第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0721-06 文献标识码: A

带有非线性阻尼项的二阶非线性差分方程的振动性

侯成敏[1], 何延生[1], 俞元洪[2]
(1. 延边大学数学系, 吉林 延吉 133002; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)
(E-mail: chengmin_yb@126.com)

摘 要: 本文给出了二阶非线性阻尼差分方程

$$\Delta^2 x_n + p_n\phi(x_n, \Delta x_n) + q_n f(x_{n+1})g(\Delta x_n) = 0, n \in Z$$

一切解均为振动的若干新的充分条件.

关键词: 阻尼差分方程; 振动性; 充分条件.
MSC(2000): 39A10, 39A12
中图分类: O175.7

1 引 言

考虑二阶非线性阻尼差分方程

$$\Delta^2 x_n + p_n\phi(x_n, \Delta x_n) + q_n f(x_{n+1})g(\Delta x_n) = 0, n \in Z, \tag{1}$$

其中 Z 为自然数, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \{p_n\}$ 为实数序列, $\{q_n\}$ 为正实数序列, $f, g \in C(R), \phi \in C(R \times R)$.

近年来, 差分方程的振动理论得到很大发展, 成果很多, 但是带非线性阻尼的差分方程的振动结果较少. 例如, 可参看阅 [2]–[6] 及其引文. 本文的目的是给出方程 (1) 一切解均为振动的若干充分条件, 所得结果是文 [1] 中关于非线性微分方程振动准则的离散类似.

在本文中我们称方程 (1) 的一个解是指一个序列 $\{x_n\}$, 它满足方程 (1) 和不等式 $\sup\{|x_n| : n \geq s\} > 0, s \in Z$. 如果它最终不变号, 方程 (1) 的一个解称为非振动的, 否则, 称为振动的.

为叙述方便给出下列条件 (H_1)–(H_5) 及引理 1–3

(H_1) 存在常数 $M > 0$, 使得

$$0 < \phi(x, y)y \leq My^2, \text{ 对一切 } y \neq 0, x \in R.$$

(H_2) $xf(x) > 0, g(x) > 0, x \in R$, 对一切 $x \neq 0$.

(H_3) f 非减且存在常数 $K_1 > 0$, 使得

$$f(xy) \geq K_1 f(x)f(y), \text{ 对 } x, y > 0;$$
$$f(-xy) \leq K_1 f(x)f(-y), \text{ 对 } x, y > 0.$$

(H_4) g 非增, 对 $x > 0$;$g(x)$ 非减, 对 $x < 0$. 且存在常数 $K_2 > 0$, 使得

$$g(xy) \geq K_2 g(x)g(y), \text{ 对 } x, y > 0;$$
$$g(-xy) \geq K_2 g(x)g(-y), \text{ 对 } x, y > 0.$$

收稿日期: 2003-12-06

(H$_5$) $\frac{f(x)g(x)}{x} \geq \alpha > 0$, 对 $x \neq 0$.

引理 1[2] 设 $x_N \geq 0, \Delta x_n > 0$ 且 $\Delta^2 x_n \leq 0, n \geq N$, 则当 $n \geq 2N$ 时, 恒有 $x_{n+1} \geq \frac{n}{2}\Delta x_n$.

引理 2 设 $x_N \leq 0, \Delta x_n < 0$ 且 $\Delta^2 x_n \geq 0, n \geq N$, 则, 当 $n \geq 2N$ 时, 恒有 $x_{n+1} \leq \frac{n}{2}\Delta x_n$.

引理 2 的证明可仿文 [2] 定理的证明, 故从略.

引理 3 设 $\{p_n\}$ 非负, (H$_1$) 和 (H$_2$) 成立. 若有

$$1 - Mp_n > 0, \tag{2}$$

和

$$\sum_{n=N}^{\infty}(\prod_{s=N}^{n-1}(1 - Mp_s)) = \infty, \tag{3}$$

则, 当 $\{x_n\}$ 为方程 (1) 的非振动解时, $x_n \Delta x_n > 0$ 最终成立.

