第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0727-07 文献标识码: A

一类浮游生物植化相克时滞抛物方程的稳态解

田灿荣[1,2], 许飞[2], 刘勇[2]
(1. 盐城工学院基础部, 江苏 盐城 224003; 2. 扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)
(E-mail: unfoxeses@yahoo.com)

摘 要: 本文研究了水生生态系统中种群间能产生抑制毒素的 Volterra 竞争模型, 用上下解的方法讨论了稳态解的渐近行为, 得到了系统存在唯一全局稳定正稳态解的充分条件.

关键词: 时滞; 上下解; 全局稳定.
MSC(2000): 35K57, 35B35
中图分类: O175.26

1 引言

本文考虑具有时滞的半线性方程组:

$$\begin{cases} u_{1t}-d_1\Delta u_1=u_1(a_1-b_{11}u_1-b_{12}u_2-e_1u_1J_2*u_2), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ u_{2t}-d_2\Delta u_2=u_2(a_2-b_{21}u_1-b_{22}u_2-e_2u_2J_1*u_1), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}=0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ u_1(t,x)=\eta_1(t,x), & (t,x)\in[-\tau_1,0]\times\Omega,\\ u_2(t,x)=\eta_2(t,x), & (t,x)\in[-\tau_2,0]\times\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 R^N 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega\in C^{1+\alpha}$, $d_i,a_i,b_{ij},e_i(i,j=1,2)$ 是正常数, n 是单位外法向量, τ_i 是表示时滞的正常数. 连续时滞量 $J_i*u_i=\int_{t-\tau_i}^{t}J_i(t-s,x)u_i(s,x)\mathrm{d}s(x\in\Omega)$. 而且当 $0\le t\le\tau_i$ 时, $J_i(t,x)\ge0, J_i(t,x)\in C^{\alpha}([0,\tau_i]\times\bar\Omega), \int_0^{\tau_i}J_i(t,x)\mathrm{d}t=1(x\in\Omega)$. 初始值 $\eta_i(t,x)$ 满足 $\eta_i(t,x)\ge0,\eta_i(t,x)\in C^{\alpha}([-\tau_i,0]\times\bar\Omega)$.

问题 (1.1) 来源于水生生态系统中某两种植物种群不仅相互竞争, 而且产生毒素抑制对方生长的模型. 这里 u_1,u_2 是两个种群的密度, a_1,a_2 是种群的细胞增长率, b_{11},b_{22} 分别是两个种群的种内竞争率, b_{12} 是第二种群对第一种群的种群间竞争率, b_{21} 是第一种群对第二种群的种群间竞争率, e_1 是第二种群对第一种群的抑制毒素率, e_2 是第一种群对第二种群的抑制毒素率. 齐次 Neumann 边界条件表示两个种群限制在区域 Ω 内, 在 Ω 的边界没有移动.

Mukhopadhyay 在 [1] 首先提出具离散时滞的常微系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=u_1(a_1-b_{11}u_1-b_{12}u_2-e_1u_1u_2),\\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=u_2(a_2-b_{21}u_1-b_{22}u_2-e_2u_2u_1(t-\tau)), \end{cases} \tag{1.2}$$

Mukhopadhyay 研究了 (1.2) 解的渐近行为, 给出了 (1.2) 存在唯一全局渐近正稳态解的充分条件. 宋新宇和陈兰荪在 [2] 中研究了下面系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=u_1(a_1(t)-b_{11}(t)u_1-b_{12}(t)u_2-e_1u_1u_2(t-\tau_2(t)))\\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=u_2(a_2(t)-b_{21}(t)u_1-b_{22}(t)u_2-e_2u_2u_1(t-\tau_1(t))) \end{cases} \tag{1.3}$$

收稿日期: 2003-08-25
基金项目: 国家自然科学基金 (10171088)

的周期解问题，给出了 (1.3) 存在正周期解的充分条件.

本文主要讨论 (1.1) 解的存在性和渐近行为，全文安排如下：第 2 节研究全局解的存在唯一性；第 3,4 节考虑解的渐近行为. 为了方便起见，记 $f=(f_1,f_2)$. 其中

$$f_1(u_1,u_2,J_1*u_1,J_2*u_2)=u_1(a_1-b_{11}u_1-b_{12}u_2-e_1u_1J_2*u_2),$$

$$f_2(u_1,u_2,J_1*u_1,J_2*u_2)=u_2(a_2-b_{21}u_1-b_{22}u_2-e_2u_2J_1*u_1).$$

2 全局解的存在唯一性

定义 2.1 如果 $\hat{u},\tilde{u}\in C([-\tau_1,+\infty)\times\bar{\Omega})\times C([-\tau_2,+\infty)\times\bar{\Omega})$, 而且 $\hat{u}\le\tilde{u}$. 可以定义区间 $\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle=\{u\in C([-\tau_1,+\infty)\times\bar{\Omega})\times C([-\tau_2,+\infty)\times\bar{\Omega});\hat{u}\le u\le\tilde{u}\}$.

