空间, Höhle 和 Šostak 在文献 [2] 中还讲述了其它几种产生拓扑的方法. 本文就以 1980 年 Höhle[3] 介绍的一种基于模糊集开程度的的拓扑结构 —I-Fuzzy 拓扑为研究对象. 1991 年, 应明生 [4] 从多值逻辑角度提出了 Fuzzifying 拓扑与 Bifuzzy 拓扑 (与 Höhle 的 I-Fuzzy 拓扑一致), 其中 Fuzzifying 拓扑是建立在分明集的基础之上, 而后者是建立在模糊集之上. 近来很多学者把研究重点放到了 Fuzzifying 拓扑上 [5–7].

我们知道 Chang 意义下的诱导空间理论是模糊拓扑学中非常重要的部分, 但在 I-Fuzzy 拓扑空间中还没有相应的研究. 本文将 Chang 意义下的诱导空间理论推广到 I-Fuzzy 拓扑空间. 引入了生成 I-Fuzzy 拓扑空间的概念, 研究了 Fuzzifying 拓扑空间 (X,τ) 与其相应的生成 I-Fuzzy 拓扑空间 $(I^X,\omega(\tau))$ 的联系; 然后介绍了 ω, ι 算子及它们的运算性质; 最后给出并研究了 I-Fuzzy 诱导空间, I-Fuzzy 弱诱导空间, I-Fuzzy 满层空间的定义和它们间的联系.

文中, $I=[0,1]$, $I_0=[0,1)$,$I_1=(0,1]$. X 是非空集合, (X,τ) 是 Fuzzifying 拓扑空间, 其中 $\tau: 2^X \to I$, 满足 i) $\tau(\varphi)=\tau(X)=1$; ii) $\forall A,B\subset X$, $\tau(A\wedge B)\geq\tau(A)\wedge\tau(B)$; iii) $\forall A_t\subset X$, $t\in T$, $\tau(\vee_{t\in T}A_t)\geq\wedge_{t\in T}\tau(A_t)$.

定义 1.1[3] X 是非空集合, 若 $\delta: I^X\to I$, 满足:

i) $\delta(0_X)=\delta(1_X)=1$; ii) $\forall A, B\in I^X$, $\delta(A\wedge B)\geq\delta(A)\wedge\delta(B)$;

iii) $\forall A_t\in I^X$, $t\in T$, $\delta(\vee_{t\in T}A_t)\geq\wedge_{t\in T}\delta(A_t)$.

我们称 δ 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑, 序对 (I^X,δ) 叫 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑空间.

引理 1.1 设 (X,τ) 是 Fuzzifying 拓扑空间, $\forall A\in I^X$, 令 $\omega(\tau)(A)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A))$(其中 $\sigma_r(A)=\{x|A(x)>r\}$). 则 $\omega(\tau)$ 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑.

收稿日期: 2003-05-05
基金项目: 山东省自然科学基金 (Q99A02)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 i) $\omega(\tau)(0_X)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(0_X))=\tau(\varphi)=1$, $\omega(\tau)(1_X)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(1_X))=\tau(X)=1$.

ii) $\forall A,B\in I^X$, 则

$$\begin{aligned}\omega(\tau)(A\wedge B)&=\bigwedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A\wedge B))=\bigwedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A)\wedge\sigma_r(B))\\&\geq\bigwedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A))\wedge\tau(\sigma_r(B))\\&=(\bigwedge_{r\in I}(\tau(\sigma_r(A))))\wedge(\bigwedge_{r\in I}(\tau(\sigma_r(B))))\\&=\omega(\tau)(A)\wedge\omega(\tau)(B).\end{aligned}$$

iii) $\forall A_t\in I^X$, $t\in T$, 有 $\omega(\tau)(\vee_{t\in T}A_t)=\wedge_{r\in I}\tau(\vee_{t\in T}\sigma_r(A_t))\geq\wedge_{r\in I}\wedge_{t\in T}\tau(\sigma_r(A_t))=\wedge_{t\in T}\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A_t))=\wedge_{t\in T}\omega(\tau)(A_t)$. 故 $\omega(\tau)$ 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑.

定义 1.2 由引理 1.1 知 $\omega(\tau)$ 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑, 我们称 $(I^X,\omega(\tau))$ 是 (X,τ) 的生成 I-Fuzzy 拓扑空间.

