第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0749-08 文献标识码: A

Bernstein 算子的逼近

郭顺生， 李翠香， 齐秋兰
(河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)
(E-mail: ssguo@hebtu.edu.cn)

摘 要: 本文利用点态光滑模 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 研究了 Bernstein 算子的 r 阶线性组合的点态逼近. 当 $1-1/r\le\lambda\le 1$ 时, 用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 给出了一个点态逼近等价定理. 且用反例说明了当 $0\le\lambda<1-1/r$ 时, 此结论不成立. 但若限制 $0<\alpha<\min\{\frac{2(r+1)}{2-\lambda},2r\}$, 则用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 给出了一个等价定理. 所得结果统一了已有的关于古典光滑模和 Ditzian-Totik 模的结果.

关键词: Bernstein 算子; 线性组合; 光滑模.
MSC(2000): 41A35, 41A36
中图分类: O174.5

1 引 言

Bernstein 算子定义为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})p_{n,k}(x),\quad p_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

该算子长期以来一直受到人们的特别关注，已有的研究成果十分丰富.

首先我们给出光滑模的定义: 设 $f(x)\in C[0,1], 0\le\lambda\le 1$, 则 r 阶光滑模定义为: $\omega_{\varphi^\lambda}^{r}(f,t)=\sup_{0<h\le t}\sup_{x\pm\frac{r}{2}h\varphi^\lambda(x)\in[0,1]}|\triangle_{h\varphi^\lambda(x)}^{r}f(x)|$, 其中 $\triangle_h f(x)=f(x+h/2)-f(x-h/2)$, $\triangle_h^r f(x)=\triangle_h(\triangle_h^{r-1}f(x))$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$. 当 $\lambda=0$ 时记为 $\omega^r(f,t)$, 当 $\lambda=1$ 时记为 $\omega_\varphi^r(f,t)$.

对此算子， Ditzian[1,2] 证明 $(\alpha<2, 0\le\lambda\le 1)$ 有

$$B_n(f,x)-f(x)=O((\frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}})^\alpha)\Leftrightarrow\omega_{\varphi^\lambda}^{2}(f,t)=O(t^\alpha). \tag{1.1}$$

这个结果统一并包含了古典光滑模 $(\lambda=0)$ 及 Ditzian-Totik 模 $(\lambda=1)$ 的结果.

为了提高其逼近阶及应用高阶光滑模的工具，引入 Bernstein 算子的线性组合如下 [3]:

$$B_{n,r}(f,x)=\sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)B_{n_i}(f,x), \tag{1.2}$$

其中 $C_i(n)$ 及 n_i 满足:

(a) $n=n_0<n_1<\cdots<n_{r-1}\le Kn$;

收稿日期: 2003-04-03
基金项目: 河北省自然科学基金 (A2004000137), 河北省博士基金 (B2001119), 河北师范大学博士基金 (L2000b02).

(b) $\sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\le C$;

(c) $\sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)=1$;

(d) $\sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)n_i^{-\rho}=0,\rho=1,2,\cdots,r-1$.

对于算子 $B_{n,r}(f,x)$, Ditzian[3] 证明了：对 $\alpha<2r$, 有

$$\|B_{n,r}(f,x)-f(x)\|=O(n^{-\alpha/2})\Leftrightarrow\omega_{\varphi}^{2r}(f,t)=O(t^{\alpha}),\tag{1.3}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示确界范. 显然 (1.3) 是 (1.1) 的推广. 我们 [4] 得到如下结果 $(0<\alpha<r,0\le\lambda\le 1)$:

$$B_{n,r}(f,x)-f(x)=O((n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha})\Leftrightarrow\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,t)=O(t^{\alpha}),\tag{1.4}$$