定义 2.2 称 f_i 是在 $\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$ 局部 Lipschitz 连续，如果存在 $K_i>0$, 使得对于任意 $u,u'\in\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$, $|f_i(u_1,u_2,J_1*u_1,J_2*u_2)-f_i(u_1',u_2',J_1*u_1',J_2*u_2')|\le K_i(|u_1-u_1'|+|u_2-u_2'|+|J_1*u_1-J_1*u_1'|+|J_2*u_2-J_2*u_2'|)$ 成立. 进一步，如果 f_1,f_2 在 $\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$ 局部 Lipschitz 连续，则称 f 在 $\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$ 局部 Lipschitz 连续.

很容易看出， f 在 $\langle 0,M\rangle$ 局部 Lipschitz 连续，其中 M 为任意正矢量常函数.

定义 2.3 称 f_i 是在 $\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$ 拟增 (减) 的，如果除去 u_i , f_i 对其余的自变量 $u_j(j\ne i)$ 都是单调增加 (减少) 的. 进一步，如果除去 u_i, f_i 对其余的自变量分别既有单增又有单减，则称 f_i 是混拟的. 如果 f_1,f_2 都是混拟的，称 f 是混拟系统.

由此定义可以看出， f 在 $\langle 0,M\rangle$ 内是混拟系统，其中 M 为任意正矢量常函数.

定义 2.4 设 $\hat{u}=(\hat{u}_1,\hat{u}_2),\tilde{u}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2).\hat{u}_i,\tilde{u}_i\in C^{\alpha}([-\tau_i,+\infty)\times\bar{\Omega})\cap C^{1,2}((-\tau_i,+\infty)\times\Omega)$, 而且 $\hat{u},\tilde{u}$ 非负. 称 $\tilde{u},\hat{u}$ 为 (1.1) 的耦合上下解，如果 $\tilde{u}\ge\hat{u}$ 且满足下列条件：

$$\begin{cases}\tilde{u}_{1t}-d_1\Delta\tilde{u}_1\ge\tilde{u}_1(a_1-b_{11}\tilde{u}_1-b_{12}\hat{u}_2-e_1\tilde{u}_1J_2*\hat{u}_2), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \hat{u}_{1t}-d_1\Delta\hat{u}_1\le\hat{u}_1(a_1-b_{11}\hat{u}_1-b_{12}\tilde{u}_2-e_1\hat{u}_1J_2*\tilde{u}_2), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \tilde{u}_{2t}-d_2\Delta\tilde{u}_2\ge\tilde{u}_2(a_2-b_{21}\hat{u}_1-b_{22}\tilde{u}_2-e_2\tilde{u}_2J_1*\hat{u}_1), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \hat{u}_{2t}-d_2\Delta\hat{u}_2\le\hat{u}_2(a_2-b_{21}\tilde{u}_1-b_{22}\hat{u}_2-e_2\hat{u}_2J_1*\tilde{u}_1), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial\hat{u}_i}{\partial n}\le 0\le\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial n},i=1,2. & (t,x)\in(0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ \hat{u}_i(t,x)\le\eta_i(t,x)\le\tilde{u}_i(t,x),i=1,2. & (t,x)\in[-\tau_i,0]\times\Omega,\end{cases}\tag{2.1}$$

定理 2.1 假设方程组 (1.1) 满足下面条件， $J_i(t,x)\in C^{\alpha}([0,\tau_i]\times\bar{\Omega}),\eta_i(t,x)\in C^{\alpha}([-\tau_i,0]\times\bar{\Omega})$, 如果 $\tilde{u},\hat{u}$ 是 (1.1) 的耦合上下解，那么 (1.1) 存在唯一的解 $u^*(t,x)$, 而且 $u^*\in\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$.

详细的证明过程见 [3] 的定理 2.2.

推论 2.1 方程 (1.1) 存在唯一解 $u(t,x)$, 而且 $u\in\langle 0,M\rangle$. 其中

$$M=(M_1,M_2)=(\max\{\sup_{(t,x)\in[-\tau_1,0]\times\Omega}\eta_1(t,x),\frac{a_1}{b_{11}}\},\max\{\sup_{(t,x)\in[-\tau_2,0]\times\Omega}\eta_2(t,x),\frac{a_2}{b_{22}}\}),$$

即 $0\le u_1\le M_1,0\le u_2\le M_2,(t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega$.