引理 1.2 $\forall A\subset X$, 有 $\omega(\tau)(1_A)=\tau(A)$. 若 λ 是 X 到 I 的常值映射, 则 $\omega(\tau)(\lambda)=1$.

定义 1.3[3] 设 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$, 若 $\forall A\subset Y$, 有 $\tau_1(f^{-1}(A))\geq\tau_2(A)$, 称 f 是 (X,τ_1) 到 (Y,τ_2) 的连续映射. 若 $\forall A\subset Y$, $\tau_2(A)>0$, 有 $\tau_1(f^{-1}(A))>0$, 称 f 是 (X,τ_1) 到 (Y,τ_2) 的弱连续映射.

为了书写方便, 映射 $f:X\to Y$ 的 Zadeh 型扩张映射我们也用 f 表示.

定理 1.1 $f:(I^X,\omega(\tau_1))\to(I^Y,\omega(\tau_2))$ 是连续映射当且仅当 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 是连续映射.

证明 *必要性*. $\forall B\subset Y$, $\tau_1(f^{-1}(B))=\omega(\tau_1)(1_{f^{-1}(B)})=\omega(\tau_1)(f^{-1}(1_B))$. 因为

$$f:(I^X,\omega(\tau_1))\to(I^Y,\omega(\tau_2))$$

是连续映射, 所以

$$\omega(\tau_1)(f^{-1}(1_B))\geq\omega(\tau_2)(1_B)=\tau_2(B),$$

即 $\tau_1(f^{-1}(B))\geq\tau_2(B)$. 故 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 是连续映射.

充分性. $\forall B\in I^Y$, $\omega(\tau_1)(f^{-1}(B))=\wedge_{r\in I}\tau_1(\sigma_r(f^{-1}(B)))=\wedge_{r\in I}\tau_1(f^{-1}(\sigma_r(B)))$. 因为 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 是连续映射, 所以 $\forall r\in I$, $\tau_1(f^{-1}(\sigma_r(B)))\geq\tau_2(\sigma_r(B))$, 则

$$\bigwedge_{r\in I}\tau_1(f^{-1}(\sigma_r(B)))\geq\bigwedge_{r\in I}\tau_2(\sigma_r(B))=\omega(\tau_2)(B).$$

故 $f:(I^X,\omega(\tau_1))\to(I^Y,\omega(\tau_2))$ 是连续映射.

定理 1.2 设 $f:(I^X,\omega(\tau_1))\to(I^Y,\omega(\tau_2))$ 是弱连续映射, 则 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 是弱连续映射.

证明 $\forall B\subset Y$, 若 $\tau_2(B)>0$, 则 $\omega(\tau_2)(1_B)>0$, 因为 $f:(I^X,\omega(\tau_1))\to(I^Y,\omega(\tau_2))$ 是弱连续映射, 所以 $\omega(\tau_1)(f^{-1}(1_B))>0$, 即 $\tau_1(f^{-1}(B))>0$. 故 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 是弱连续映射.

引理 1.3 设 (I^X,δ) 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑空间, $\forall A\subset X$, 令 $[\delta](A)=\delta(1_A)$. 则 $[\delta]$ 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑.

证明 i) $[\delta](\varphi)=\delta(0_X)=1$, $[\delta](X)=\delta(1_X)=1$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

ii) $\forall A,B\subset X$, $[\delta](A\wedge B)=\delta(1_{A\wedge B})=\delta(1_A\wedge 1_B)\ge\delta(1_A)\wedge\delta(1_B)=[\delta](A)\wedge[\delta](B)$;

iii) $\forall A_t\subset X$, $t\in T$, $[\delta](\vee_{t\in T}A_t)=\delta(1_{\vee_{t\in T}A_t})=\delta(\vee_{t\in T}1_{A_t})\ge\wedge_{t\in T}\delta(1_{A_t})=\wedge_{t\in T}[\delta](A_t)$. 所以 $[\delta]$ 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑.

引理 1.4 设 (I^X,δ) 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑空间，$\forall r\in I_0$, $\forall A\subset X$ 令 $\iota(\delta)^r(A)=\bigvee\{\delta(B)|\sigma_r(B)=A\}$, 则 $\iota(\delta)^r$ 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑.