当 $\lambda=0$ 时, 类似于 (1.3) 的结论是不成立的 [5]. Ditzian 在评论结果 (1.4) 时指出 (见 MR99a41028): 人们应注意到：当 $\lambda=1$ 时, 已知的结果 (1.3) 在本质上更优于 (1.4), 但是这个不同是由问题本身决定的. 事实上, 当 $\lambda=0$ 时, (1.4) 中用 $\omega^{2r}(f,t)$ 代替 $\omega^{r}(f,t)$ 是不可能的. 那么对于哪些 λ 值, (1.4) 中可以用 $\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)$ 代替 $\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,t)$, 对于哪些 λ 值不能？什么情况下 (1.4) 中 $\delta_n(x)$ 可用 $\varphi(x)$ 代替？何时不能代替？本文统一处理了上述问题, 结果如下：

定理 1 对 $f\in C[0,1],r\in N$, 有

(1) 当 $1-1/r\le\lambda\le 1,0<\alpha<2r$ 时,

$$B_{n,r}(f,x)-f(x)=O((n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x))^{\alpha})\Leftrightarrow\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)=O(t^{\alpha});\tag{1.5}$$

(2) 当 $0\le\lambda<1-1/r(r\ge 2),0<\alpha<\frac{2(r+1)}{2-\lambda}$ 时,

$$B_{n,r}(f,x)-f(x)=O((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)))^{\alpha})\Leftrightarrow\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)=O(t^{\alpha}).\tag{1.6}$$

此处 $\delta_n(x)=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}$. 显然定理 1 优于 (1.4), 当 $\lambda=1$ 时, (1.3) 是 (1.5) 的特殊情况. 文中我们也指出在 (1.6) 中 $\delta_n(x)$ 不能用 $\varphi(x)$ 代替.

在本文中, C 表示不依赖于 n 及 x 的常数, 在不同的地方, 值可能不同.

2 引理及正定理

引理 2.1 对 $f(x)\in C[0,1],r\ge 2,f^{(2r-1)}(x)\in A.C.\mathrm{loc}$, 当 $r\lambda-m>0$ 时, 有

$$\|\varphi^{2r\lambda-2m}f^{(2r-m)}\|\le C(\|f\|+\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|).\tag{2.1}$$

证明 首先注意到 [3]

$$|f^{(2r-m)}(\frac{1}{2})|\le C(\|f\|_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}+\|f^{(2r)}\|_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]})\le C(\|f\|+\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|).$$

对 $r\lambda-m>0$, 当 x 在 0 附近时 $(x\le 1/2)$, 有

$$|f^{(2r-m)}(x)-f^{(2r-m)}(\frac{1}{2})|\le\int_x^{1/2}|f^{(2r-m+1)}(u)|\mathrm{d}u\le C\|x^{r\lambda-m+1}f^{(2r-m+1)}(x)\|_{[0,1/2]}x^{-(r\lambda-m)},$$

即

$$\|x^{r\lambda-m}f^{(2r-m)}(x)\|_{[0,1/2]}\le C(\|f\|+\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|+\|x^{r\lambda-m+1}f^{(2r-m+1)}(x)\|_{[0,1/2]}).\tag{2.2}$$

由此当 $m=1$ 时，(2.1) 成立. 这样由 (2.2), 利用递推的方法可得 (2.1). 当 $\frac{1}{2}<x\le 1$ 时，类似可得.

类似 [4] 中 (2.12) 的证明得：

引理 2.2 设 $R_{2r}(f,t,x)=\int_x^t(t-u)^{2r-1}f^{(2r)}(u)\mathrm{d}u, r\in N$, 则当 $x\in E_n=[1/n,1-1/n]$ 时，有

$$|B_n(R_{2r}(f,\cdot,x),x)|\le C(n^{-1/2}\varphi^{1-\lambda}(x))^{2r}\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|.$$

