文章编号: 1000-341X(2005)04-0683-08 文献标识码: A

# 范畴中态射集的 Γ- 减序

岑建苗
(宁波大学数学系, 浙江 宁波 315211)
(E-mail: cjmclj@mail.nbptt.zj.cn; cjmlx@nbu.edu.cn)

**摘 要**: 本文引进并讨论态射集中的 Γ- 减序, 给出了 Γ- 减序的一些刻划和性质.

**关键词**: 态射; Γ- 逆; Γ- 减序.
**MSC(2000)**: 15A09
**中图分类**: O153.3

## 1 引言及准备

从七十年代开始, 偏序理论与广义逆理论接缘 [1-4], 从而偏序理论有了新的发展. 在广义逆的研究中, 从矩阵的广义逆到范畴中态射广义逆的研究已成为代数理论的重要研究内容 [5-7]. 在文 [8] 中, 研究了范畴中态射集减序的刻划. 在文 [9,10] 中, 引进并讨论了矩阵的 Γ- 逆. 在本文中, 我们引进并讨论范畴中态射集的 Γ- 减序. Γ- 减序是一种新的序.

本文约定, $\mathcal{C}$ 表示范畴. 对象 $X$ 到对象 $Y$ 的态射集记作 $M(X,Y)$, 态射合成顺序从左到右. 选定 $\alpha$, $\beta\in M(Y,X)$.

设 $A\in M(X,Y)$, 如果存在 $G\in M(X,Y)$ 使得

$$A\alpha G\beta A=A, \tag{1}$$

那么称 $G$ 为 $A$ 关于 $\alpha$ 和 $\beta$ 的 Γ- 减逆或 Γ(1)- 逆, 记为 $A^{(1)}_{\alpha,\beta}$ 或 $A^{-}_{\alpha,\beta}$ 或 $A^{=}_{\alpha,\beta}$ 等. 记 $A_{\alpha,\beta}\{1\}=\{G\in M(X,Y)\mid A\alpha G\beta A=A\}$, $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)=\{A\in M(X,Y)\mid A_{\alpha,\beta}\{1\}\neq\emptyset\}$.

如果 $G\in A_{\alpha,\beta}\{1\}$ 且又满足

$$G\beta A\alpha G=G, \tag{2}$$

那么称 $G$ 为 $A$ 关于 $\alpha$ 和 $\beta$ 的 Γ(1,2)- 逆, 记为 $A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}$ 或 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}$ 或 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$ 等. 记 $A_{\alpha,\beta}\{2\}=\{G\in M(X,Y)\mid G\beta A\alpha G=G\}$, $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}=A_{\alpha,\beta}\{1\}\bigcap A_{\alpha,\beta}\{2\}$.

显然, $G\in A_{\alpha,\beta}\{i\}$ 当且仅当 $\alpha G\beta\in A\{i\}$, $i=1,2$. 但对任意 $i$, 当 $H\in A\{i\}$ 时, 不一定存在 $G\in A_{\alpha,\beta}\{i\}$ 使得 $H=\alpha G\beta$.

现在, 我们定义态射集中的 Γ- 减序和一个 Γ- 拟序.

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $X,Y\in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $A\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y), B\in M(X,Y)$. 如果存在 $A^{-}_{\alpha,\beta}, A^{=}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1\}$ 使得

$$A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{-}_{\alpha,\beta},\quad A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A=A^{=}_{\alpha,\beta}\beta B, \tag{3}$$

那么记 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$ 并且 $\leq^{-}_{\alpha,\beta}$ 称为 $M(X,Y)$ 中的 Γ- 减序.

收稿日期: 2003-11-12

显然，对于每个 $A\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 有 $A\le^{-}_{\alpha,\beta}A$. 一般地，$\Gamma$- 减序 $\le^{-}_{\alpha,\beta}$ 不是 $M(X,Y)$ 中的偏序. 又对于 $A\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y), B\in M(X,Y)$, 如果 $A\le^{-}_{\alpha,\beta}B$, 那么 $A\le^{-}B$(减序). 反之不然. 在第二节中，我们将证明 $\le^{-}_{\alpha,\beta}$ 是 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 的偏序.