证明 i) $\sigma_r(0_X)=\varphi$, $\iota(\delta)^r(\varphi)\ge\delta(0_X)=1$, $\sigma_r(1_X)=X$, $\iota(\delta)^r(X)\ge\delta(1_X)=1$.

ii) $\forall A,\ B\subset X$, $\forall\ \varepsilon>0$, 存在 $A_1,B_1\in I^X$, 满足 $\sigma_r(A_1)=A$, $\sigma_r(B_1)=B$ ，使得 $\iota(\delta)^r(A)-\varepsilon<\delta(A_1),\iota(\delta)^r(B)-\varepsilon<\delta(B_1)$. 因为 $\sigma_r(A_1\wedge B_1)=A\wedge B$, 所以 $\iota(\delta)^r(A\wedge B)\ge\delta(A_1\wedge B_1)\ge\delta(A_1)\wedge\delta(B_1)\ge(\iota(\delta)^r(A)-\varepsilon)\wedge(\iota(\delta)^r(B)-\varepsilon)=\iota(\delta)^r(A)\wedge\iota(\delta)^r(B)-\varepsilon$. 由 ε 的任意性，可得 $\iota(\delta)^r(A\wedge B)\ge\iota(\delta)^r(A)\wedge\iota(\delta)^r(B)$.

iii) $\forall A_t\subset X, t\in T,\forall\varepsilon>0$ 存在 $B_t\in I^X$, 满足 $\sigma_r(B_t)=A_t$, 使得 $\iota(\delta)^r(A_t)-\varepsilon<\delta(B_t)$, 因为 $\sigma_r(\vee_{t\in T}B_t)=\vee_{t\in T}\sigma_r(B_t)$, 所以 $\iota(\delta)^r(\vee_{t\in T}A_t)\ge\wedge_{t\in T}\delta(B_t)\ge\wedge_{t\in T}(\iota(\delta)^r(A_t)-\varepsilon)=\wedge_{t\in T}\iota(\delta)^r(A_t)-\varepsilon$. 则 $\iota(\delta)^r(\vee_{t\in T}A_t)\ge\wedge_{t\in T}\iota(\delta)^r(A_t)$. 所以 $\iota(\delta)^r$ 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑.

令 $\iota(\delta)=\wedge_{r\in I_0}\iota(\delta)^r$, 则 $\iota(\delta)$ 是 I-Fuzzifying 拓扑. 由 ω 和 [], ι 的定义我们容易得到下面的定理.

定理 1.3 (1) $[\omega(\tau)]=\tau$. (2) $\forall A\subset X$, $\omega([\delta])(1_A)=\delta(1_A)$. (3) $[\delta]\le\iota(\delta)$.

定理 1.4 $f:(I^X,\delta_1)\to(I^Y,\delta_2)$ 是连续映射，则 $f:(X,\iota(\delta_1))\to(Y,\iota(\delta_2))$ 是连续映射.

证明 $\forall A\subset Y$,

$$\iota(\delta_1)(f^{-1}(A))=\bigwedge_{r\in I_0}\vee\{\delta_1(B)|\sigma_r(B)=f^{-1}(A)\},\iota(\delta_2)(A)=\bigwedge_{r\in I_0}\vee\{\delta_2(B)|\sigma_r(B)=A\}.$$

若 $\sigma_r(B)=A$, 则 $\sigma_r(f^{-1}(B))=f^{-1}(A)$. 因为 $f:(I^X,\delta_1)\to(I^Y,\delta_2)$ 是连续映射，所以 $\delta_1(f^{-1}(B))\ge\delta_2(B)$. 故 $\iota(\delta_1)(f^{-1}(A))\ge\iota(\delta_2)(A)$. 从而 $f:(X,\iota(\delta_1))\to(Y,\iota(\delta_2))$ 是连续映射.

定理 1.5 $f:X\to Y$, (X,τ) 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑空间. 则 $\tau/f=\tau\circ f^{-1}$ 是 Y 上的 Fuzzifying 拓扑，且 $\omega(\tau/f)=\omega(\tau)/f$.