定理 2 对 $f(x)\in C[0,1]$, $r\in N$, $0\le\lambda\le 1$, $J=\max\{i|r\lambda-2r+i\le 0, i\le 2r-1\}$, 则有

$$\begin{aligned}&|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\\ &\le C\Big(\sum_{i=r+1}^{J}\omega^i(f,(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{1/i})+\omega^{2r}_{\varphi^\lambda}(f,n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x))+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}\|f\|\Big).\end{aligned}\tag{2.3}$$

证明 首先给出 K- 泛函的定义： $K^r_{\varphi^\lambda}(f,t^r)=\inf_{g^{(r-1)}\in A.C_{\mathrm{loc}}}\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^{r\lambda}g^{(r)}\|\}$. 由 [3, p11] 知： $\omega^r_{\varphi^\lambda}(f,t)\sim K^r_{\varphi^\lambda}(f,t^r)$ ($x\sim y$, 是指存在 $c_1,c_2>0$, 使得 $c_1x\le y\le c_2x$ 成立).

下面分两种情况证明：

(1) 当 $x\in E_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$ 时，对于固定的 x,λ 可选择 $g\equiv g_{n,x,\lambda}$ 使得

$$\|f-g\|+(n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x))^{2r}\|\varphi^{2r\lambda}g^{2r}\|\le C\omega^{2r}_{\varphi^\lambda}(f,n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x)).\tag{2.4}$$

由于 $|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\le C\|f-g\|+|B_{n,r}(g,x)-g(x)|$. 为了估计第二项，记 $R_{n,i}(x)=B_{n,r}((t-x)^i,x)$, $\overline{\triangle}_hf(x)=f(x+h)-f(x)$, $\overline{\triangle}_h^rf(x)=\overline{\triangle}_h(\overline{\triangle}_h^{r-1}f(x))$, $\bar{\omega}^r(f,t)=\sup_{<h\le t}\sup_{x,x+rh\in I}|\overline{\triangle}_h^rf(x)|$. 由 [3, p26] 知 $\omega^r(f,t)\sim\bar{\omega}^r(f,t)$.

定义 $T_{n,i}(g,x)=-\frac{1}{i!}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))\overline{\triangle}^i_{|R_{n,i}(x)|^{1/i}}g(x), r+1\le i\le J$. 通过计算得：

$$T_{n,i}((t-x)^j,x)=\begin{cases}0, & j<i,\\ -R_{n,i}(x), & j=i,\\ c_{i,j}|R_{n,i}(x)|^{j/i}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x)), & j>i,\end{cases}$$

其中 $c_{i,j}$ 是不依赖 n 和 x 的常数.

由此再定义 $T_{n,i,j_1}(g,x)=-\frac{c_{i,j_1}}{j_1!}\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))\overline{\triangle}^{j_1}_{|R_{n,i}(x)|^{1/i}}g(x)(i<j_1\le J)$. 一般地，若 $T_{n,i,j_1,\cdots,j_{k-1}}((t-x)^{j_k},x)=c_{i,j_1,\cdots,j_k}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))|R_{n,i}(x)|^{j_k/i}(i<j_1<\cdots<j_k\le J)$, 则定义 $T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x)=-\frac{c_{i,j_1,\cdots,j_k}}{j_k}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))\overline{\triangle}^{j_k}_{|R_{n,i}(x)|^{1/i}}g(x)$. 这些算子有以下性质：

$$|T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x)|\le C\omega^{j_k}(g,|R_{n,i}(x)|^{1/i}),$$

$$T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}((t-x)^j,x)=\begin{cases}0, & j<j_k,\\ -c_{i,j_1,\cdots,j_k}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))|R_{n,i}(x)|^{j_k/i}, & j=j_k,\\ c_{i,j_1,\cdots,j_k,j}|R_{n,i}(x)|^{j/i}(\mathrm{sgn}R_{n,i}(x))|, & j>j_k.\end{cases}$$

其中 $c_{i,j_1,\cdots,j_k,j}$ 是不依赖于 n 和 x 的常数.