证明 设 $\{x_n\}$ 是方程 (1) 的非振动解, 不失一般性, 设 $x_n > 0$, 对 $n \geq n_0 \in Z$. 设 $\{\Delta x_n\}$ 振动, 则存在整数 $n_1 \geq n_0 \in Z$, 使得 $\Delta x_{n_1} < 0$ 或 $\Delta x_{n_1} = 0$. 首先考虑 $\Delta x_{n_1} < 0$. 由方程 (1) 得

$$\Delta x_{n_1}\Delta^2 x_{n_1} + p_{n_1}\phi(x_{n_1}, \Delta x_{n_1})\Delta x_{n_1} = -q_{n_1} f(x_{n_1+1}) g(\Delta x_{n_1})\Delta x_{n_1} > 0.$$

因此有

$$\Delta x_{n_1}\Delta^2 x_{n_1} > -p_{n_1}\phi(x_{n_1}, \Delta x_{n_1})\Delta x_{n_1}.$$

注意到条件 (H$_1$) 得 $\Delta x_{n_1}(\Delta x_{n_1+1} - \Delta x_{n_1}) > -p_{n_1} M(\Delta x_{n_1})^2$, 故有

$$\Delta x_{n_1}\Delta x_{n_1+1} > (1 - Mp_{n_1})(\Delta x_{n_1})^2 > 0.$$

以 Δx_{n_1} 除以上面不等式, 有 $\Delta x_{n_1+1} < 0$. 由归纳法, 得

$$\Delta x_n < 0, n \geq n_1 \in Z.$$

此与假设 $\{\Delta x_n\}$ 振动相矛盾.

其次, 设 $\Delta x_{n_1} = 0$, 则由方程 (1) 知 $\Delta x_{n_1+1} < 0$. 同样由归纳法可得

$$\Delta x_n < 0, \quad n \geq n_1.$$

此与假设 $\{\Delta x_n\}$ 振动矛盾. 因此, $\{\Delta x_n\}$ 有固定符号.

现令 $\Delta x_n < 0, n \geq N \in Z$, 则由 (1) 和 (H$_1$) 得

$$\Delta u_n + Mp_n u_n \geq 0, \tag{4}$$

其中 $u_n = -\Delta x_n$. 由 (4) 得

$$u_n \geq u_N \prod_{s=N}^{n-1}(1 - Mp_s), \quad \Delta x_n \leq -u_N \prod_{s=N}^{n-1}(1 - Mp_s).$$

对上式从 N 到 $n-1$ 求和, 有

$$x_n \leq x_N - u_N \sum_{s=N}^{n-1}\prod_{t=N}^{s-1}(1 - Mp_t).$$

利用 (3), 得

$$x_n \longrightarrow -\infty, n \longrightarrow \infty.$$

此与假设 $x_n > 0, n \geq n_0 \in Z$ 矛盾. □

2 主要结果

定理 1 设 $\{p_n\}$ 非负, (H_1)-(H_3),(2) 和 (3) 成立且

$$f(u)g(u) \text{ 非减对 } u \neq 0, \tag{5}$$

若

$$\int_{+0}^{+c} \frac{\mathrm{d}u}{f(u)g(u)} < \infty, \quad \int_{-0}^{-c} \frac{\mathrm{d}u}{f(u)g(u)} < \infty, \quad \forall c > 0, \tag{6}$$

且

$$\sum^{\infty} q_n f(n) = \infty, \tag{7}$$

则方程 (1) 的每一个解振动.

证明 设 $\{x_n\}$ 为 (1) 的非振动解. 由引理 3 知，不失一般，存在整数 $N > 0$, 使当 $n \geq N$ 时有 $x_n > 0, \Delta x_n > 0$, 故 $\phi(x_n, \Delta x_n) > 0, \forall n \geq N$.

由方程 (1) 得

$$\Delta^2 x_n + q_n f(x_{n+1}) g(\Delta x_n) \leq 0, \tag{8}$$

因 f 非减，故由引理 1, 有

$$f(x_{n+1}) \geq f(\frac{n}{2}\Delta x_n), n \geq 2N. \tag{9}$$

利用 (H_3) 和 (9), 由 (8) 产生 $\Delta^2 x_n + K_1^2 f(\frac{1}{2}) q_n f(n) f(\Delta x_n) g(\Delta x_n) \leq 0$. 则

$$\frac{\Delta^2 x_n}{f(\Delta x_n) g(\Delta x_n)} + K_1^2 f(\frac{1}{2}) q_n f(n) \leq 0, n \geq 2N. \tag{10}$$

令 $\Delta x_n \geq x \geq \Delta x_{n+1}$, 注意到 (5), 有

$$f(x)g(x) \leq f(\Delta x_n) g(\Delta x_n).$$

因而

$$\frac{\Delta^2 x_n}{f(x)g(x)} \leq \frac{\Delta^2 x_n}{f(\Delta x_n) g(\Delta x_n)}.$$

利用上式并对 (10) 从 $2N$ 到 $n-1$ 求和，得到

$$K_1^2 f(\frac{1}{2}) \sum_{s=2N}^{n-1} q_s f(s) \leq \sum_{s=2N}^{n-1} \int_{\Delta x_{s+1}}^{\Delta x_s} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)} = \int_{\Delta x_{n+1}}^{\Delta x_{2N}} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)} < \infty.$$

上式与条件 (7) 矛盾. 对 $x_n < 0, \Delta x_n < 0, n > N$ 的情形利用引理 2 可类似的推出矛盾，故定理 1 证毕.

