第26卷第2期 数学研究与评论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0299-12 **文献标识码**: **A**

$(p,n-p)$ 共轭奇异边值问题双重非负解的存在性

李焱捷， 高文杰
(吉林大学数学研究所，吉林 长春 130012)
(E-mail: wjgao@mail.jlu.edu.cn)

摘 要: 本文研究如下形式的 $(p,n-p)$ 共轭奇异边值问题

$$\begin{cases} (-1)^{(n-p)}y^{(n)}=\varphi(t)f(t,y), & 0<t<1, \\ y^{(i)}(0)=0, & 0\le i\le p-1, \\ y^{(i)}(1)=0, & 0\le i\le n-p-1, \end{cases}$$

其中 $n\ge 2, 1\le p\le n-1$, φ 可允许在 $t=0$ 和 $t=1$ 时有奇性， f 可在 $y=0$ 时有奇性. 本文作者在 R. P. Agarwal 等人工作的基础上，在适当假设下证明了此问题双重非负解的存在性.

关键词: 共轭奇异边值问题；非负解；双重解.
MSC(2000): 34B05, 34B16
中图分类: O175.23

1 引 言

本文所讨论的是如下形式的 $(p,n-p)$ 共轭奇异边值问题

$$\begin{cases} (-1)^{(n-p)}y^{(n)}=\varphi(t)f(t,y), & 0<t<1, \\ y^{(i)}(0)=0, & 0\le i\le p-1, \\ y^{(i)}(1)=0, & 0\le i\le n-p-1, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $n\ge 2,\ 1\le p\le n-1$, φ 可允许在 $t=0$ 和 $t=1$ 时有奇性， f 可在 $y=0$ 时有奇性.

具奇性的非线性两点边值问题在应用中经常出现，而且通常只有正解才有实际意义. 对于 (1.1) 中 $n=2$, f 可在 $y=0$ 时有奇性的情形，已有多种存在性结果 (见 [1, 12] 及其引文). 对于 $n\ge 2$, [2] 和 [7] 的作者们讨论了解的存在性和唯一性. [5] 的作者们研究了不具奇性的 $(p,\ n-p)$ 共轭问题双重非负解的存在性.

在文 [2] 和 [5] 的启发下，我们讨论问题 (1.1) 在允许奇性的情形下双重非负解的存在性.

在本文中，$C^n(I)$ 表示集合 I 上所有 n 次连续可微函数全体构成的集合，简记 $C^0(I)\equiv C(I)$, $L^1(I)$ 表示 I 上所有可积函数的集合， $W^{n,1}(I)$ 为众所熟知的 Sobolev 空间.

我们用 $G(t,s)$ 表示 (1.1) 所对应的齐边值问题的 Green 函数. 由 [5] 中结果知,

$$(-1)^{n-p}G(t,s)\ge 0, \qquad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{1.2}$$

对于方程中所涉及的函数，我们做如下的假设:

收稿日期: 2004-02-20
基金项目: 国家自然科学基金 (10371050), 吉林大学 985 项目.

H1. $\varphi \in C(0,1) \cap L^1[0,1]$, 且对 $t \in (0,1)$ $\varphi(t) > 0$.

H2. $f : [0,1] \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ 连续；且存在 $(0,\infty)$ 上的连续非增函数 $g > 0$, 和 $[0,\infty)$ 上的连续函数 $h \geq 0$, 使得 $\frac{h}{g}$ 是 $(0,\infty)$ 上的非降函数，且有

$$f(t,y) \leq g(y) + h(y), \quad (t,y) \in [0,1] \times (0,\infty), \tag{1.3}$$

其中函数 g 还满足条件:

$$\int_0^1 \varphi(s) g(s^p) \mathrm{d}s < \infty; \tag{1.4}$$

$$\int_0^1 \varphi(s) g((1-s)^{n-p}) \mathrm{d}s < \infty. \tag{1.5}$$

进一步，存在一常数 $K_0 > 0$, 使得对于所有的 $a > 0$, $b > 0$ 都有

$$g(ab) \leq K_0 g(a) g(b), \tag{1.6}$$

$$\sup_{y \in (0,\infty)} \left(\frac{y}{g(y) + h(y)} \right) > a_0 K_0, \tag{1.7}$$