证明 i) $\tau/f(\varphi)=\tau(f^{-1}(\varphi))=1$, $\tau/f(Y)=\tau(f^{-1}(Y))=\tau(X)=1$.

ii) $\forall A,B\subset Y$,

$$\begin{aligned}\tau/f(A\wedge B)&=\tau(f^{-1}(A)\wedge f^{-1}(B))\ge\tau(f^{-1}(A))\wedge\tau(f^{-1}(B))\\&=\tau/f(A)\wedge\tau/f(B).\end{aligned}$$

iii) $\forall A_t\subset Y,t\in T$, $\tau/f(\vee_{t\in T}A_t)=\tau(\vee_{t\in T}(f^{-1}(A_t)))\ge\wedge_{t\in t}\tau(f^{-1}(A_t))=\wedge_{t\in T}\tau/f(A_t)$. 所以 $\tau/f=\tau\circ f$ 是 Y 上的 Fuzzifying 拓扑. $\forall A\in I^Y$,

$$\begin{aligned}\omega(\tau/f)(A)&=\bigwedge_{r\in I}\tau/f(\sigma_r(A))=\bigwedge_{r\in I}\tau(f^{-1}(\sigma_r(A)))\\&=\bigwedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(f^{-1}(A)))=\omega(\tau)(f^{-1}(A))=\omega(\tau)/f(A),\end{aligned}$$

即 $\omega(\tau/f)=\omega(\tau)/f$.

定理 1.6 若 $f:X\to Y$ 是双射，(Y,τ) 是 Fuzzifying 拓扑空间. 则 $f^{-1}(\tau)=\tau\circ f$ 是 X 上的 Fuzzifying 拓扑，且 $f^{-1}(\omega(\tau))=\omega(f^{-1}(\tau))$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 i) $f^{-1}(\tau)(\varphi)=\tau(f(\varphi))=\tau(\varphi)=1, f^{-1}(\tau)(X)=\tau(f(X))=\tau(Y)=1$.

ii) $\forall A,B\subset X$, $f^{-1}(\tau)(A\wedge B)=\tau(f(A)\wedge f(B))\geq\tau(f(A))\wedge\tau(f(B))=f^{-1}(\tau)(A)\wedge f^{-1}(\tau(B))$.

iii) $\forall A_t\subset X, t\in T$, $f^{-1}(\tau(\vee_{t\in T}A_t)=\tau(f(\vee_{t\in T}A_t)\geq\wedge_{t\in T}\tau(f(A_t))=\wedge_{t\in T}f^{-1}(\tau(A_t))$. 故 $f^{-1}(\tau)$ 是 X 上的 I-Fuzzy 拓扑. $\forall A\in I^X$,

$$f^{-1}(\omega(\tau))(A)=\omega(\tau)(f(A))=\bigwedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(f(A)))=\bigwedge_{r\in I}\tau(f(\sigma_r(A)))$$
$$=\bigwedge_{r\in I}f^{-1}(\tau(\sigma_r(A)))=\omega(f^{-1}(\tau)(A)))$$

定理 1.7 (1) $f:I^X\to I^Y$, (I^X,δ) 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑空间. 则 $\delta/f=\delta\circ f^{-1}$ 是 I^Y 上的 I-Fuzzy 拓扑, 且 $[\delta/f]=[\delta]/f$.

(2) 若 $f:I^X\to I^Y$ 是双射, (I^Y,δ) 是 I-Fuzzy 拓扑空间. 则 $f^{-1}(\delta)=\delta\circ f$ 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑, 且 $f^{-1}([\delta])=[(f^{-1}(\delta))]$.

2 I-Fuzzy 诱导拓扑空间

定义 2.1 设 (I^X,δ) 是 I^X 上的 I-Fuzzy 拓扑空间, 如果 $\forall A\in I^X$, 都有 $\delta(A)=\wedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)})$, 我们称 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 诱导拓扑空间. 如果 $\forall A\in I^X$, 都有 $\delta(A)\leq\wedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)})$, 我们称 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 弱诱导拓扑空间. 若对任意的 X 到 I 的常值映射 λ, 都有 $\delta(\lambda)=1$, 则称 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 满层空间.

定理 2.1 (I^X,δ) 是诱导 I-Fuzzy 拓扑空间当且仅当 (I^X,δ) 是可生成 I-Fuzzy 拓扑空间.

证明 *必要性*. 令 $\tau=[\delta]$, $\forall A\in I^X$, $\delta(A)=\wedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)})=\wedge_{r\in I}[\delta](\sigma_r(A))=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A))$ $=\omega(\tau)(A)$. 得 $\delta=\omega(\tau)$. 故 (I^X,δ) 是可生成 I-Fuzzy 拓扑空间.

充分性. 设 $\delta=\omega(\tau)$, $\forall A\in I^X$, $\delta(A)=\omega(\tau)(A)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A))=\wedge_{r\in I}\omega(\tau)(1_{\sigma_r(A)})=\wedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)})$. 故 (I^X,δ) 是诱导 I-Fuzzy 拓扑空间.