很容易可以看出 $(0,0,),(M_1,M_2)$ 满足 (2.1), 则是 (1.1) 的耦合上下解. 再根据定理 2.1, 可得 (1.1) 有唯一全局解 $u(t,x)$, 而且 $u(t,x)\in\langle 0,M\rangle$.

3 解的渐近行为的预备知识

为了研究 (1.1) 系统的渐近稳定性，构造两个常向量列 $\{\bar{c}^{(m)}\}=\{(\bar{c}_1^{(m)},\bar{c}_2^{(m)})\}$, $\{\underline{c}^{(m)}\}=$

$\{(\underline{c}_1^{(m)},\underline{c}_2^{(m)})\}, m=0,1,2\cdots$. 满足下面关系

$$\begin{cases} \bar{c}_1^{(m)}=\bar{c}_1^{(m-1)}+\frac{1}{K_1}\bar{c}_1^{(m-1)}(a_1-b_{11}\bar{c}_1^{(m-1)}-b_{12}\underline{c}_2^{(m-1)}-e_1\bar{c}_1^{(m-1)}J_2*\underline{c}_2^{(m-1)}),\\ \underline{c}_1^{(m)}=\underline{c}_1^{(m-1)}+\frac{1}{K_1}\underline{c}_1^{(m-1)}(a_1-b_{11}\underline{c}_1^{(m-1)}-b_{12}\bar{c}_2^{(m-1)}-e_1\underline{c}_1^{(m-1)}J_2*\bar{c}_2^{(m-1)}),\\ \bar{c}_2^{(m)}=\bar{c}_2^{(m-1)}+\frac{1}{K_2}\bar{c}_2^{(m-1)}(a_2-b_{21}\underline{c}_1^{(m-1)}-b_{22}\bar{c}_2^{(m-1)}-e_2\bar{c}_2^{(m-1)}J_1*\underline{c}_1^{(m-1)}),\\ \underline{c}_2^{(m)}=\underline{c}_2^{(m-1)}+\frac{1}{K_2}\underline{c}_2^{(m-1)}(a_2-b_{21}\bar{c}_1^{(m-1)}-b_{22}\underline{c}_2^{(m-1)}-e_2\underline{c}_2^{(m-1)}J_1*\bar{c}_1^{(m-1)}),\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 K_1,K_2 是 f_1,f_2 在 $\langle\underline{c}^{(0)},\bar{c}^{(0)}\rangle$ 的满足局部 Lipschitz 连续条件的常数，注意到当 c 为常数时， $J_i*c=\int_{t-\tau_i}^{t}J_i(t-s,x)c\mathrm{d}s=c\int_0^{\tau_i}J_i(s,x)\mathrm{d}s=c$. 下文将 (3.1) 中的 J_i*c 直接用 c 来代替.

引理 3.1 对于 $0\le\hat{c}\le\tilde{c},\hat{c}=(\hat{c}_1,\hat{c}_2),\tilde{c}=(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)$. 如果 $\tilde{c},\hat{c}$ 是 (1.1) 的耦合上下解，其中 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\hat{c}_1,\hat{c}_2$ 均为常数. 那么由 $\bar{c}^{(0)}=\tilde{c},\underline{c}^{(0)}=\hat{c}$ 作为初始值，满足 (3.1) 所构造的序列 $\{\bar{c}^{(m)}\},\{\underline{c}^{(m)}\}$ 有下列单调性质：

$$\hat{c}\le\underline{c}^{(m)}\le\underline{c}^{(m+1)}\le\bar{c}^{(m+1)}\le\bar{c}^{(m)}\le\tilde{c}, m=0,1,2\cdots. \tag{3.2}$$

详细的证明见 [4] 的引理 2.1.

由 (3.2) 的单调性可以看出 $\{\bar{c}^{(m)}\},\{\underline{c}^{(m)}\}$ 存在极限，记

$$\lim_{m\to+\infty}\bar{c}^{(m)}=\bar{c},\ \lim_{m\to+\infty}\underline{c}^{(m)}=\underline{c}. \tag{3.3}$$

显然满足 $\bar{c},\underline{c}$ 下列关系：

$$\hat{c}\le\underline{c}^{(m)}\le\underline{c}^{(m+1)}\le\underline{c}\le\bar{c}\le\bar{c}^{(m+1)}\le\bar{c}^{(m)}\le\tilde{c}, m=0,1,2\cdots \tag{3.4}$$