其中

$$a_0 = \sup\nolimits_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^t | G(t,s) | \varphi(s) g(s^p) \mathrm{d}s + \int_t^1 | G(t,s) | \varphi(s) g((1-s)^{n-p}) \mathrm{d}s \right\}.$$

H3. 存在 $l \in (0, \dfrac{1}{2})$ 和 $\tau(t) > 0$, $\tau \in C[l, 1-l]$, $t \in [l, 1-l]$, 使得

$$\varphi(t) f(t,y) \geq \tau(t) \left[g(y) + h(y)) \right], \quad (t,y) \in [l, 1-l] \times (0,\infty). \tag{1.8}$$

H4. 对于每个常数 $R > 0$, 都存在一个 $[0,1]$ 上的连续函数 $\Psi_R(t)$, 使得当 $t \in (0,1)$ 时 $\Psi_R > 0$, 且有

$$f(t,y) \geq \Psi_R(t), \qquad (t,y) \in (0,1) \times (0,R]. \tag{1.9}$$

在上述假设下，容易看出存在 $0 \leq \sigma \leq 1$, 使得

$$\int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(\sigma,s) \tau(s) \mathrm{d}s = \sup_{t \in [0,1]} \int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(t,s) \tau(s) \mathrm{d}s; \tag{1.10}$$

选择 $M_0 > 0$, 使得 $\dfrac{M_0}{a_0 K_0 \left[g(M_0) + h(M_0) \right]} > 1$, 则存在 $N_0 > M_0$, 使得

$$\frac{x}{g(x) + h(x)} \leq \theta \int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(\sigma,s) \tau(s) \mathrm{d}s \quad x \in [\theta N_0, N_0], \tag{1.11}$$

其中 θ 是与 n, p 有关的常数.

我们的主要结果是:

定理 1.1 假设 H1–H4 成立. 则问题 (1.1) 有两个解 $y^*, y^{**} \in C^{n-1}[0,1] \cap C^n(0,1)$. 使得对一切 $t \in [0,1]$, $y^* \geq 0$, 而对 $t \in (0,1)$, $y^{**} > 0$. 进一步有 $0 <| y^* |_0 < M_0 \leq | y^{**} |_0 \leq N_0$, 其中 M_0 和 N_0 为前面所选定的常数.

本文的安排如下：我们首先在节 2 中给出源于 [2] 的一存在性定理， Krasnosel'skii 不动点定理和几个与本文相关的结果；然后在节 3 中给出第一个正解存在性的证明；在节 4 中给出第二个正解存在性的证明；最后在节 5 中给出可应用本文主要结果的一个实际例子.

2 一些预备结果

假设 $y\in C^{n-1}[0,1]\cap C^{n}(0,1)$, 满足

$$\begin{cases}(-1)^{n-p}y^{(n)}(t)>0, & 0<t<1,\\ y^{(i)}(0)=0, & 0\le i\le p-1,\\ y^{(i)}(1)=0, & 0\le i\le n-p-1.\end{cases}\tag{2.1}$$

由 [8] 中结果知，存在 $t_0\in(0,1)$, 使得 $y(t)$ 在 t_0 点取极大值. 如果我们定义

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{|\,y\,|_0}{t_0^p}t^p, & 0\le t\le t_0,\\ \dfrac{|\,y\,|_0}{(1-t_0)^{n-p}}(1-t)^{n-p}, & t_0\le t\le 1,\end{cases}\tag{2.2}$$

这里 $|\,y(t)\,|_0=\sup_{t\in[0,1]}|\,y(t)\,|=y(t_0)$, 则 $y(t)\ge p(t),\ t\in[0,1]$. 此不等式由 Eloe 和 Henderson 在 [8] 中给出，对此不等式的加细由 Agarwal 和 Wong 在 [4] 中给出.