定理 2.2 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 满层空间当且仅当 $\omega([\delta])\leq\delta$.

证明 *必要性*. (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 满层空间. $\forall A\in I^X$,

$$\delta(A)=\delta(\bigvee_{r\in I}r1_{\sigma_r(A)})\geq\bigwedge_{r\in I}(\delta(r)\wedge\delta(1_{\sigma_r(A)}))=\bigwedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)})=\bigwedge_{r\in I}[\delta](\sigma_r(A))=\omega([\delta])(A),$$

即 $\omega([\delta])\leq\delta$.

充分性. 对任意的 X 到 I 的常值映射 λ,

$$\delta(\lambda)\geq\omega([\delta])(\lambda)=\bigwedge_{r<\lambda}[\delta](X)\wedge\bigwedge_{r\geq\lambda}[\delta](\varphi)=1.$$

所以 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 满层空间.

定理 2.3 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 弱诱导拓扑空间, 则 $[\delta]=\iota(\delta)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 由定理 1.3, 只须证明 $[\delta]\geq\iota(\delta)$. $\forall A\subset X$,

$$\begin{aligned}\iota(\delta)(A)&=\bigwedge_{r\in I}\vee\{\delta(B)|\sigma_r(B)=A\}\leq\bigwedge_{r\in I}\vee\{\bigwedge_{\lambda\in I}\delta(1_{\sigma_\lambda(B)})|\sigma_r(B)=A\}\\&\leq\bigwedge_{r\in I}\vee\{\delta(1_{\sigma_r(B)})|\sigma_r(B)=A\}=\bigwedge_{r\in I}\vee\{\delta(1_A)|\sigma_r(B)=A\}\\&=\delta(1_A)=[\delta](A)\end{aligned}$$

所以 $[\delta]\geq\iota(\delta)$. 则 $[\delta]=\iota(\delta)$.

定理 2.4 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 弱诱导拓扑空间当且仅当 $\omega([\delta])\geq\delta$.

证明 由弱诱导的定义易证.

由上面的定理我们可得下面的结论.

定理 2.5 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 诱导拓扑空间当且仅当 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 弱诱导拓扑空间和 (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 满层空间.

推论 2.1 若 (I^X,δ) 是可生成 I-Fuzzy 拓扑空间，则 $\omega([\delta])=\delta$.

3 光滑良紧

定义 3.1 (X,τ) 是 Fuzzifying 拓扑空间， $A\subseteq X$. 若 $\forall r\in I_1$, A 是 (X,τ^r)(其中, $\tau^r=\{B|B\subseteq X,\tau(B)\geq r\}$) 中的紧集，称 A 是 (X,τ) 中的光滑紧集. 若 X 是 (X,τ) 中的光滑紧集，则称 (X,τ) 是光滑紧空间.

定义 3.2[8] (I^X,δ) 是 I-Fuzzy 拓扑空间， $A\in I^X$. 若 $\forall r\in I_1$, A 是 (I^X,δ^r)(其中, $\delta^r=\{B|B\in I^X,\delta(B)\geq r\}$) 中的良紧集，称 A 是 (I^X,δ) 中的光滑良紧集. 若 1_X 是 (I^X,δ) 中的光滑良紧集，则称 (I^X,δ) 是光滑良紧空间.

定理 3.1 (X,τ) 是光滑紧空间当且仅当 $(I^X,\omega(\tau))$ 是光滑良紧空间.

证明 *充分性.* $\forall r\in I_1$, 设 $U=\{\mu_s|s\in S\}$ 是 (X,τ^r) 的任一开覆盖. 则 $\forall s\in S,\tau(\mu_s)\geq r$, 所以 $\omega(\tau)(1_{\mu_s})=\tau(\mu_s)\geq r$. 即 $1_{\mu_s}\in\omega(\tau)^r$, 从而 $1_{\mu_s'}\in(\omega(\tau)^r)'$. 取 $\beta>0$, 则 $\Psi=\{1_{\mu_s'}\}$ 是 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 的 $\beta-RF$, 由于 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 是良紧空间，所以存在 S 的有限子集 S_0, 使得 $\Psi_0=\{1_{\mu_s'}|s\in S_0\}$ 是 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 的 $\beta^- -RF$. 即存在 $\rho\in\beta^*(\beta)$, 使得 $\forall x\in X$, 存在 $s\in S_0$, 使得 $\rho>1_{\mu_s'}(x)$, 即 $x\in\mu_s$, 所以 $\{\mu_s|s\in S_0\}$ 是 (X,τ^r) 的有限开覆盖，所以 (X,τ^r) 是紧空间. 故 (X,τ) 是光滑紧空间.

