第25卷第4期　数学研究与评论　Vol.25, No.4
2005年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0695-08　文献标识码: A

线性模型参数 M 估计的强相合性

陈建东 [1,2]

(1. 皖西学院数理系, 安徽 六安 237012; 2. 中国科学技术大学统计与金融系, 安徽 合肥 230026)
(E-mail: chen_jd@mail.la.ah163.net)

摘　要: 本文研究线性模型中回归参数 M 估计的强相合性, 给出一些较弱的充分条件. 与相应结论比较, 这里给出的条件对矩的要求有实质性的改进.

关键词: 线性模型; M 估计; 强相合性.
MSC(2000): 62H10, 60F15
中图分类: O212.7

1 引言与结论

考虑线性回归模型

$$y_i = x_i'\beta_0 + e_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.1}$$

其中: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为已知的 p 维向量, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为随机误差, β_0 为未知的 p 维回归参数向量. 设 ρ 为 R^1 上的函数, β_0 的 M 估计定义为满足下式的 $\hat\beta_n$:

$$\sum_{i=1}^n \rho\left(y_i - x_i'\hat\beta_n\right) = \min_{\beta\in R^p} \sum_{i=1}^n \rho\,(y_i - x_i'\beta). \tag{1.2}$$

记 $S_n = x_1x_1' + x_2x_2' + \cdots + x_nx_n'$, $d_n = \max_{1\le i\le n} x_i'S_n^{-1}x_i$, 此处假定 S_n^{-1} 存在, 设 ρ 为凸函数, 以 Ψ_- 和 Ψ_+ 分别记 ρ 的左, 右导数. 近年来, 许多学者对 M 估计进行了研究, 获得了许多突出性成果, 专著 [1] 对这些成果做了比较全面的论述, 其中关于 M 估计的强相合性有如下结论.

定理 A　设 $e_1, e_2, \cdots$ 为 iid., ρ 为凸函数, 满足以下两个条件:

1°. 存在常数 $l_1 > 0, l_2 > 0$, 使

$$E(\rho(e_1 + u) - \rho(e_1)) \ge l_1u^2,\quad |u| < l_2. \tag{1.3}$$

2°. 存在常数 $\Delta > 0$, 使

$$E|\Psi_+(e_1 \pm \Delta)|^m \le h_m < \infty,\quad m = 1, 2, \cdots, \tag{1.4}$$

则当存在 $\delta > 0$, 使

$$d_n = O(n^{-\delta}) \tag{1.5}$$

收稿日期: 2003-06-18
基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金 (2003KJ328)

时，$\hat{\beta}_n$ 为 β_0 的强相合估计.

定理 B[2] 设 $e_1, e_2, \cdots$ 为 iid., ρ 为凸函数，使 (1.3) 式成立. 且设

3°. 存在常数 $\Delta > 0$ 和 $0 < \delta \le 1$, 使 (1.5) 式成立且

$$E|\Psi_+(e_1 \pm \Delta)|^{2/\delta} \le h < \infty \tag{1.6}$$

成立时，$\hat{\beta}_n$ 为 β_0 的强相合估计.

上述结论对矩条件的要求都过强，(1.6) 式虽然降低了 (1.4) 式对矩条件的要求，但还不只是二阶矩. 因此，我们的目标是继续降低对矩条件的要求，朝着二阶矩目标努力，我们的结论是：

定理 1 设 $e_1, e_2, \cdots$ 为 iid., ρ 为凸函数，使 (1.3) 式成立. 且设

4°. 存在常数 $\Delta > 0$ 和 $0 < \delta \le 1$, 使 (1.5) 式成立且

$$E|\Psi_+(e_1 \pm \Delta)|^{1/\delta} \le h < \infty \tag{1.7}$$

时，$\hat{\beta}_n$ 为 β_0 的强相合估计.

注 1 专著 [1] 已说明：d_n 趋于 0 的数量至多为 $O(1/n)$. 也就是说，(1.5) 式中的 δ 应满足 $0 < \delta \le 1$. 因此，定理 A 和定理 B 都为定理 1 的推论.

注 2 专著 [1]P47 曾提出：在条件 $E|\Psi_+(e_1 \pm \Delta)|^r < \infty$ (对于某个 $r \in [1,2]$) 下，M 估计弱相合性问题. 本定理从一个侧面部分地回答了此问题.

注 3 当 $\frac{1}{2} \le \delta \le 1$ 时，在二阶矩存在的条件下，就有 $\hat{\beta}_n$ 为 β_0 的强相合估计，因此条件 (1.7) 对条件 (1.6) 和 (1.4) 作了本质性的改进.