定理 2.1 假设 $y\in C^{n-1}[0,1]\cap C^{n}(0,1)$, 满足

$$\begin{cases}(-1)^{n-p}y^{(n)}(t)>0, & 0<t<1,\\ y(0)=y(1)=a\ge 0, & \\ y^{(i)}(0)=0, & 1\le i\le p-1,\\ y^{(i)}(1)=0, & 1\le i\le n-p-1.\end{cases}\tag{2.3}$$

那么存在 $t_0\in(0,1)$, 使得 $y(t)$ 在 t_0 点取极大值，且

$$y(t)\ge\mu(t)\qquad t\in[0,1],\tag{2.4}$$

这里

$$\mu(t)=\begin{cases}t^p y(t_0)=t^p\,|\,y\,|_0, & 0\le t\le t_0,\\ (1-t)^{n-p}y(t_0)=(1-t)^{n-p}\,|\,y\,|_0, & t_0\le t\le 1.\end{cases}\tag{2.5}$$

证明 令 $u=y-a$, 则有

$$\begin{cases}(-1)^{n-p}u^{(n)}(t)>0, & 0<t<1,\\ u^{(i)}(0)=0, & 0\le i\le p-1,\\ u^{(i)}(1)=0, & 0\le i\le n-p-1.\end{cases}$$

由上讨论知， $u(t)$ 在 $t_0\in(0,1)$ 处取极大值，而且 $u(t)\ge p(t)\ \ t\in[0,1]$. 故 y 在 $(0,1)$ 上有极大值，且

$$y(t)-a\ge\frac{u(t_0)}{t_0^p}t^p\ge[y(t_0)-a]t^p,\qquad 0\le t\le t_0,$$

所以

$$y(t)\ge t^p y(t_0)+a[1-t^p]\ge t^p y(t_0)=\mu(t),\qquad 0\le t\le t_0.$$

$t_0 \le t \le 1$ 时的情况类似.

接下来我们将针对 $(p,\ n-p)$ 共轭边值问题

$$\begin{cases} (-1)^{n-p}y^{(n)} = h(t,y), & \text{a.e. } t \in [0,1], \\ y^{(i)}(0) = a_i, & 0 \le i \le p-1, \\ y^{(i)}(1) = b_i, & 0 \le i \le n-p-1, \end{cases} \tag{2.6}$$

列出 [2] 中的一存在性结果. 这里 $h(t,y) : [0,1] \times R \to R$ 是一个 L^1-Carathéodory 函数，即满足下述条件的函数.

(1) 对几乎所有的 $t \in [0,1]$, $h(t,y)$ 关于 $y \in R$ 是连续的,

(2) 对任意的 $y \in R$, $h(t,y)$ 关于 $t \in [0,1]$ 可测,

(3) 对每个 $r > 0$, 存在 $\mu_r \in L^1[0,1]$, 当 $|z| \le r$ 时, 对几乎所有的 $t \in [0,1]$ $|h(t,z)| \le \mu_r(t)$.

定理 2.2 令 $h : [0,1] \times R \to R$ 是一个 L^1-Carathéodory 函数，如果关于

$$\begin{cases} (-1)^{n-p}y^{(n)} = \lambda h(t,y), & \text{a.e. } t \in [0,1], \\ y^{(i)}(0) = a_i, & 0 \le i \le p-1, \\ y^{(i)}(1) = b_i, & 0 \le i \le n-p-1, \end{cases} \tag{2.7}$$

$\lambda \in (0,1)$ 的任意解 $y \in W^{n,1}[0,1]$, 存在一不依赖于 λ 的常数 $M_0 > |w|_0$, 使得 $|y|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)| \ne M_0$. 其中 w 是

$$\begin{cases} y^{(n)} = 0, & t \in [0,1], \\ y^{(i)}(0) = a_i, & 0 \le i \le p-1, \\ y^{(i)}(1) = b_i, & 0 \le i \le n-p-1 \end{cases} \tag{2.8}$$

的唯一解，那么 (2.6) 至少有一个解 $y \in W^{n,1}[0,1]$, 且 $|y|_0 \le M_0$.

对 $s \in [0,1]$, 设 $v(s) \in [0,1]$ 使得

$$\sup_{t\in[0,1]} (-1)^{n-p}G(t,s) = \sup_{t\in[0,1]} |G(t,s)| = |G(v(s),s)|\ . \tag{2.9}$$

根据 [3] 我们有如下结果:

定理 2.3 对任何 $l \in (0, \frac{1}{2})$ 和 $t \in [l, 1-l]$

$$(-1)^{n-p}G(t,s) \ge \theta\ |G(v(s),s)|, \tag{2.10}$$

这里 $0 \le \theta \le 1$ 为由下式定义的常数:

$$\begin{aligned} \theta = \min\{ \quad & b(p)\min\{c(p), c(n-p-1)\}, \\ & b(p-1)\min\{c(p-1), c(n-p)\}\}\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$b(x) = \frac{(n-1)^{n-1}}{x^x(n-x-1)^{n-x-1}} \ \text{ 且 } \ c(x) = l^x(1-l)^{n-x-1}.$$

注意：如果 $n=2$, $p=1$ 则 $b(1)=0$, $b(0)=1$.