设 $A\in M(X,Y)$, 记 $A\alpha M(X,Y)=\{A\alpha F\mid F\in M(X,Y)\}, M(X,Y)\beta A=\{H\beta A\mid H\in M(X,Y)\}$. 对于 $A,B\in M(X,Y)$, 如果

$$A\alpha M(X,Y)\subseteq B\alpha M(X,Y),\ M(X,Y)\beta A\subseteq M(X,Y)\beta B. \tag{4}$$

那么记 $A\preceq_{\alpha,\beta}B$.

显然，对于每个 $A\in M(X,Y)$ 有 $A\preceq_{\alpha,\beta}A$. $\preceq_{\alpha,\beta}$ 是 $M(X,Y)$ 中的一个拟序，但一般不是 $M(X,Y)$ 中的偏序. 在第三节中，我们借助于 $M(X,Y)$ 中的这种拟序讨论 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 中的 $\Gamma$- 减序 $\le^{-}_{\alpha,\beta}$ 的一些刻划.

## 2 Γ- 减序

在这一节中，我们证明 $\Gamma$- 减序 $\le^{-}_{\alpha,\beta}$ 是 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 的一个偏序. 首先，我们有下面的结果.

**定理 1** 设 $A\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y), B\in M(X,Y)$, 那么下面的陈述是等价的

(i) $A\le^{-}_{\alpha,\beta}B$;

(ii) 在 $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 中存在 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$ 使得

$$A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B=A=B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A; \tag{5}$$

(iii) 在 $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 中存在 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$ 使得

$$A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta},\ A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B. \tag{6}$$

**证明** (i) $\Longrightarrow$ (ii). 令 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}=A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}$, 其中 $A^{-}_{\alpha,\beta},A^{=}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1\}$. 那么,

$$A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=A\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A=A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A=A,$$

$$\begin{aligned}A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}&=A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\\&=A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}=A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}=A^{\wedge}_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

这样，$A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$, 并且

$$A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B=A\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta B=A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta B=A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A=A,$$

$$B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=B\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A=B\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A=A\alpha A^{=}_{\alpha,\beta}\beta A=A.$$

所以，(ii) 成立.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 因为 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$,

$$A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B=A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B,\ \ A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}.$$

那么，(iii) 成立.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 显然. □

**引理 1**　设 $A \in M^-_{\alpha,\beta}(X,Y), B \in M(X,Y)$. 如果 $A \leq^-_{\alpha,\beta} B$, 那么

(i) $A \preceq_{\alpha,\beta} B$;

(ii) 在 $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 中存在 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$ 使得

$$A = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B, \quad A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}.$$

**证明**　根据定理 1 中的 (ii), (i) 显然成立. 又由定理 1 中的 (5) 式和 (6) 式知

$$B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A = A, \quad A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = A^{\wedge}_{\alpha,\beta}.$$

那么, (ii) 成立. □

**引理 2**　设 $A, B \in M^-_{\alpha,\beta}(X,Y)$. 如果 $A \leq^-_{\alpha,\beta} B$, 那么

(i) 对每个 $B^-_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A = A, \quad A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B = A = B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A;$$

(ii) 对每个 $A^{(1,2)}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}, B^-_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\};$$

(iii) 在 $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 中存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}$ 使得对所有 $B^-_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = A\alpha B^-_{\alpha,\beta}, \quad A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B = B^-_{\alpha,\beta}\beta A.$$

**证明**　(i) 根据引理 1 中的 (ii), 在 $A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 中存在 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$ 使得

$$A = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B, A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}.$$

于是, 对每个 $B^-_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = A,$$

$$A = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A.$$

类似地, 我们有 $A = A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B$. 因此 (i) 成立.

(ii) 根据 (i),

$$A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A = A,$$

$$\begin{aligned}&B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\\ &= B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}\\ &= B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta} = B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

即, 对所有 $B^-_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有 $B^-_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^-_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$. 因此, (ii) 成立.

(iii) 取引理 1(ii) 中的 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$. 令 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}=B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}$. 那么, 由 (ii) 知 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$. 又根据定理 1(ii) 和引理 1(ii) 有

$$\begin{aligned}A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}&=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}=A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\\&=B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}=B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

类似地, 可得 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A=B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A=A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B$. 于是, (iii) 成立. □

**引理 3** 设 $A\in M(X,Y),B\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$. 那么,

$$A\preceq_{\alpha,\beta}B\iff A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B=A=B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A,\tag{7}$$

e 其中 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 是任意的.