令 $A_n(g,x)=B_{n,r}(g,x)+\sum_{i=r+1}^J\{T_{n,i}(g,x)+\sum_{r+1\le i\le j_1<\cdots<j_k\le J}T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x)\}$, 其中第二个和是对所有满足 $r+1\le i<j_1<\cdots<j_k\le J$ 的序列 $j_1,\cdots,j_k$ 求和. 则有

$$\|A_n\|\le M+\sum_{i=r+1}^{J}\{\frac{2^i}{i!}+\sum_{r+1\le i\le j_1<\cdots<j_k\le J}|c_{i,j_1,\cdots,j_k}|\frac{2^{j_k}}{j_k!}\}\le C.\tag{2.5}$$

当 $x\in E_n$ 时, $\varphi^{-1}(x)\le\sqrt{n}$, 对 $J+1\le j\le 2r-1$, 利用 ([3], p.134,(9.5.3)) 得

$$|A_n((t-x)^j,x|\le C|R_{n,i}(x)|^{j/i}\le C(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{j/i}\le Cn^{-r}\varphi^{2(j-r)}(x). \tag{2.6}$$

从 ([3],p.134,(9.5.5)) 及 $A_n(g,x)$ 的定义知:

$$A_n(g,x)-g(x)=\sum_{j=J+1}^{2r-1}\frac{1}{j!}A_n((t-x)^j,x)g^{(j)}(x)+A_n(R_{2r}(g,\cdot,x),x)=:I_1+I_2. \tag{2.7}$$

首先估计 I_1. 由 (2.6) 及引理 2.1 得 (注意到 $r=1$ 时, I_1 不存在)

$$|I_1|\le C|n^{-r}\varphi^{2(j-r)}(x)g^{(j)}(x)|\le Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)(\|g\|+\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|). \tag{2.8}$$

从

$$\begin{aligned}|T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(R_{2r}(g,\cdot,x),x)|&\le C\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|\varphi^{-2r\lambda}(x)|R_{n,i}(x)|^{2r/i}\\&\le Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{2r\lambda}g^{2r}\|\end{aligned}$$

及引理 2.2 得

$$|I_2|\le Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|. \tag{2.9}$$

从 (2.7), (2.8), (2.9) 及 $A_n(g,x)$ 定义知

$$\begin{aligned}&|B_{n,r}(g,x)-g(x)|\\&\le C\Big(\sum_{i=r+1}^{J}\omega^i(g,(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{1/i})+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}(\|g\|+\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|\\&\le C\Big(\|f-g\|+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}(\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|)+\\&\quad\sum_{i=r+1}^{J}\omega^i(f,(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{1/i})+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}\|f\|\Big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

再由 (2.4) 知 (2.3) 成立.

(2) 当 $x\in E_n^c=[0,1/n)\cup(1-1/n,1]$ 时. 对于固定的 x, 可选择 $g=g_{n,x}$ 使得 $\|f-g\|+\frac{\varphi^2(x)}{n^r}\|g^{(r+1)}\|\le C\omega^{r+1}(f,(\frac{\varphi^2(x)}{n^r})^{\frac{1}{r+1}})$. 利用 $B_{n,r}((t-x)^i,x)=0(i=1,\cdots,r)$, 及 $B_n((t-x)^{r+1},x)\le C\frac{\varphi^2(x)}{n^r}(x\in E_n^c)$ 得:

$$\begin{aligned}|B_{n,r}(f,x)-f(x)|&\le C\|f-g\|+|B_{n,r}(g,x)-g(x)|\\&\le C\|f-g\|+\Big|B_{n,r}\Big(\int_x^t(t-u)^rg^{(r+1)}(u)\mathrm{d}u,x\Big)\Big|\\&\le C\|f-g\|+\sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|B_{n_i}\Big(\Big|\int_x^t(t-u)^rg^{(r+1)}(u)\mathrm{d}u\Big|,x\Big)\\&\le C\|f-g\|+C\frac{\varphi^2(x)}{n^r}\|g^{(r+1)}\|\le C\omega^{r+1}(f,(\frac{\varphi^2(x)}{n^r})^{\frac{1}{r+1}}).\end{aligned}$$

综上所述, 定理 2 成立.