取 $m\to+\infty$, 则由 (3.1) 可以得到下列关系成立

$$\begin{cases} \bar{c}_1(a_1-b_{11}\bar{c}_1-b_{12}\underline{c}_2-e_1\bar{c}_1\underline{c}_2)=0,\\ \underline{c}_1(a_1-b_{11}\underline{c}_1-b_{12}\bar{c}_2-e_1\underline{c}_1\bar{c}_2)=0,\\ \bar{c}_2(a_2-b_{21}\underline{c}_1-b_{22}\bar{c}_2-e_2\bar{c}_2\underline{c}_1)=0,\\ \underline{c}_2(a_2-b_{21}\bar{c}_1-b_{22}\underline{c}_2-e_2\underline{c}_2\bar{c}_1)=0.\end{cases} \tag{3.5}$$

很明显，如果 $\bar{c}=\underline{c}$, 那么 $\bar{c}(\underline{c})$ 是 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle$ 中唯一的稳态解. 在下面的定理中，将讨论与 $\bar{c},\underline{c}$ 有关的稳态解的渐近行为.

定理 3.1 设 $\tilde{c},\hat{c}$ 是 (1.1) 的非负耦合上下解， $\{\bar{c}^{(m)}\},\{\underline{c}^{(m)}\}$ 是满足 (3.1) 的序列， $\bar{c},\underline{c}$ 分别是 $\{\bar{c}^{(m)}\},\{\underline{c}^{(m)}\}$ 的极限，那么 (1.1) 的解 $u(t,x)$ 满足 $\underline{c}\le u(t,x)\le\bar{c}(t\to+\infty,x\in\bar{\Omega})$. 更进一步，如果 $\bar{c}=\underline{c}(\equiv c^*)$, 那么 c^* 是 (1.1) 在 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle$ 中的唯一稳态解，而且有 $\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=c^*(x\in\bar{\Omega})$.

本定理的证明见 [3] 的定理 3.2.

4 解的渐近行为

在这一节中，研究 (1.1) 解的渐近行为和它相应的常数稳态解的关系，即满足下列条件：

$$\begin{cases} c_1(a_1-b_{11}c_1-b_{12}c_2-e_1c_1c_2)=0,\\ c_2(a_2-b_{21}c_1-b_{22}c_2-e_2c_2c_1)=0.\end{cases} \tag{4.1}$$

很明显 (4.1) 存在非负解 $(0,0),(0,\frac{a_2}{b_{22}}),(\frac{a_1}{b_{11}},0)$. 而要使 (4.1) 存在唯一正解 (c_1^*,c_2^*), 只要添加以下条件

$$\frac{b_{12}}{b_{22}}<\frac{a_1}{a_2}<\frac{b_{11}}{b_{21}},\frac{b_{12}}{b_{22}}<\frac{e_1}{e_2}<\frac{b_{11}}{b_{21}}. \tag{4.2}$$

引理 4.1 如果条件 (4.2) 成立，那么 (4.1) 存在唯一正解 (c_1^*,c_2^*).

该引理的证明纯粹是初等代数计算，具体过程见 [1].

由推论 2.1 知，对任何非负初值问题 (1.1) 存在唯一全局非负解. 另外由比较原理，如果 $\eta_i(0,x)$ 不恒为 $0(x\in\Omega)$，那么 $u_i(t,x)>0((t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega)$. 因此根据是否 $\eta_i(0,x)\equiv 0(x\in\Omega)$ 成立分三种情形讨论.

情形 (I). $\eta_1(0,x)\equiv 0(x\in\Omega)$. 由唯一性表明 $u_1(t,x)\equiv 0((t,x)\in[0,+\infty)\times\bar{\Omega})$. 其中 $u_2(t,x)$ 满足下列方程组

$$\begin{cases} u_{2t}-d_2\Delta u_2=u_2(a_2-b_{22}u_2), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial u_2}{\partial n}=0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ u_2(0,x)=\eta_2(0,x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

先来讨论 (4.3) 解的渐近稳定性. 当 $\eta_2(0,x)\equiv 0(x\in\Omega)$ 时 $u_2(t,x)\equiv 0((t,x)\in[0,+\infty)\times\bar{\Omega})$. 当 $\eta_2(0,x)$ 不恒为 $0(x\in\Omega)$ 时，由强极大值原理得， $u_2(t,x)>0((t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega)$. 则任取 $t_0>0$ 有 $u_2(t_0,x)>0(x\in\bar{\Omega})$ 成立. 令 $m=\min_{x\in\bar{\Omega}}u_2(t_0,x), M=\max_{x\in\bar{\Omega}}u_2(t_0,x)$. 考虑下列常微方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v(a_2-b_{22}v),\\ v(0)=M; \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w(a_2-b_{22}w),\\ w(0)=m. \end{cases} \tag{4.5}$$