**证明** "$\Longrightarrow$". 因为 $A\preceq_{\alpha,\beta}B$, 所以在 $M(X,Y)$ 中存在 $F$ 使得对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A=B\alpha F=B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha F=B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A.$$

类似地, 可得 $A=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B$.

"$\Longleftarrow$". 因为 $A=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B$, 所以对 $H\beta A\in M(X,Y)\beta A$ 有 $H\beta A=H\beta A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\in M(X,Y)\beta B$. 于是, $M(X,X)\beta A\subseteq M(X,Y)\beta B$. 类似地, 有 $A\alpha M(X,Y)\subseteq B\alpha M(X,Y)$. □

**定理 2** $\leq^{-}_{\alpha,\beta}$ 是 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 中的偏序.

**证明** 设 $A,B\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$. 当 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$ 时, 由引理 2(i) 知对每个 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有 $A=B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A$. 当 $B\leq^{-}_{\alpha,\beta}A$ 时, 由定理 1 知存在 $B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得 $B=B\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A$. 因此, 当 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$, $B\leq^{-}_{\alpha,\beta}A$ 时, 就有 $B=B\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=A$.

又设 $A,B,C\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$. 当 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$ 时, 由引理 2(iii) 知存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得对任意 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta},\quad A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A=B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A.$$

当 $B\leq^{-}_{\alpha,\beta}C$ 时, 由定理 1(iii) 知存在 $B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得

$$B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta C=B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B,\quad C\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}=B\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}.$$

因此, 当 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$, $B\leq^{-}_{\alpha,\beta}C$ 时, 由引理 2(i) 知

$$\begin{aligned}(A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})\beta C&=(A\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta})\beta C=A\alpha(B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta C)=A\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta B\\&=A=B\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=C\alpha B^{\wedge}_{\alpha,\beta}\beta A=C\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A.\end{aligned}$$

于是, 根据定理 1 有 $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}C$. 从而, $\leq^{-}_{\alpha,\beta}$ 是 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 中的偏序. □

## 3 Γ- 减序的刻划

在这一节中, 我们只考虑 $M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$ 中的态射.

**定理 3** 设 $A,B\in M^{-}_{\alpha,\beta}(X,Y)$, 那么下面的陈述是等价的:

(i) $A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B$;

(iv) 存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}=B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta},\quad A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A=A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B=B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A;$$

(v) 存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得对所有 $B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 有

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\leq^{-}_{\alpha,\beta}B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta},\quad A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B$$

以及

$$B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B=A=A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A;$$

(vi) 存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\leq^{-}_{\alpha,\beta}B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta},\quad A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A\leq^{-}_{\alpha,\beta}B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B$$

并且对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A=A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A;$$

(vii) 存在 $G\in M(X,Y)$ 使得

$$A=B\alpha G\beta B,\quad B_{\alpha,\beta}\{1\}\subseteq A_{\alpha,\beta}\{1\};$$

(viii) $A\preceq_{\alpha,\beta}B$, 并且 $B_{\alpha,\beta}\{1\}\subseteq A_{\alpha,\beta}\{1\}$;
(ix) $A\preceq_{\alpha,\beta}B$, 并且 $A_{\alpha,\beta}\{1\}\cap B_{\alpha,\beta}\{1\}\neq\emptyset$;
(x) 对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta},B^{=}_{\alpha,\beta},B^{(1)}_{\alpha,\beta}\in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B=B\alpha B^{=}_{\alpha,\beta}\beta A=A=A\alpha B^{(1)}_{\alpha,\beta}\beta A;$$