3 定理 1 中正部分的证明

为证定理 1, 我们先给出一个引理.

引理 3.1 对 $0<\alpha<\min\{\frac{2(r+1)}{2-\lambda},2r\},0\le\lambda\le1$, 若 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O(t^\alpha)$, 则

$$\omega^i(f,t)=O(t^{\alpha(1-\lambda/2)}),\quad r+1\le i\le 2r. \tag{3.1}$$

证明 利用关系式 [3]$\omega^s(f,t^{\frac{1}{1-\lambda/2}})\le M\omega_{\varphi^\lambda}^s(f,t)$, 及关系式 $\omega^s(f,t)\le Ct^s\{\int_s^c\frac{\omega^{s+1}(f,u)}{u^{s+1}}\mathrm{d}u+\|f\|\}$($c$ 是正常数), 因为当 $0<\alpha<\min\{\frac{2r}{2-\lambda},2r\}$ 时, $0<\alpha(1-\lambda/2)<r+1$, 我们能推断出: 若 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=O(t^\alpha)$, 则

$$\begin{aligned}\omega^{2r-1}(f,t)&\le Ct^{2r-1}\Big\{\int_{2r-1}^c\frac{\omega^{2r}(f,u)}{u^{2r}}\mathrm{d}u+\|f\|\Big\}\le Ct^{2r-1}\{t^{\alpha(1-\lambda/2)-2r+1}+\|f\|\}\\&\le Ct^{\alpha(1-\lambda/2)}.\end{aligned}$$

连续利用 $r-1$ 次可获得 (3.1).

定理 1 中 "$\Longleftarrow$" 的证明 我们分以下三种情况讨论.

(A) 当 $1-1/r<\lambda\le1,0<\alpha<2r$ 时, 定理 2(2.3) 中的 $J=r$, 则在 (2.3) 中的第一项和不存在, 故有 $|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\le C(\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}\|f\|)$. 由此可推得: 当 $1-1/r<\lambda\le1,0<\alpha<2r$ 时, (1.6) 中 "$\Longleftarrow$" 成立.

(B) 当 $\lambda=1-1/r,0<\alpha<2r$ 时, $J=r+1$, 由定理 2 及引理 3.1 并注意到 $\varphi^{\frac{2\alpha(1-\lambda/2)}{r+1}}(x)=\varphi^{\alpha(1-\lambda)}(x),n^{-r\frac{2\alpha(1-\lambda/2)}{r+1}}=n^{-\alpha/2}$, 有

$$|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\le C(n^{-r}\varphi^2(x))^{\frac{\alpha(1-\lambda/2)}{r+1}}+C(n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^\alpha\le C(n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^\alpha.$$

(C) 当 $0\le\lambda<1-1/r$ 时, 由定理 2 知

$$\begin{aligned}&|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\\&\le C\Big(\sum_{i=r+1}^J\omega^i(f,(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{1/i})+\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))+\frac{\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}\|f\|\Big).\end{aligned}\tag{3.2}$$

此时右端第一项和式中的各项, 应用引理 3.1 已不能再得出 $O((n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^\alpha)$ 的结论. 如 $i=r+1$ 时, $\omega^{r+1}(f,(n^{-r}\varphi^2(x))^{\frac{1}{r+1}})=O((n^{-r}\varphi^2(x))^{\frac{\alpha(1-\lambda/2)}{r+1}})\ne O((n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^\alpha)$. 事实上, 当 $0\le\lambda<1-1/r$ 时, 有 $r(1-\lambda)>1$, 若 $(n^{-r}\varphi^2(x))^{\frac{\alpha(1-\lambda/2)}{r+1}}\le C(n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^\alpha$, 则有 $(\frac{1}{\sqrt{n}\varphi(x)})^{\alpha\frac{r(1-\lambda)-1}{r+1}}\le C$. 当 $x\to0$ 时, 这是不可能的. 故得不到与 (A),(B) 相同的结论 (见下面注 1 的反例). 但由 (3.2) 可知