注 4 尤其值得注意的是，当 $\delta = 1$ 时，即使在一阶矩存在的条件下，我们也得到了 $\hat{\beta}_n$ 为 β_0 的强相合估计，因此定理 1 作了突破性的改进.

2 定理的证明

在证明定理之前，先引进如下引理：

引理 1[3] 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立，$E\xi_i = 0$ 且 $|\xi_i| \le b < \infty (1 \le i \le n)$. 记 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\xi_i)/n$, 则对任意的 $u > 0$, 都有 $P(\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^n \xi_i| \ge u) \le 2\exp(-\frac{nu^2}{2\sigma^2 + bu})$.

引理 2[4] 设 $\{x_n\}$ 是独立随机变量序列，$Ex_n = 0$. 正数序列 $a_n \uparrow \infty$, 且对某 $1 \le p \le 2$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{E|x_n|^p}{a_n^p} < \infty$, 那么 $a_n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \to 0$ a.s..

Kronecker 引理[4] 设 $\{a_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 是两实数序列，$0 < a_n \uparrow \infty$, $\sum_{n=1}^\infty x_n/a_n$ 收敛，那么 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \to 0$.

在证明的行文过程中，用 $C, c_0, c_1, c_2, \cdots$ 表示与 n 无关的绝对正常数，在同一个式子中不同位置的 C 值可能不同.

定理 1 的证明 不失一般性，不妨设 $\beta_0 = 0$. 令

$$x_{ni} = S_n^{-1/2} x_i \ \ (1 \le i \le n), \ \ \beta_{n0} = S_n^{-1/2} \beta_0, \tag{2.1}$$

则模型 (1.1) 可改写为

$$y_i = x_{ni}' \beta_{n0} + e_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.2}$$

从而

$$\sum_{i=1}^n x_{ni} x_{ni}' = I_p, \ \ \sum_{i=1}^n \|x_{ni}\|^2 = p, \ \ d_n = \max_{1 \le i \le n} \|x_{ni}\|^2. \tag{2.3}$$

以 β_n^* 记在模型 (2.2) 下并使用函数 ρ 时，β_{n0} 的 M 估计，则有 $\hat{\beta}_n = S_n^{-1/2}\beta_n^*$. 取

$$\varepsilon = l_1/2, 0<\eta<\min(1,\Delta,l_2), \tilde{b}_n = [\eta/\sqrt{d_n p}],$$

$$D_n = \{\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)': -\tilde{b}_n \le \beta_i \le \tilde{b}_n, 1\le i\le p\},$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 取整数 $m>4/\delta-3$, 把超立方体 D_n 的各边分为 $2\tilde{b}_n^{m+1}$ 等分，从而把 D_n 剖分为 $(2\tilde{b}_n^{m+1})^p$ 个超立方体，记为 $\{B_j: 1\le j\le N_n\}$, $N_n=(2\tilde{b}_n^{m+1})^p$, B_j 的边长为 $\tilde{b}_n^{-m}$, 其中心记为 b_j. 令：

$$\Phi_{ni}(\beta)=\rho(e_i)-\rho(e_i-x_{ni}'\beta),\ \Lambda_{ni}(\beta)=E\Phi_{ni}(\beta),\ R_{ni}(\beta)=\Phi_{ni}(\beta)-\Lambda_{ni}(\beta).$$

定义事件：

$$E_n=\{\sup_{\beta\in D_n}|\sum_{i=1}^n R_{ni}(\beta)|\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2\},$$

$$E_{n1}=\{\sup_{1\le j\le N_n}|\sum_{i=1}^n R_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2/2\},\quad E_{n2}=\{\sup_{1\le j\le N_n}\sup_{\beta\in B_j}|\sum_{i=1}^n(R_{ni}(\beta)-R_{ni}(b_j))|\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2/2\}$$

$$F_n=\{\sum_{i=1}^n\rho(y_i)\ge\inf_{|\beta|=\tilde{b}_n}\sum_{i=1}^n\rho(y_i-x_{ni}'\beta)\}=\{\sum_{i=1}^n\rho(e_i)\ge\inf_{|\beta|=\tilde{b}_n}\sum_{i=1}^n\rho(e_i-x_{ni}'\beta)\},$$