由常微方程稳定性理论知

$$\lim_{t\to+\infty}v(t)=\frac{a_2}{b_{22}},\lim_{t\to+\infty}w(t)=\frac{a_2}{b_{22}}. \tag{4.6}$$

再考虑下列方程

$$\begin{cases} u_{2t}-d_2\Delta u_2=u_2(a_2-b_{22}u_2), & (t,x)\in(t_0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial u_2}{\partial n}=0, & (t,x)\in(t_0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ u_2(t,x)|_{t=t_0}=u_2(t_0,x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

比较 (4.4)(4.5)(4.7) 知， $v(t),w(t)$ 分别是 (4.7) 在 $(t_0,+\infty)\times\Omega$ 的上解和下解. 由比较原理得 $w(t)\le u_2(t,x)\le v(t)((t,x)\in[t_0,+\infty)\times\bar{\Omega})$. 于是有 $\lim_{t\to+\infty}w(t)\le\lim_{t\to+\infty}u_2(t,x)\le\lim_{t\to+\infty}v(t)(x\in\bar{\Omega})$. 再联系 (4.6) 可得： $u_2(t,x)\to\frac{a_2}{b_{22}}(t\to+\infty)(x\in\bar{\Omega})$.

情形 (II). $\eta_2(0,x)\equiv 0(x\in\Omega)$. 与情形 (I) 相类似的方法可以得出：当 $\eta_1(0,x)\equiv 0(x\in\Omega)$ 时， $u_1(t,x)\equiv 0((t,x)\in[0,+\infty)\times\bar{\Omega})$. 当 $\eta_1(0,x)$ 不恒为 $0(x\in\Omega)$ 时， $u_1(t,x)\to\frac{a_1}{b_{11}}(t\to+\infty)(x\in\bar{\Omega})$.

情形 (III). $\eta_1(0,x)$ 与 $\eta_2(0,x)$ 都不恒为 $0(x\in\Omega)$. 由引理 4.1, 如果 (4.2) 成立， (4.1) 存在唯一正解. 考虑下列方程

$$\begin{cases} U_{1t}-d_1\Delta U_1=U_1(a_1-b_{11}U_1), & (t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial U_1}{\partial n}=0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ U_1(0,x)=\eta_1(0,x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

由情形 (I) 的讨论过程知 $U_1(t,x) \to \frac{a_1}{b_{11}}(t \to +\infty)(x \in \bar{\Omega})$. 对照方程 (1.1),(4.1), 由抛物方程的比较原理得 $u_1(t,x) \le U_1(t,x)$. 因此任取 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t \ge t_1$ 时， $u_1(t,x) \le \frac{a_1}{b_{11}} + \varepsilon_1$. 类似地，任取 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $t_2 > 0$, 当 $t \ge t_2$ 时， $u_2(t,x) \le \frac{a_2}{b_{22}} + \varepsilon_2$. 所以可取 $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$, 当 $t \ge t_3$ 时， $(u_1, u_2) \le (\frac{a_1}{b_{11}} + \varepsilon_1, \frac{a_2}{b_{22}} + \varepsilon_2)$. 很明显 (1.1) 解的渐近稳定性与下列方程组解的渐近稳定性是等价的,

$$\begin{cases} u_{1t} - d_1\Delta u_1 = u_1(a_1 - b_{11}u_1 - b_{12}u_2 - e_1u_1J_2 * u_2), & (t,x) \in (t_3 + \tau_1 + \tau_2, +\infty) \times \Omega, \\ u_{2t} - d_2\Delta u_2 = u_2(a_2 - b_{21}u_1 - b_{22}u_2 - e_2u_2J_2 * u_1), & (t,x) \in (t_3 + \tau_1 + \tau_2, +\infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0, & (t,x) \in (t_3 + \tau_1 + \tau_2, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u_1(t,x)\mid_{t \in [t_3+\tau_2, t_3+\tau_1+\tau_2]} = u_1(t,x), & (t,x) \in [t_3 + \tau_2, t_3 + \tau_1 + \tau_2] \times \Omega, \\ u_2(t,x)\mid_{t \in [t_3+\tau_1, t_3+\tau_1+\tau_2]} = u_2(t,x), & (t,x) \in [t_3 + \tau_1, t_3 + \tau_1 + \tau_2] \times \Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