$$\begin{aligned}&|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\\&\le C\Big(\sum_{i=r+1}^J\omega^i(f,(n^{-r}\delta^{2(i-r)}(x))^{1/i})+\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,n^{-\frac12}\delta^{1-\lambda}(x))+\frac{\delta^{2r(1-\lambda)}(x)}{n^r}\|f\|\Big)\end{aligned}\tag{3.3}$$

从而应用引理 3.1 可知当 $0<\alpha<\frac{2(r+1)}{2-\lambda}$ 时,

$$|B_{n,r}(f,x)-f(x)|\le C\sum_{i=r+1}^{J}(n^{-r}\delta_n^{2(i-r)}(x))^{\frac{\alpha(1-\lambda/2)}{i}}+C(n^{-\frac12}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha}.$$

因为 $\delta_n^{-1}(x)\le\sqrt{n}$, 所以当 $r+1\le i\le J, r\lambda-2r+i\le 0$ 时,

$$(n^{-r}\delta_n^{2(i-r)}(x))^{\frac{\alpha(1-\lambda/2)}{i}}=(n^{-\frac12}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha}n^{-\frac{\alpha(2r-r\lambda-i)}{2i}}\delta_n^{\frac{\alpha(2r-r\lambda-i)}{i}}(x)\le(n^{-\frac12}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha}.$$

所以 (1.7) 中关系 “$\Longleftarrow$” 成立.

注 1 在定理 2 中, 当 $0\le\lambda<1-1/r$ 时, $\delta_n(x)$ 不能被 $\varphi(x)$ 代替.

反例: 令 $f(t)=t^{r+1}, r\ge 2$, 显然 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)=0$. 取 $x=1/n^s$, 经计算知 $B_{n,r}(f,x)-f(x)=B_{n,r}((t-x)^{r+1},x)\sim\frac{\varphi^2(x)}{n^r}\sim\frac{1}{n^{r+s}}$, 且 $(n^{-\frac12}\varphi^{1-\lambda}(x))^{\alpha}\sim n^{-\alpha/2}x^{\alpha(1-\lambda)/2}\sim n^{-\alpha/2-\alpha(1-\lambda)s/2}$.

另一方面, 我们知道, 当 $0\le\lambda<1-1/r, r\ge 2, 0<\alpha<\frac{2(r+1)}{2-\lambda}$ 时, $\frac{2}{1-\lambda}<\frac{2(r+1)}{2-\lambda}$, 所以可选 α 满足 $\alpha(1-\lambda)>2$. 这样若取 $s>\frac{2r-\alpha}{\alpha(1-\lambda)-2}$, 则 $\alpha/2+\alpha(1-\lambda)s/2>r+s$. 这就表明 $\varphi(x)$ 不能代替 $\delta_n(x)$.

注 2 在上例中, 若令 $x=1/n$, 也可看出, 当 $\alpha>\frac{2(r+1)}{2-\lambda}, 0\le\lambda<1-1/r, r\ge 2$ 时, 定理 2 中 “$\Longleftarrow$” 不成立.

注 3 因为当 $0\le\lambda<1-1/r, r\ge 2$ 时, $\frac{2(r+1)}{2-\lambda}<2r$, 由定理 2 及注 2 得到: 当 $1-1/r\le\lambda\le 1$ 时, 可以用 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ 代替 $\omega_{\varphi^\lambda}^{r}(f,t)$, 当 $0\le\lambda<1-1/r$ 时, 不能.