由 [1] 中 P65–69 定理 3.1 的证明知，$\forall\varepsilon_0>0$, 有

$$\left\{\left\|\hat{\beta}_n\right\|\ge\varepsilon_0\right\}\subset\left\{\|\beta_n^*\|\ge\tilde{b}_n\right\}\subset F_n\subset E_n\subset E_{n1}\cup E_{n2}. \tag{2.4}$$

因此，为证明定理的结论，我们仅需要证明：

$$\sum_{i=1}^\infty P(E_{n1})<\infty, \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^\infty P(E_{n2})<\infty. \tag{2.6}$$

(一) 先证明 (2.6) 式. 记 $g(x)=\max(|\Psi_+(x+\Delta)|,|\Psi_+(x-\Delta)|)$, 则由 (1.7) 式得，$Eg(e_1)\le 2h<\infty$. 由 ρ 的凸性知，当 $a,b\in(x-\Delta,x+\Delta)$ 时，有 $|\rho(b)-\rho(a)|\le|b-a|g(x)$. 而当 $\beta\in D_n$ 时，有

$$|x_{ni}'b_j|\le\sqrt{d_np}\tilde{b}_n\le\eta\le\Delta,\quad |x_{ni}'\beta|\le\sqrt{d_np}\tilde{b}_n\le\eta\le\Delta.$$

因此，当 $\beta\in B_j$ 时，有

$$\begin{aligned}&|\rho(e_i-x_{ni}'b_j)-\rho(e_i-x_{ni}'\beta)|\le g(e_i)|x_{ni}'(\beta-b_j)|\le g(e_i)\sqrt{d_n}\|\beta-b_j\|\\&\le g(e_i)\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\quad(1\le j\le N_n),\end{aligned} \tag{2.7}$$

而

$$\sup_{\beta\in B_j}|\sum_{i=1}^n(R_{ni}(\beta)-R_{ni}(b_j))|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\beta\in B_j}|\sum_{i=1}^{n}(\rho(e_i-x'_{ni}b_j)-\rho(e_i-x'_{ni}\beta))-E(\rho(e_i-x'_{ni}b_j)-\rho(e_i-x'_{ni}\beta))| \\
&\le \sup_{\beta\in B_j}\sum_{i=1}^{n}|\rho(e_i-x'_{ni}b_j)-\rho(e_i-x'_{ni}\beta)|+\sup_{\beta\in B_j}\sum_{i=1}^{n}E|\rho(e_i-x'_{ni}b_j)-\rho(e_i-x'_{ni}\beta)| \\
&=: J_{n1}+J_{n2}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

利用 (2.7) 式，有

$$J_{n1}\le \sup_{\beta\in B_j}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\le \sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\sum_{i=1}^{n}g(e_i). \qquad (2.9)$$

因为 $0\le\delta\le1$, 由 (1.7) 式，有 $Eg(e_i)\le 2h<\infty$, 由 (2.9) 式，有

$$J_{n2}\le\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)\le Cn\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\le Cn\tilde{b}_n^{-(m+1)}=Cn\tilde{b}_n^{-(m+3)}\tilde{b}_n^{2}. \qquad (2.10)$$

由 m 的取法知， $m>2/\delta-3$, 从而 $\delta(m+3)>2$. 因此，有

$$n\tilde{b}_n^{-(m+3)}\le n\left(\eta/\sqrt{d_np}-1\right)^{-(m+3)}\le Cn^{(2-\delta(m+3))/2}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

于是，当 n 充分大时，有

$$n\tilde{b}_n^{-(m+3)}\le\varepsilon/(4C). \qquad (2.11)$$

联合 (2.10) 和 (2.11) 式，当 n 充分大时，有

$$J_{n2}\le\varepsilon\tilde{b}_n^2/4. \qquad (2.12)$$

因此，由 (2.8),(2.9) 和 (2.12) 式知，当 n 充分大时，有

$$\{\sup_{\beta\in B_j}|\sum_{i=1}^{n}(R_{ni}(\beta)-R_{ni}(b_j))|\le\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)+\varepsilon\tilde{b}_n^2/4\}. \qquad (2.13)$$

注意到 (2.13) 式对一切 j 均一致成立，因此当 n 充分大时，有

$$
\begin{aligned}
P(E_{n2}) &= P\{\sup_{1\le j\le N_n}\sup_{\beta\in B_j}|\sum_{i=1}^{n}(R_{ni}(\beta)-R_{ni}(b_j))|\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2/2\} \\
&\le P\{\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)+\varepsilon\tilde{b}_n^2/4\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2/2\}\le P\{\sqrt{d_np}\tilde{b}_n^{-m}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)\ge\varepsilon\tilde{b}_n^2/4\} \\
&\le P\{\sum_{i=1}^{n}g(e_i)\ge\varepsilon\tilde{b}_n^{m+2}/(4\sqrt{d_np})\}\le C\sqrt{d_n}\tilde{b}_n^{-(m+2)}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)\le Cn\tilde{b}_n^{-(m+3)} \\
&\le Cn^{1-\delta(m+3)/2}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