注 1 在定理 1 中，令 $p_n = 0, g(u) \equiv 1$, 且 $f(u) = u^\alpha, \alpha \in (0,1)$, 则化为文 [2] 的定理 4.3.

定理 2 设 $\{p_n\}$ 非负 $(H_1),(H_2),(H_4)$,(2),(3) 成立. 若 $f(u)g(u)$ 非减, 对 $u>0$; $f(u)g(u)$ 非增, 对 $u<0$,

$$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)}<\infty;\int_{-c}^{-\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)}<\infty,\quad \forall c>0. \tag{11}$$

且

$$\sum^{\infty}(n+1)q_n g(\frac{2}{n})=\infty, \tag{12}$$

则方程 (1) 的每一个解振动.

证明 设 $\{x_n\}$ 为方程 (1) 的非振动解如同定理 1, 可设存在整数 $N\geq 0$, 使得当 $n\geq N$ 时, 有

$$x_n>0,\quad \Delta x_n>0.$$

因此, 可得不等式 (8) 成立.

注意到函数 g 非增, 由引理 1 得

$$g(\Delta x_n)\geq g(\frac{2}{n}x_{n+1}),\quad n\geq 2N. \tag{13}$$

利用 (13) 和 (H_4), 则 (8) 式成为

$$\Delta^2 x_n+K_2 q_n f(x_{n+1})g(\frac{2}{n})g(x_{n+1})\leq 0,\quad n\geq 2N. \tag{14}$$

用 $(n+1)$ 乘 (14), 再从 $2N$ 到 $n-1$ 求和, 有

$$\sum_{s=2N}^{n-1}\frac{(s+1)\Delta^2 x_s}{f(x_{s+1})g(x_{s+1})}+\sum_{s=2N}^{n-1}K_2(s+1)q_s g(\frac{2}{s})\leq 0. \tag{15}$$

对 (15) 第一项用分部积分求和公式, 得

$$\frac{n\Delta x_n}{f(x_n)g(x_n)}-\frac{(2N)\Delta x_{2N}}{f(x_{2N})g(x_{2N})}-\sum_{s=2N}^{n-1}\frac{\Delta x_s}{f(x_{s+1})g(x_{s+1})}+$$

$$\sum_{s=2N}^{n-1}\frac{s\Delta x_s\Delta(f(x_s)g(x_s))}{f(x_s)f(x_{s+1})g(x_s)g(x_{s+1})}+\sum_{s=2N}^{n-1}K_2(s+1)q_s g(\frac{2}{s})\leq 0.$$

再利用 $f(u)g(u)$ 的非减性有

$$\frac{n\Delta x_n}{f(x_n)g(x_n)}-\int_{x_{2N}}^{x_n}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)}+K_2\sum_{s=2N}^{n-1}(s+1)q_s g(\frac{2}{s})\leq C,$$

其中 C 为正常数. 即

$$K_2\sum_{s=2N}^{n-1}(s+1)q_s g(\frac{2}{s})\leq C+\int_{x_{2N}}^{x_n}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)g(x)}. \tag{16}$$

在上式中令 $n\to\infty$, 得出矛盾. 对 $x_n<0,\Delta x_n<0,n>N$ 的情形利用引理 2 可类似的推出矛盾. □

注 2 文 [2] 的定理 4.1 是定理 2 中当 $p_n = 0, g(u) \equiv 1, f(u) = u^\alpha, \alpha > 1$ 时的特例.

定理 3 设 (H_1),(H_2),(H_4),(H_5),(2),(3) 和 (5) 成立，若存在正序列 $\{h_n\}$ 使得

$$\sum_{s=2N}^{\infty} h_n[q_n g(\frac{2}{n}) - (\frac{\Delta h_n}{2h_n})^2] = \infty, \tag{17}$$

则方程 (1) 的每一个解振动.

证明 设 $\{x_n\}$ 为方程 (1) 的非振动解. 如前可设存在 $N \geq 0$ 使得当 $n \geq N$ 时，有 $x_n > 0$ 和 $\Delta x_n > 0$, 并且不等式 (8) 成立. 定义 $Z_n = h_n \frac{\Delta x_n}{x_n}$. 则由 (8) 产生

$$\Delta Z_n \leq \frac{-h_n q_n f(x_{n+1}) g(\Delta x_n)}{x_{n+1}} + \frac{\Delta h_n \Delta x_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{h_n (\Delta x_n)^2}{x_n x_{n+1}}, n \geq N. \tag{18}$$