必要性. $\forall r\in I_1$, $\alpha\in I_1$, 设 Ψ 是 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 的任一 $\alpha-RF$, 则 $\forall x\in X$, 存在 $A_x\in\Psi$, 使得 $x_\alpha\not\leq A_x$, 即 $\alpha\not\leq A_x(x)$, 所以存在 $s(x)\in\beta^*(\alpha)$, 满足 $s(x)\not\leq A_x(x)$, 所以 $x\in\sigma_{1-s(x)}(A_x')$, 因为 $A_x\in\omega(\tau)^{r'}$, 则 $\omega(\tau)(A_x')\geq r$, 所以 $\forall t\in I$, 都有 $\tau(\sigma_t(A_x'))\geq r$, 则 $\sigma_{1-s(x)}(A_x')\in\tau^r$, 所以 $\{\sigma_{1-s(x)}(A_x')|x\in X\}$ 是 (X,τ^r) 的开覆盖. 又由于 (X,τ^r) 是紧空间，所以存在 $\{\sigma_{1-s(x)}(A_x')|x\in X\}$ 的有限子集 $\{\sigma_{1-s(x_1)}(A_{x_1}'),\cdots,\sigma_{1-s(x_n)}(A_{x_n}')\}$ 是 (X,τ^r) 的开覆盖. 因为 $s(x_i)\in\beta^*(\alpha)$ $i=1,\cdots,n$, $\beta^*(\alpha)$ 是上定向集，所以存在 $s\in\beta^*(\alpha)$, 使得 $s(x_i)\leq s$, $i=1,\cdots,n$, 则 $\{\sigma_{1-s}(A_{x_1}'),\cdots,\sigma_{1-s}(A_{x_n}')\}$ 是 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 的 $s-RF$, 所以 $(I^X,\omega(\tau)^r)$ 是良紧

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

空间, 故 $(I^X, \omega(\tau))$ 是光滑良紧空间.

参考文献:

[1] CHANG C L. *Fuzzy topological spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1968, **24**: 182–190.

[2] HÖHLE U, ŠOSTAK A. *A general theory of fuzzy topological spaces* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, **73**: 131–149.

[3] HÖHLE U, ŠOSTAK A. *Upper Semicontinuous Fuzzy Sets and Applications* [C]. J. Math. Smooth Axiomatics, First IFSA Congres, Palam de mallora, July, 1986.

[4] YING Ming-sheng. *A new approach to fuzzy topology (I)* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **39**: 303–321.

[5] LOWEN R, XU Luo-shan. *Alternative characterizations of FNCS* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, **104**: 381–391.

[6] ZHANG De-xue, XU Luo-shan. *Categories isomorphic to FNS* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, **104**: 373–380.

[7] ZHANG De-xue. *L-Fuzzifying topologies as L-topologies* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, **125**: 135–144.

[8] 周武能. *L*- 光滑拓扑空间及光滑良紧性 [J]. 江汉石油学院学报, 1997, **19**: 123–126.
ZHOU Wu-neng. *L-Smooth topological space and smooth N-compactness* [J]. Journal of Jianghan Petroleum College, 1997, **19**: 123–126. (in Chinese).

[9] 王国俊. *L*-Fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.
WANG Guo-jun. *Theory of L-Fuzzy Topological Spaces* [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1988. (in Chinese)

[10] LIU Ying-ming, LUO Mao-kang. *Fuzzy Topology* [M]. World Scientific, Singapore, 1997.

Induced I-Fuzzy Topological Spaces

YUE Yue-li, FANG Jin-ming
(Dept. of Math., Ocean University of China, Qingdao 266071, China)

Abstract: In this paper, we introduce the concept of generated I-fuzzy topological space and study the connection between (X, τ) and its corresponding generated space $(I^X, \omega(\tau))$. We give the properties of operators ω and ι and introduce the concepts of induced I-Fuzzy topological space, I-Fuzzy background topological space and stratified I-Fuzzy topological space.

Key words: Fuzzifying topology; induced I-Fuzzy topological space; I-Fuzzy background topological space; stratified I-Fuzzy topological space; smooth compactness.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.