取 $\varepsilon_1 = \frac{a_2b_{11} - a_1b_{21}}{2b_{11}b_{21}}, \varepsilon_2 = \frac{a_1b_{22} - a_2b_{12}}{2b_{12}b_{22}}, \tilde{c} = (\frac{a_1}{b_{11}} + \frac{a_2b_{11} - a_1b_{21}}{2b_{11}b_{21}}, \frac{a_2}{b_{22}} + \frac{a_1b_{22} - a_2b_{12}}{2b_{12}b_{22}}), \hat{c} = (\delta_1, \delta_2)$, 其中

$$\delta_1 = \min(\inf_{(t,x) \in [t_3+\tau_2, t_3+\tau_1+\tau_2] \times \bar{\Omega}} u_1(t,x), \frac{b_{12}(a_1b_{22} - a_2b_{12})}{2b_{11}b_{12}b_{22} + e_1(a_1b_{22} + a_2b_{12})}),$$

$$\delta_2 = \min(\inf_{(t,x) \in [t_3+\tau_1, t_3+\tau_1+\tau_2] \times \bar{\Omega}} u_2(t,x), \frac{b_{21}(a_2b_{11} - a_1b_{21})}{2b_{11}b_{21}b_{22} + e_2(a_1b_{21} + a_2b_{11})}).$$

由简单的代数计算可知 $\tilde{c}, \hat{c}$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{c}_1(a_1 - b_{11}\tilde{c}_1 - b_{12}\hat{c}_2 - e_1\tilde{c}_1\hat{c}_2) \le 0, \\ \hat{c}_1(a_1 - b_{11}\hat{c}_1 - b_{12}\tilde{c}_2 - e_1\hat{c}_1\tilde{c}_2) \ge 0, \\ \tilde{c}_2(a_2 - b_{21}\hat{c}_1 - b_{22}\tilde{c}_2 - e_2\tilde{c}_2\hat{c}_1) \le 0, \\ \hat{c}_2(a_2 - b_{21}\tilde{c}_1 - b_{22}\hat{c}_2 - e_2\hat{c}_2\tilde{c}_1) \ge 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

很明显 $\tilde{c}, \hat{c}$ 是 (4.9) 的耦合上下解，, 构造满足 (3.1) 的迭代序列 $\{\bar{c}^{(m)}\}, \{\underline{c}^{(m)}\}, \bar{c}, \underline{c}$ 分别为 $\bar{c}^{(m)}, \underline{c}^{(m)}$ 的极限. 由于 $\hat{c} > 0$, 故 $\underline{c} > 0$. 因此 $\bar{c}, \underline{c}$ 满足的 (3.5) 可变为

$$\begin{cases} a_1 - b_{11}\bar{c}_1 - b_{12}\underline{c}_2 - e_1\bar{c}_1\underline{c}_2 = 0, \\ a_1 - b_{11}\underline{c}_1 - b_{12}\bar{c}_2 - e_1\underline{c}_1\bar{c}_2 = 0, \\ a_2 - b_{21}\underline{c}_1 - b_{22}\bar{c}_2 - e_2\bar{c}_2\underline{c}_1 = 0, \\ a_2 - b_{21}\bar{c}_1 - b_{22}\underline{c}_2 - e_2\underline{c}_2\bar{c}_1 = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

由 (4.11) 可推导出下列关系

$$(b_{21}e_1 - b_{11}e_2)(\bar{c}_1 - \underline{c}_1) + (b_{12}e_2 - b_{22}e_1)(\bar{c}_2 - \underline{c}_2) = 0. \tag{4.12}$$

结合 (4.12)(3.2) 可得， $\bar{c}_1 = \underline{c}_1, \bar{c}_2 = \underline{c}_2$. 再由定理 3.1 得 $\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = c^*(x \in \bar{\Omega})$. 根据以上的讨论，有下面结论.

定理 4.1 对于有非负非平凡初始值的 (1.1), 则

(1) 如果 $\eta_1(0,x) \equiv 0 (x \in \Omega), \eta_2(0,x)$ 不恒为 $0 (x \in \Omega)$, 那么当 $t \to +\infty$ 时, $(u_1(t,x), u_2(t,x)) \to (0, \frac{a_2}{b_{22}})$ 在 $\bar{\Omega}$ 一致成立.

(2) 如果 $\eta_2(0,x) \equiv 0 (x \in \Omega), \eta_1(0,x)$ 不恒为 $0 (x \in \Omega)$, 那么当 $t \to +\infty$ 时, $(u_1(t,x), u_2(t,x)) \to (\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ 在 $\bar{\Omega}$ 一致成立.

(3) 如果 $\eta_1(0,x), \eta_2(0,x)$ 都不恒为 $0(x \in \Omega)$, 而且 (4.2) 成立，那么当 $t \to +\infty$ 时, $(u_1(t,x), u_2(t,x)) \to (c_1^*, c_2^*)$ 在 $\bar{\Omega}$ 一致成立. 其中 c^* 是 (4.1) 的唯一正解.