由 m 的取法知， $m>4/\delta-3$, 从而 $1-\delta(m+3)/2<-1$. 于是由此及 (2.14) 式，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(E_{n2})<\infty, \qquad (2.15)$$

从而 (2.6) 式获证.

(二) 现证明 (2.5) 式. 取 $r>1$, 记 $\tau_n=n^\delta(\log n)^{-r}$. 令

$$\xi'_{ni}(b_j)=\Phi_{ni}(b_j)I(g(e_i)\le\tau_n),\quad \xi''_{ni}(b_j)=\Phi_{ni}(b_j)I(g(e_i)>\tau_n),$$

$$\eta'_{ni}(b_j)=\xi'_{ni}(b_j)-E\xi'_{ni}(b_j),\eta''_{ni}(b_j)=\xi''_{ni}(b_j)-E\xi''_{ni}(b_j),$$

则

$$\sum_{i=1}^n R_{ni}(b_j)=\sum_{i=1}^n\eta'_{ni}(b_j)+\sum_{i=1}^n\eta''_{ni}(b_j),$$

从而

$$E_{n1}\subset\{\sup_{1\le j\le N_n}|\sum_{i=1}^n\eta'_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde b_n^2/4\}\cup\{\sup_{1\le j\le N_n}|\sum_{i=1}^n\eta''_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde b_n^2/4\}=:E'_{n1}\cup E''_{n1}.\qquad(2.17)$$

显然, $E\eta'_{ni}(b_j)=0,|\eta'_{ni}(b_j)|\le2\tau_n=:b$, 且

$$\begin{aligned}\sigma^2&:=n^{-1}\sum_{i=1}^nE(\eta'_{ni}(b_j))^2\le n^{-1}\sum_{i=1}^nE\xi'^2_{ni}(b_j)\le n^{-1}\sum_{i=1}^nEg^2(e_i)|x'_{ni}b_j|^2I(g(e_i)\le\tau_n)\\&\le n^{-1}\tau_n\sum_{i=1}^n|x'_{ni}b_j|^2Eg(e_i)\le Cn^{-1}\tau_n\tilde b_n^2.\end{aligned}$$

取 $u=\varepsilon\tilde b_n^2/(4n)$, 利用引理 1, 因 $r>1$, 有

$$\begin{aligned}&P(|\sum_{i=1}^n\eta'_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde b_n^2/4)\le P(n^{-1}|\sum_{i=1}^n\eta'_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde b_n^2/(4n))\le2\exp(-nu^2/(2\sigma^2+bu))\\&\le C\exp\{-c_0(\log n)^r\}\le Cn^{-\lambda}\ \ (\text{对任给定 }\lambda>0\text{和当 }n\text{充分大时}).\end{aligned}\qquad(2.18)$$

在上式中取 λ 足够大，则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty P(E'_{n1})&\le\sum_{n=1}^\infty\sum_{j=1}^{N_n}P(|\sum_{i=1}^n\eta'_{ni}(b_j)|\ge\varepsilon\tilde b_n^2/4)\le C\sum_{n=1}^\infty N_nn^{-\lambda}\\&\le C\sum_{n=1}^\infty\tilde b_n^{p(m+1)}n^{-\lambda}<\infty.\end{aligned}\qquad(2.19)$$

现令 $n^{(1+\delta)/2}=k$, 则 $n^\delta=k^{2\delta/(1+\delta)}=:\theta_k$ 和 $\tau_n=n^\delta(\log n)^{-r}=Ck^{2\delta/(1+\delta)}(\log k)^{-r}=:\mu_k$. 再定义集合： $I_1=\{i:\|x_{ni}\|\ge Cn^{(1+\delta)/4},1\le i\le n\}$, $I_2=\{i:\|x_{ni}\|<Cn^{-(1+\delta)/4},1\le i\le n\}$, 其中取 C 足够大, 使得当 $\delta=1$ 时, I_1 为空集, 此时 $\{1\le i\le n\}=I_2$. 由 (2.3) 式知, I_1 中元素个数至多 $n^{(1+\delta)/2}=k$ 个且有 $|x'_{ni}b_j|\le1$; 当 $i\in I_2$ 时, 有 $|x'_{ni}b_j|\le\|x_{ni}\|\|b_j\|<Cn^{-(1-\delta)/4}$.