定义 2.1 设 E 是一个 Banach 空间， K 是 E 中的非空闭子集，如果它满足:

(1) 若 $x \in K, \zeta \ge 0$, 则 $\zeta x \in K$;

(2) 若 $x \in K, -x \in K$, 则 $x = 0$.

则称 K 是 E 中的锥.

定理 2.4[6,10] 设 $E=(E,\|\cdot\|)$ 是一个 $Banach$ 空间， $K\subset E$ 是 E 中一锥. 假设 Ω_1,Ω_2 是 E 中两个开集， $0\in\Omega_1$ 且 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若 $A:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是一全连续映射，使得：

$$\| Au \|\le\| u \|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_1,\quad 且\ \| Au \|\ge\| u \|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_2.$$

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一不动点.

3 第一个正解的存在性

在本节中我们给出第一个正解 y^* 存在性的证明.

选择 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<M_0$, 使得

$$\frac{M_0}{\varepsilon+a_0K_0\left[g(M_0)+h(M_0)\right]}>1. \tag{3.1}$$

选定 $m_0\in\{1,2,\cdots\}$, 使得 $\frac{1}{m_0}<\varepsilon$, 且 $M_0+\frac{1}{m_0}<N_0$. 令 $Z_0=\{m_0,m_0+1,\cdots\}$. 首先，我们证明：对于每个 $m\in Z_0$, 问题

$$\begin{cases}(-1)^{n-p}y^{(n)}=\varphi(t)f_m(t,y), & 0<t<1,\\ y(0)=\frac{1}{m}, & \\ y(1)=\frac{1}{m}, & \\ y^{(i)}(0)=0, & 1\le i\le p-1,\\ y^{(i)}(1)=0, & 1\le i\le n-p-1\end{cases} \tag{3.2}$$

都有一个解. 其中

$$f_m(t,u)=\begin{cases}f(t,u), & u\ge\frac{1}{m},\\ f(t,\frac{1}{m}), & u<\frac{1}{m}.\end{cases} \tag{3.3}$$

我们将应用定理 2.2 来证明此结果. 先考虑如下问题：

$$\begin{cases}(-1)^{n-p}y^{(n)}=\lambda\varphi(t)f_m(t,y), & 0<t<1,\\ y(0)=\frac{1}{m}, & \\ y(1)=\frac{1}{m}, & \\ y^{(i)}(0)=0, & 1\le i\le p-1,\\ y^{(i)}(1)=0, & 1\le i\le n-p-1,\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $0<\lambda<1$. 设 $y\in W^{n,1}[0,1]$ 是 (3.4) 的任意解，那么

$$y(t)=\frac{1}{m}+\lambda(-1)^{n-p}\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f_m(s,y(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1]. \tag{3.5}$$

由 (1.2) 和 (3.5) 式知,

$$y(t)\ge\frac{1}{m},\qquad t\in[0,1]. \tag{3.6}$$

当 $\lambda=1$ 时， (3.4) 的任意解 $y\in C^{n-1}[0,1]\cap C^n(0,1)$ 也满足 (3.6) 式.

接下来要说明，对于 (3.4) 的任意解 y 都有：

$$|\ y\ |_0=\sup_{t\in[0,1]}y(t)\ne M_0. \tag{3.7}$$

为此，我们设 y 为 (3.4) 的任意解，并且 $y(t)$ 在 $t_0\in(0,1)$ 处取极大值. 根据定理 2.1 知,

$$y(t)\geq\begin{cases} t^p y(t_0), & 0\leq t\leq t_0,\\ (1-t)^{n-p}y(t_0), & t_0\leq t\leq 1.\end{cases}\tag{3.8}$$

由 (3.5), (3.6) 知

$$y(t)=\frac{1}{m}+\lambda(-1)^{n-p}\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)f(s,y(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