注 4.1 对非负非平凡初始扰动，(1.1) 的正稳态解是全局渐近稳定的，因此 (1.1) 没有其它渐近稳态解，也没有非常值的渐近稳态解.

当条件 (4.2) 不成立时，我们分别讨论下列情形 (1.1) 解的渐近行为.

$$\frac{a_1}{a_2}<\frac{e_1}{e_2}<\frac{b_{12}}{b_{22}},\frac{a_1}{a_2}<\frac{e_1}{e_2}<\frac{b_{11}}{b_{21}}. \tag{4.13}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{22}}<\frac{e_1}{e_2}<\frac{a_1}{a_2},\frac{b_{11}}{b_{21}}<\frac{e_1}{e_2}<\frac{a_1}{a_2}. \tag{4.14}$$

(I). 在条件 (4.13) 成立时，(1.1) 解的渐近行为仍与 (4.9) 解的渐近行为等价. 取 $\varepsilon_1=\frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{2b_{11}b_{21}},\varepsilon_2=1,\tilde{c}=(\frac{a_1}{b_{11}}+\varepsilon_1,\frac{a_2}{b_{22}}+\varepsilon_2),\hat{c}=(0,\delta)$. 其中

$$\delta=\min(\inf_{(t,x)\in[t_3+\tau_1,t_3+\tau_1+\tau_2]\times\bar{\Omega}}u_2(t,x),\frac{b_{21}(a_2b_{11}-a_1b_{21})}{2b_{21}(b_{11}b_{22}+a_1e_2)+e_2(a_2b_{11}-a_1b_{21})}),$$

显然 $\tilde{c},\hat{c}$ 满足 (4.10). 因此，$\tilde{c},\hat{c}$ 是 (4.9) 的耦合上下解. 又由于 (3.1) 中

$$\underline{c}_1^{(m)}=\underline{c}_1^{(m-1)}+\frac{1}{K_1}\underline{c}_1^{(m-1)}(a_1-b_{11}\underline{c}_1^{(m-1)}-b_{12}\bar{c}_2^{(m-1)}-e_1\underline{c}_1^{(m-1)}J_2*\bar{c}_2^{(m-1)}),$$

故 $\underline{c}_1^{(m)}=0$. 则 $\underline{c}_1=0$. 同时，$\bar{c}_2\geq\underline{c}_2\geq\hat{c}_2=\delta>0$. 于是 (3.5) 可推导出

$$\begin{cases}\bar{c}_1(a_1-b_{11}\bar{c}_1-b_{12}\underline{c}_2-e_1\bar{c}_1\underline{c}_2)=0,\\ a_2-b_{22}\bar{c}_2=0,\\ a_2-b_{21}\bar{c}_1-b_{22}\underline{c}_2-e_2\underline{c}_2\bar{c}_1=0.\end{cases} \tag{4.15}$$

假设 $\bar{c}_1\neq0$, (4.15) 可推导出

$$\begin{cases}a_1-b_{11}\bar{c}_1-b_{12}\underline{c}_2-e_1\bar{c}_1\underline{c}_2=0,\\ a_2-b_{21}\bar{c}_1-b_{22}\underline{c}_2-e_2\underline{c}_2\bar{c}_1=0.\end{cases} \tag{4.16}$$

整理 (4.16) 得,

$$(b_{21}e_1-b_{11}e_2)\bar{c}_1=(b_{12}e_2-b_{22}e_1)\underline{c}_2+(a_2e_1-a_1e_2). \tag{4.17}$$

(4.17) 与 (4.13) 矛盾，故 $\bar{c}_1=0$. 由 (4.15) 得 $\bar{c}_1=\underline{c}_1=0,\bar{c}_2=\underline{c}_2=\frac{a_2}{b_{22}}$. 由定理 3.1 得 $\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=(0,\frac{a_2}{b_{22}})(x\in\bar{\Omega})$.

(II). 在条件 (4.14) 成立时，(1.1) 解的渐近行为仍与 (4.9) 解的渐近行为等价. 取 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{2b_{12}b_{22}},\tilde{c}=(\frac{a_1}{b_{11}}+\varepsilon_1,\frac{a_2}{b_{22}}+\varepsilon_2),\hat{c}=(\delta,0)$, 其中

$$\delta=\min(\inf_{(t,x)\in[t_3+\tau_2,t_3+\tau_1+\tau_2]\times\bar{\Omega}}u_1(t,x),\frac{b_{12}(a_1b_{22}-a_2b_{12})}{2b_{12}(b_{11}b_{22}+a_2e_1)+e_1(a_1b_{22}-a_2b_{12})}),$$