(xi) 存在 $\beta$- 幂等态射 $S\in M(X,Y)$(即 $S\beta S=S$) 及 $\alpha$- 幂等态射 $T\in M(X,Y)$ 使得

$$S\beta B=A=B\alpha T;$$

(xii) 存在态射 $F\in M(X,Y)$ 及 $\alpha$- 幂等态射 $S\in M(X,Y)$ 使得

$$S\beta B=A=B\alpha F;$$

(xiii) 存在态射 $H\in M(X,Y)$ 和态射 $F\in M(X,Y)$ 使得

$$H\beta A=H\beta B=A=B\alpha F;$$

(xiv) 存在态射 $H\in M(X,Y)$ 和 $\alpha$- 幂等态射 $T\in M(X,Y)$ 使得

$$H\beta B=A=B\alpha T;$$

(xv) 存在态射 $H\in M(X,Y)$ 和态射 $F\in M(X,Y)$ 使得

$$H\beta B=A=A\alpha F=B\alpha F.$$

(xvi) 存在态射 $H \in M(X,Y)$ 和态射 $F \in M(X,Y)$ 使得

$$H\beta B = H\beta A = A = A\alpha F = B\alpha F.$$

**证明** (i) $\Longrightarrow$ (iv). 根据引理 2(iii) 即得.

(iv) $\Longrightarrow$ (v). 存在 $A^{\vee}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 使得对所有 $B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 有 $A = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A$. 又

$$B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A.$$

再由于

$$\begin{aligned} A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} &= A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} = A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} \\ &= B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

因为 $A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}$ 是 $\beta$- 幂等的, $A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} \in (A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}\{1\}$. 记 $(A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta} = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}$. 那么,

$$\begin{aligned} A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} &= (A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})\beta(A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta} = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = (B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta})\beta(A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta} \\ &= (A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta}\beta(A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}) = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} = (A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

即, $A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} \leq^{-}_{\alpha,\beta} B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}$. 类似地, 我们有 $A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A \leq^{-}_{\alpha,\beta} B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B$. 于是, (v) 成立.

(v) $\Longrightarrow$ (vi). 对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$\begin{aligned} A &= A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B \\ &= B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B = A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A. \end{aligned}$$

于是, (vi) 成立.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii). 因为 $B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}$ 是 $\beta$- 幂等的并且由引理 2(i) 知 $A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} \leq^{-}_{\alpha,\beta} B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}$, 所以

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta(B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta})^{-}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}.$$

于是, $A = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A$. 类似地, 有 $A = A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B$. 从而,

$$A = A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha G\beta B,$$

其中 $G = B^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha B^{(1,2)}_{\alpha,\beta} \in M(X,Y)$. 又, 对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有 $A = A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A$. 于是, $B_{\alpha,\beta}\{1\} \subseteq A_{\alpha,\beta}\{1\}$. 那么, (vii) 成立.

(vii) $\Longrightarrow$ (viii). 因为 $A = B\alpha G\beta B$, 根据 (4) 式, 显然有 $A \preceq_{\alpha,\beta} B$. (viii) 成立.

(viii) $\Longrightarrow$ (ix). 显然.

(ix) $\Longrightarrow$ (x). 根据引理 3, 因为 $A \preceq_{\alpha,\beta} B$, 所以对所有 $B^{-}_{\alpha,\beta}, B^{=}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有 $A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B = A = B\alpha B^{=}_{\alpha,\beta}\beta A$. 由于 $A_{\alpha,\beta}\{1\} \cap B_{\alpha,\beta}\{1\} \neq \emptyset$, 存在 $B^{\sim}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 使得对所有 $B^{(1)}_{\alpha,\beta} \in B_{\alpha,\beta}\{1\}$ 有

$$\begin{aligned} A &= A\alpha B^{\sim}_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{\sim}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{=}_{\alpha,\beta}\beta A \\ &= A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{(1)}_{\alpha,\beta}\beta B\alpha B^{=}_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha B^{(1)}_{\alpha,\beta}\beta A. \end{aligned}$$

于是，(x) 成立.

(x) $\Longrightarrow$ (xi). 在 $A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta B = B\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = A$ 中，令 $A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta} = S$, $B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = T$. 因为 $A\alpha B^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = A$, $S$ 是 $\beta$- 幂等的和 $T$ 是 $\alpha$- 幂等的. 于是，(xi) 成立.

(xi) $\Longrightarrow$ (xii). 显然.

(xi) $\Longrightarrow$ (xiii). 令 $H = S$, 那么

$$H\beta A = S\beta S\beta B = S\beta B = H\beta B = A = B\alpha F.$$

于是，(xiii) 成立.