由于 $e_1, e_2, \cdots$, 为 iid., 因此有

$$\begin{aligned}
&\sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|\xi''_{ni}(b_j)| \le \sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|x'_{ni}b_j|\,g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n)\\
&\le n^{-\delta}\sum_{i\in I_1} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n) + Cn^{-(1-\delta)/4}n^{-\delta}\sum_{i\in I_2} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n) \qquad (2.20)\\
&\le n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n^{(1+\delta)/2}} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n) + Cn^{-(1+3\delta)/4}\sum_{i=1}^{n} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n)\\
&\le \theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k} g(e_i)\,I(g(e_i)>\mu_k) + Cn^{-(1+3\delta)/4}\sum_{i=1}^{n} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_n)\\
&\le \theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k} g(e_i)\,I(g(e_i)>\mu_i) + Cn^{-(1+3\delta)/4}\sum_{i=1}^{n} g(e_i)\,I(g(e_i)>\tau_i)\\
&=: J_1(k)+J_2(n). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

类似地，有

$$\sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|E\xi''_{ni}(b_j)| =: EJ_1(k)+EJ_2(n). \qquad (2.22)$$

假设：当 $n\to\infty$ 时，有 $J_1(k)\to 0$ a.s., $EJ_1(k)\to 0$ 和 $J_2(n)\to 0$ a.s., $EJ_2(n)\to 0$ 成立，则

$$\sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|\eta''_{ni}(b_j)| \le \sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|\xi''_{ni}(b_j)| + \sup_{1\le j\le N_n} n^{-\delta}\sum_{i=1}^{n}|E\xi''_{ni}(b_j)| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

又由 (1.5) 式有 $d_n\le C_1n^{-\delta}$, 因此 $\tilde b_n^2 \ge \left(\eta/\sqrt{d_np}\right)^2 \ge \eta^2/(C_1pn^{-\delta}) = C_2n^{\delta}$, 所以当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sup_{1\le j\le N_n}\sum_{i=1}^{n}|\eta''_{ni}(b_j)| < C_2\varepsilon n^{\delta}/4 < \varepsilon\tilde b_n^2/4 \ \text{ a.s.} \qquad (2.23)$$

联合 (2.17),(2.19) 及 (2.23) 式，得 (2.5) 式. 因此为完成定理证明，下面只需证明假设成立.

(A) 取 $Y_i = g(e_i)I(g(e_i)>\mu_i), x_i = Y_i - EY_i$, 则 $Ex_i=0$ 且 x_i 相互独立, 则对于 $0<\delta<1$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{\infty}\theta_k^{-1}E|x_k| \le 2\sum_{k=3}^{\infty}\theta_k^{-1}Eg(e_k)\,I(g(e_k)>\mu_k) \le 2\sum_{k=3}^{\infty}\theta_k^{-1}\mu_k^{1-1/\delta}Eg^{1/\delta}(e_k)\\
&\le C\sum_{k=3}^{\infty}k^{-2/(1+\delta)}(\log k)^{r(1-\delta)/\delta} < \infty. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

由引理 2 得： $\theta_k^{-1}\sum_{i=3}^{k}x_i \to 0$ a.s., 即

$$\theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}x_i \to 0 \ \text{ a.s.} \qquad (2.25)$$

由 (2.24) 式的证明, 知 $\sum_{k=3}^{\infty}\theta_k^{-1}Eg(e_k)I(g(e_k)>\mu_k)<\infty$, 由 Kronecker 引理得：$\theta_k^{-1}\sum_{i=3}^{k}EY_i=\theta_k^{-1}\sum_{i=3}^{k}Eg(e_i)I(g(e_i)>\mu_i)\to 0$, 即

$$EJ_1(k)=\theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}EY_i\to 0. \tag{2.26}$$

由 (2.25) 和 (2.26) 式，知当 $n\to\infty$ 时，有

$$J_1(k)=\theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}Y_i=\theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}x_i+\theta_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}EY_i\to 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.27}$$