显然 $\tilde{c},\hat{c}$ 满足 (4.10). 因此，$\tilde{c},\hat{c}$ 是 4.9 的耦合上下解. 又由于 (3.1) 中

$$\underline{c}_2^{(m)}=\underline{c}_2^{(m-1)}+\frac{1}{K_2}\underline{c}_2^{(m-1)}(a_2-b_{21}\bar{c}_1^{(m-1)}-b_{22}\underline{c}_2^{(m-1)}-e_2\underline{c}_2^{(m-1)}J_1*\bar{c}_1^{(m-1)}),$$

故 $\underline{c}_2^{(m)}=0$. 则 $\underline{c}_2=0$. 同时，$\bar{c}_1\geq\underline{c}_1\geq\hat{c}_1=\delta>0$. 于是 (3.5) 可推导出

$$\begin{cases}a_1-b_{11}\bar{c}_1=0,\\ a_1-b_{11}\underline{c}_1-b_{12}\bar{c}_2-e_1\underline{c}_1\bar{c}_2=0,\\ \bar{c}_2(a_2-b_{21}\underline{c}_1-b_{22}\bar{c}_2-e_2\bar{c}_2\underline{c}_1)=0.\end{cases} \tag{4.18}$$

假设 $\bar{c}_2 \neq 0$, (4.18) 可推导出

$$\begin{cases} a_1 - b_{11}\underline{c}_1 - b_{12}\bar{c}_2 - e_1\underline{c}_1\bar{c}_2 = 0, \\ a_2 - b_{21}\underline{c}_1 - b_{22}\bar{c}_2 - e_2\bar{c}_2\underline{c}_1 = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

整理 (4.19) 得,

$$(b_{21}e_1 - b_{11}e_2)\underline{c}_1 = (b_{12}e_2 - b_{22}e_1)\bar{c}_2 + (a_2e_1 - a_1e_2). \tag{4.20}$$

(4.20) 与 (4.14) 矛盾，故 $\bar{c}_2 = 0$．由 (4.18) 得 $\bar{c}_1 = \underline{c}_1 = \frac{a_1}{b_{11}}, \bar{c}_2 = \underline{c}_2 = 0$. 由定理 3.1 得 $\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = (\frac{a_1}{b_{11}}, 0)(x \in \bar{\Omega})$. 因此得到下面结论.

定理 4.2　对于非负非平凡初始值 (1.1), 则

(1) 如果 $\eta_2(0,x)$ 不恒为 $0(x\in\Omega)$, 而且条件 (4.13) 成立，那么 $(u_1(t,x), u_2(t,x)) \to (0, \frac{a_2}{b_{22}})$ 在 $\bar{\Omega}$ 内一致成立.

(2) 如果 $\eta_1(0,x)$ 不恒为 $0(x\in\Omega)$, 而且条件 (4.14) 成立，那么 $(u_1(t,x), u_2(t,x)) \to (\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内一致成立.

注 4.2　条件 (4.13) 成立时，对于非负非平凡的初始扰动，$(0, \frac{a_2}{b_{22}})$ 是全局渐近稳定的；条件 (4.14) 成立时，对于非负非平凡的初始扰动，$(\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ 是全局渐近稳定的.

参考文献:

[1] MUKHOPADHYAY A, CHATTOPADHYAY J, TAPASWI P K. *A delay differential equations model of plankton allelopathy* [J]. Math. Biosci., 1998, **149**(2): 167–189.

[2] 宋新宇, 陈兰荪. 一类浮游生物植化相克时滞微分方程的周期解 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2003, **23**(1): 8–13.
SONG Xin-yu, CHEN Lan-sun. *Periodic solution of a delay differential equation of plankton allelopathy* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2003, **23**(1): 8–13. (in Chinese)

[3] PAO C V. *Systems of parabolic equations with continuous and discrete delays* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **205**(1): 157–185.

[4] PAO C V. *Convergence of solutions of reaction-diffusion systems with time delays* [J]. Nonlinear Anal., 2002, **48**(3): 349–362.

Stable Solution of a Delay Parabolic Equation of Plankton Allelopathy

TIAN Can-rong[1,2], *XU Fei*[2], *LIU Yong*[2]

(1. Basic Sci. Dept. Yancheng Institute of Technology, Jiangsu 224003, China;
2. School of Math. & Sci., Yangzhou University, Jiangsu 225002, China)

Abstract: A Volterra competing model arising in plankton allelopathy is considered. The asymptotical behavior of the solution is discussed using upper and lower solutions. A sufficient condition for the system to have a positive globally asymptotically stable solution is obtained.

Key words: time delay; upper and lower solution; globally stable.