(xiii) $\Longrightarrow$ (xiv). 因为对 $A^{-}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1\}$, $A = A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = B\alpha F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A$. 令 $V = F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A \in M(X,Y)$, 那么，

$$\begin{aligned} V\alpha V &= F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta H\beta B\alpha F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A \\ &= F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta H\beta A\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = F\alpha A^{-}_{\alpha,\beta}\beta A = V. \end{aligned}$$

于是，$H\beta A = A = B\alpha T$, 其中 $T = V$. 从而，(xiv) 成立.

(xiv) $\Longrightarrow$ (xv). 类似 "(xii) $\Longrightarrow$ (xiii)" 的证明.

(xv) $\Longrightarrow$ (xvi). 因为 $H\beta A = H\beta A\alpha F = H\beta B\alpha F = A\alpha F = A$, 所以 (xvi) 成立.

(xvi) $\Longrightarrow$ (i). 设 $A^{(1,2)}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$, 记 $A^{\vee}_{\alpha,\beta} = A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\alpha F$. 那么,

$$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H\beta A = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H\beta B\alpha F = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha F = A\alpha F = A,$$

$$\begin{aligned} A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta} &= A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H\beta A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\alpha F = A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H\beta B\alpha F\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H \\ &= A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha F\beta A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H = A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H = A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H = A^{\vee}_{\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

即，$A^{\vee}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$. 又，$A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta H\beta B = A\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}\beta A = A$. 那么,

$$A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A = A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta A\alpha A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B = A^{\vee}_{\alpha,\beta}\beta B.$$

令 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = F\alpha A^{(1,2)}_{\alpha,\beta}$. 类似地，有 $A^{\wedge}_{\alpha,\beta} \in A_{\alpha,\beta}\{1,2\}$ 并且 $A\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta} = B\alpha A^{\wedge}_{\alpha,\beta}$. 于是，$A \leq^{-}_{\alpha,\beta} B$. 从而，(i) 成立.

## 参考文献：


[1] BAKSALARY J K, PUKELSHEIM S F, STYAN P H. *Some properties of Matrix partial orderings* [J]. Linear Algebra Appl., 1989, **119**: 57–85.

[2] MITRA S K, HARTWIG R E. *Partial orders based on outer inverses* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **176**: 3–20.

[3] BAKSALARY J K, MITRA S K. *Left-star and right-star partial orderings* [J]. Linear Algebra Appl., 1991, **149**: 73–89.

[4] BAKSALARY J K. *A relationship between the star and minus orderings* [J]. Linear Algebra Appl., 1986, **82**: 163–167.

[5] DAVIS D L, ROBINSON D W. *Generalized inverses of morphisms* [J]. Linear Algebra Appl., 1972, **5**: 319–328.

[6] 曹重光. 关于态射的广义逆 [J]. 数学学报，1991, **34**(3): 403–407.
CAO Chong-guang. *On Generalized inverses of morphisms* [J]. Acta Math. Sinica, 1991, **34**(3): 403–407. (in Chinese)

[7] ROBINSON D W, PUYSTJENS R. *The Moore-Penrose inverses of morphisms with kernels*[J]. Linear Algebra Appl., 1987, **96**: 65–86.

[8] 庄瓦金. 范畴中态射集减序的刻划 [J]. 数学学报, 1994, **37**(2): 172–179.
ZHUANG Wa-jin. *Characterizations of the minus partial order of morphism set in a category* [J]. Acta Math. Sinica, 1994, **37**(2): 172–179. (in Chinese)

[9] 江声远. 矩阵的 Γ 逆与约束线性方程组 [J]. 曲阜师范大学学报, 1988, **14**(3): 50–55.
JIANG Shen-yuan. *Γ-inverses of matrices and constrained linear equation system* [J]. J. Qufu Normal University, 1988, **14**(3): 50–55. (in Chinese)

[10] 江声远. 矩阵的 Γ 逆在一类约束系统中的应用 [J]. 数学研究与评论, 1994, **14**(2): 277–284.
JIANG Sheng-yuan. *An application of Γ-inverses of matrices to a class of constrained system* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1994, **14**(2): 277–284. (in Chinese)

## Γ-minus Ordering of Morphism Set in Category

*CEN Jian-miao*
(Dept. of Math., Ningbo University, Zhejiang 315211, China )

**Abstract**: The Γ-minus ordering of morphism set in a category is introduced and discussed. Some characterizations of the Γ-minus ordering are given.

**Key words**: morphism; Γ-inverse; Γ-minus ordering.