因 g 是非增，由引理 1 和 (H_4), 有

$$g(\Delta x_n) \geq K_2 g(\frac{2}{n}) g(x_{n+1}), \quad n \geq 2N. \tag{19}$$

注意到 x_n 和 Δx_n 的单调性， (H_5)(19), (18) 产生

$$\begin{aligned}\Delta Z_n &\leq -\alpha K_2 h_n q_n g(\frac{2}{n}) + Z_{n+1}\frac{\Delta h_n}{h_{n+1}} - Z_{n+1}^2 \frac{h_n}{h_{n+1}^2} \\ &= -\alpha K_2 h_n q_n g(\frac{2}{n}) - \frac{h_n}{h_{n+1}^2}[Z_{n+1} - \frac{\Delta h_n h_{n+1}}{2h_n}]^2 + \frac{(\Delta h_n)^2}{4h_n}.\end{aligned}$$

因此

$$\Delta Z_n \leq -\alpha K_2 h_n q_n g(\frac{2}{n}) + \frac{(\Delta h_n)^2}{4h_n}, n \geq 2N.$$

从 $2N$ 到 n 对上式求和，得

$$Z_{n+1} \leq Z_{2N} - \alpha K_2 \sum_{s=2N}^{n} h_s[q_s g(\frac{2}{s}) - (\frac{\Delta h_s}{2h_s})^2].$$

由上式和 (17) 知 Z_n 最终为负. 此与 Z_n 的定义矛盾. 对 $x_n < 0, \Delta x_n < 0, n > N$ 的情形利用引理 2 可类似的推出矛盾. □

注 3 当 $p_n = 0, g(u) \equiv 1$, 定理 3 简化为文 [3] 中的结果.

下面举例说明本文结果的应用

例 1

$$\Delta^2 x_n + \frac{1}{(n+1)(e^{-1}+1)}\varphi(x_n, \Delta x_n) + \frac{1}{n\ln(n+1)} f(x_{n+1}) g(\Delta x_n) = 0, \tag{20}$$

其中

$$p_n = \frac{1}{(n+1)(e^{-1}+1)}, q_n = \frac{1}{n^{1/3}\ln(n+1)}, \quad \varphi(x,y) = \frac{y^3 e^{-y^2} + y}{(\sin x)^2 + 1},$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad g(x) = |x|^{\frac{1}{3}} + 1.$$

容易验证方程 (20) 满足定理 1 的全部条件，故方程 (20) 的一切解振动.

例 2

$$\Delta^2 x_n + \frac{n}{n+1}\varphi(x_n, \Delta x_n) + \frac{1}{n(n+1)} f(x_{n+1}) g(\Delta x_n) = 0, \tag{21}$$

其中

$$p_n = \frac{n}{n+1}, q_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \varphi(x,y) = \frac{y}{x^2+1},$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3(e^x+1), & |x| \ge 1 \\ x(e^x+1), & |x| < 1. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \ge 1 \\ 1, & |x| < 1. \end{cases}$$

取 $h_n = \frac{1}{n}$ 容易验证方程 (21) 满足定理 3 的全部条件，故方程 (21) 的一切解振动.

参考文献:

[1] GRACE S R, LALLI B S. *Oscillatory behavior of nonlinear second order differential equations with deviating arguments* [J]. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 1986, **14**(2): 187–196.

[2] HOOKER J W, PATULA W T. *A second order nonlinear difference equation: Oscillation and asymptotic behavior* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1983, **91**: 9–24.

[3] SZMANDA B. *Oscillation criteria for second order nonlinear difference equations* [J]. Ann. Polon. Math., 1983, **43**: 225–235.

[4] THANDAPANI E, LALLI B S. *Oscillation criteria for a second order damped difference equation* [J]. Appl. Math. Letters, 1995, **8**: 1–6.

[5] ZHANG Bing-gen, CHEN G D. *Oscillation of certain second order nonlinear difference equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **199**: 827–841.

[6] 张广，高英. 差分方程的振动理论 [M]. 北京：高等教育出版社， 2001.
ZHANG Guang, GAO Ying. *Oscillation Theory of Difference Equations* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)

[7] NAITO M. *Oscillation theorems for a damped nonlinear differential equations* [J]. Proc. Japan. Acad., 1974, **50**: 104–108.

Oscillation of Second Order Nonlinear Difference Equations with Nonlinear Damping Term

HOU Cheng-min[1], *HE Yan-sheng*[1], *YU Yuan-hong*[2]

(1. Dept. of Math., Yanbian University, Yanji 133002, China;
2. Academy of Math. & System Sci., Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Some new sufficient conditions for all the solutions of the nonlinear damped the second order difference equations (1) to be oscillations are given.

Key words: difference equation with damping; oscillation; sufficient conditions.