(B) 取 $U_i=g(e_i)I(g_(e_i)>\tau_i), V_i=U_i-EU_i$, 则 $EV_i=0$ 且 V_i 相互独立, 则对于 $0<\delta<1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}n^{-(1+3\delta)/4}E|V_n|&\le 2\sum_{n=3}^{\infty}n^{-(1+3\delta)/4}Eg(e_n)I(g(e_n)>\tau_n)\\&\le 2\sum_{n=3}^{\infty}n^{-(1+3\delta)/4}\tau_n^{1-1/\delta}Eg^{1/\delta}(e_n)\le C\sum_{n=3}^{\infty}n^{-1-(1-\delta)/4}(\log n)^{r(1-\delta)/\delta}<\infty.\end{aligned}$$

以下类似于 (2.24) 至 (2.27) 的证明，可得：当 $n\to\infty$ 时，有 $J_2(n)\to 0$ a.s., $EJ_2(n)\to 0$.

由 (A) 和 (B) 部分的证明，知对于 $0<\delta<1$, 假设成立.

(C) 对于 $\delta=1$, 采取类似于 (2.21) 至 (2.23) 式的证明方法，又由于 I_1 为空集，因此从 (2.20) 式出发，我们仅需证明：当 $n\to\infty$ 时，有 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)I(g(e_i)>\tau_n)\to 0$ a.s. 和 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)I(g(e_i)>\tau_n)\to 0$. 为此记： $\phi_n(e_i)=g(e_i)I(g(e_i)\le\tau_n)$, $\varphi_n(e_i)=\phi_n(e_i)-E\phi_n(e_i)$. 显然， $E\varphi_n(e_i)=0, |\varphi_n(e_i)|\le 2\tau_n=:b$, 且

$$\sigma^2:=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E(\varphi_n(e_i))^2\le n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\phi_n^2(e_i)\le n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Eg^2(e_i)I(g(e_i)\le\tau_n)\le C\tau_n.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$, 取 $u=\varepsilon$, 利用引理 1, 因 $r>1$, 有

$$\begin{aligned}&P(n^{-1}|\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(e_i)|\ge\varepsilon)\le 2\exp(-nu^2/(2\sigma^2+bu))\le C\exp\{-c_1n/\tau_n\}\le C\exp\{-c_0(\log n)^r\}\\&\le Cn^{-\lambda}\ \ (\text{对任给定 }\lambda>1\text{ 和当 }n\text{ 充分大时}).\end{aligned}$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(n^{-1}|\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(e_i)|\ge\varepsilon)\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\lambda}<\infty,\quad n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(e_i)\to 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.28}$$

因为当 $n\to\infty$ 时，有

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\phi_n(e_i)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)I(g(e_i)\le\tau_n)=Eg(e_1)I(g(e_1)\le\tau_n)\to Eg(e_1). \tag{2.29}$$

由 (2.28) 和 (2.29) 式，得

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\phi_n(e_i)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(e_i)+n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\phi_n(e_i)\to Eg(e_1) \quad \text{a.s.} \tag{2.30}$$

由 Kolmogorov 强大数律, $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)\to Eg(e_1)$, a.s.

由 (2.29),(2.30) 和上式, 可得当 $n\to\infty$ 时, 有

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)I(g(e_i)>\tau_n)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}g(e_i)-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\phi_n(e_i)\to 0\ \text{ a.s.}$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)I(g(e_i)>\tau_n)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Eg(e_i)-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\phi_n(e_i)\to 0.$$

证毕.

参考文献:

[1] 陈希孺, 赵林城. 线性模型中的 M 方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1996.
CHEN Xi-ru, ZHAO Lin-cheng. *M Estimator in Linear Model* [M]. Shanghai: The Science & Technology Press in Shanghai, 1996. (in Chinese).

[2] 杨善朝. 线性模型参数 M 估计的强相合性 [J]. 数学学报, 2002, **45**(1): 21–28.
YANG Shan-chao. *Strong consistency of M estimator in linear model* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**(1): 21–28. (in Chinese)

[3] HOEFFDING W. *Probability inequalities for sums of bounded random variables* [J]. J. Amer. Statist. Assoc., 1963, **58**: 13–30.

[4] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
LIN Zheng-yan, LU Chuan-rong, SU Zhong-gen. *Limit Theorems of Probability* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese)

Strong Consistency of M Estimator in Linear Model

CHEN Jian-dong[1,2]

(1. Dept. of Math. & Phys., West Anhui University, Luan 237012, China;
2. Dept. of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Heifei 230026, China)

Abstract: The strong consistency of M estimator of regression parameter in linear model is established, under some suitable sufficient conditions which improves the relevant result of M estimator in linear model.

Key words: linear model; M estimator; strong consistency.