4 定理 1 中逆部分的证明

引理 4.1 当 $0<t<\frac{1}{16r}$, $rt\le x\le 1-rt$, $0<\beta\le 2r$ 时, 下式成立

$$\int\cdots\int_{-\frac t2}^{\frac t2}\varphi^{-\beta}(x+u_1+\cdots+u_{2r})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r}\le Ct^{2r}\varphi^{-\beta}(x). \tag{4.1}$$

证明 当 $\beta=2r$ 时, (4.1) 成立. 事实上, 当 $r=1$ 时, 即为文献 [6,p.266] 中的引理 3.15. 对于任意的 r, 当 $x\in[rt,\frac12]$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{-\frac t2}^{\frac t2}\varphi^{-2r}(x+u_1+\cdots+u_{2r})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r}\\ \le\ & C\prod_{j=1}^{r}\int\int_{-\frac t2}^{\frac t2}\varphi^{-2}(x-(r-1)t+u_{2j-1}+u_{2j})\mathrm{d}u_{2j-1}\mathrm{d}u_{2j}\\ \le\ & C\prod_{j=1}^{r}(t^2\varphi^{-2}(x-(r-1)t))\le Ct^{2r}\varphi^{-2r}(x).\end{aligned}$$

当 $x\in[\frac12,1-rt]$ 时, 可类似证明.

对于任意的 $0<\beta<2r$, 利用 Hölder 不等式可知引理 4.1 成立.

定理 1 中 “$\Longrightarrow$” 的证明 以下记 $\gamma_{n,\lambda}(x)=n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)$. 若 $B_{n,r}(f,x)-f(x)=O(\gamma_{n,\lambda}^{\alpha}(x))$,

则对任意的 $n > 2r$ 有

$$\begin{aligned}
&|\triangle^{2r}_{t\varphi^{\lambda}(x)}f(x)| \le |\triangle^{2r}_{t\varphi^{\lambda}(x)}(B_{n,r}(f,x)-f(x))| + |\triangle^{2r}_{t\varphi^{\lambda}(x)}(B_{n,r}(f,x))| \\
&\le C\gamma^{\alpha}_{n,\lambda}(x) + \sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\int\cdots\int_{-t\varphi^{\lambda}(x)/2}^{t\varphi^{\lambda}(x)/2}\Big|B^{(2r)}_{n_i}(f,x+\sum_{j=1}^{2r}u_j)\Big|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r} \\
&\le C\gamma^{\alpha}_{n,\lambda}(x) + \sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\int\cdots\int_{-t\varphi^{\lambda}(x)/2}^{t\varphi^{\lambda}(x)/2}\Big|B^{(2r)}_{n_i}(f-g,x+\sum_{j=1}^{2r}u_j)\Big|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r}+ \\
&\quad \sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\int\cdots\int_{-t\varphi^{\lambda}(x)/2}^{t\varphi^{\lambda}(x)/2}\Big|B^{(2r)}_{n_i}(g,x+\sum_{j=1}^{2r}u_j)\Big|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r} \\
&\equiv C\gamma^{\alpha}_{n,\lambda}(x) + J_1 + J_2
\end{aligned}$$

利用 [3] 中 (9.4.3): $B^{(m)}_n(f,x) = \frac{n!}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n-m}\overrightarrow{\triangle}^{m}_{1/n}f(k/n)p_{n-m,k}(x)$, 我们能推出

$$|B^{(2r)}_n(f,x)| \le Cn^{2r}\|f\|. \tag{4.3}$$

再由 [3] 中 (9.3.5): $\|\varphi^{2r}(x)B^{(2r)}_n f\| \le Cn^{r}\|f\|$, 可得

$$|B^{(2r)}_n(f,x)| \le Cn^{r}\varphi^{-2r}(x)\|f\|. \tag{4.4}$$

这样由 (4.3), (4.4) 及引理 4.1 得到

$$J_1 \le Ct^{2r}\gamma^{-2r}_{n,\lambda}(x)\|f-g\|. \tag{4.5}$$

另外，利用 [4] 中 (3.4) 的证明方法得 $|B^{(2r)}_n(f,x)| \le C\varphi^{-2r\lambda}(x)\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|$. 利用引理 4.1 能推出

$$J_2 \le Ct^{2r}\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|. \tag{4.6}$$

选择合适的 g, 利用 (4.5), (4.6) 可得

$$|\triangle^{2r}_{t\varphi^{\lambda}(x)}f(x)| \le C\Big(\gamma^{\alpha}_{n,\lambda}(x) + \frac{t^{2r}}{\gamma^{2r}_{n,\lambda}(x)}\omega^{2r}_{\varphi^{\lambda}}(f,\gamma_{n,\lambda}(x))\Big).$$

对任意固定的 $0<\delta<\frac{1}{16r}$, 取 n 充分大使得： $\gamma_{n,\lambda}(x)\le\delta<2\gamma_{n,\lambda}(x)$, 对每个 $x\in[0,1]$ 成立，这样有

$$|\triangle^{2r}_{t\varphi^{\lambda}(x)}f(x)| \le C\Big(\delta^{\alpha} + (\frac{t}{\delta})^{2r}\omega^{2r}_{\varphi^{\lambda}}(f,\delta)\Big).$$

从而有

$$\omega^{2r}_{\varphi^{\lambda}}(f,t) \le C\Big(\delta^{\alpha} + (\frac{t}{\delta})^{2r}\omega^{2r}_{\varphi^{\lambda}}(f,\delta)\Big).$$

利用 Berens-Lorentz 引理可推出

$$\omega^{2r}_{\varphi^{\lambda}}(f,t) = O(t^{\alpha}).$$

又因为 $B_{n,r}(f,x)-f(x)=O((n^{-1/2}\varphi(x))^{\alpha})$ 蕴含了 $B_{n,r}(f,x)-f(x)=O(\gamma_{n,\lambda}^{\alpha}(x))$, 故定理 1 中关系 "$\Longrightarrow$" 成立.

参考文献:

[1] DITZIAN Z. *Interpolation Theorems and the Rate of Convergence of Bernstein Polynomials* [M]. Approximation Theory III, 341–347, Academic Press, New York-London, 1980.

[2] DITZIAN Z. *Direct estimate for Bernstein polynomials* [J]. J. Approx. Theory, 1994, **79**: 165–166.

[3] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Springer-Verlag, New York, 1987.

[4] GUO Shun-sheng, YUE Shu-jie, LI Cui-xiang, et al. *A pointwise approximation theorem for linear combinations of Bernstein polynomials* [J]. Abstr. Appl. Anal., 1996, **1**(4): 397–406.

[5] DITZIAN Z. *A globle inverse theorem for combinations of Bernstein polynomials* [J]. J. Approx. Theory, 1979, **26**: 277-292.

[6] 陈文忠. 算子逼近论 [M]. 厦门: 厦门大学出版社, 1989.
CHEN Wen-zhong. *Theory of Operator Approximation* [M]. Xiamen: Xiamen Univ. Press, 1989. (in Chinese)

Approximation by Bernstein Operators

GUO Shun-sheng, LI CUI-xiang, QI Qiu-lan

(Dept. of Math., Hebei Teacher's University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: Using the pointwise modulus $\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)$, we discuss the approximation theorem for the r order linear combinations of Bernstein-Durrmerer operators. When $1-1/r\le\lambda\le1$, we give an equivalent theorem by $\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)$, and show that it does not hold for $0\le\lambda<1-1/r$ by a counterexample. But if $0<\alpha<\min\{\frac{2(r+1)}{2-\lambda},2r\}$, we obtain the similar results by $\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)$. The results contain the results about the classical modulus of smoothness and the Ditzian-Totik modulus.

Key words: Bernstein operators; linear combinations; modulus of smoothness.