所以

$$y(t_0)\leq\frac{1}{m}+\int_0^1 \mid G(t_0,s)\mid \varphi(s)g(y(s))\left\{1+\frac{h(y(s))}{g(y(s))}\right\}\mathrm{d}s.\tag{3.9}$$

现在根据 (1.3), (1.6), (3.8) 和 (3.9) 有

$$\begin{aligned} y(t_0)\leq&\frac{1}{m}+\left\{1+\frac{h(y(t_0))}{g(y(t_0))}\right\}\int_0^{t_0}\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g(s^py(t_0))\mathrm{d}s+\\ &\left\{1+\frac{h(y(t_0))}{g(y(t_0))}\right\}\int_{t_0}^1\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g((1-s)^{n-p}y(t_0))\mathrm{d}s\\ \leq&\varepsilon+\left\{1+\frac{h(y(t_0))}{g(y(t_0))}\right\}K_0g(y(t_0))\int_0^{t_0}\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g(s^p)\mathrm{d}s+\\ &\left\{1+\frac{h(y(t_0))}{g(y(t_0))}\right\}K_0g(y(t_0))\int_{t_0}^1\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g((1-s)^{n-p})\mathrm{d}s\\ \leq&\varepsilon+g(y(t_0))\left\{1+\frac{h(y(t_0))}{g(y(t_0))}\right\}a_0K_0. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{y(t_0)}{\varepsilon+a_0K_0\left[g(y(t_0))+h(y(t_0))\right]}\leq 1.\tag{3.10}$$

根据 (3.1) 知 $y(t_0)\neq M_0$. 由定理 2.2 知 (3.2) 有一解 $y_m\in W^{n,1}[0,1]$ 且

$$\frac{1}{m}\leq y_m(t)<M_0,\quad t\in[0,1].\tag{3.11}$$

由 H4 和 (3.11) 知存在一 $[0,1]$ 上的连续函数 $\Psi_{M_0}(t)>0$, $t\in(0,1)$, 使得:

$$f(t,y_m(t))\geq\Psi_{M_0}(t),\qquad (t,y_m(t))\in(0,1)\times(0,M_0].$$

由 y_m 和 f_m 的定义知:

$$\begin{aligned} y_m(t)=&\frac{1}{m}+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f(s,y_m(s))\mathrm{d}s\\ \geq&\frac{1}{m}+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)\Psi_{M_0}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}\tag{3.12}$$

令

$$\Phi_{M_0}(t)=t^{-p}(1-t)^{p-n}\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)\Psi_{M_0}(s)\mathrm{d}s,\quad t\in(0,1).$$

利用 [2] 中的证明方法和对 Green 函数的估计及上述表达式，容易得知 Φ_{M_0} 可扩展为 $[0,1]$ 上的连续函数，且存在常数 $\beta_0>0$, 使得 $\Phi_{M_0}(t)\geq\beta_0>0,\quad t\in[0,1]$. 于是

$$y_m(t)\geq\frac{1}{m}+\beta_0 t^p(1-t)^{n-p}. \tag{3.13}$$

我们利用 Arzela-Ascoli 定理来得到 (1.1) 的第一个解. 我们首先证明： $\{y_m\}_{m\in Z_0}$ 是 $[0,1]$ 上的有界等度连续族.

(3.11) 自然蕴涵着 $\{y_m\}_{m\in Z_0}$ 是一致有界的，所以我们只须考察其等度连续性. 注意到：

$$y_m'(t)=\int_0^1(-1)^{n-p}G_t(t,s)\varphi(s)f(s,y_m(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

再根据 (1.3), (3.11) 和 (3.13) 知对 $t\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}|\ y_m'(t)\ |&\leq\int_0^1|\ G_t(t,s)\ |\ \varphi(s)g(y_m(s))\{1+\frac{h(y_m(s))}{g(y_m(s))}\}\mathrm{d}s\\&\leq\{1+\frac{h(M_0)}{g(M_0)}\}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1|\ G_t(t,s)\ |\ \varphi(s)g(\beta_0 s^p(1-s)^{n-p})\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

上式右端是与 m 无关的常数，因此 $\{y_m\}_{m\in Z_0}$ 是等度连续的.

由 Arzela-Ascoli 定理知，存在 Z_0 的一子序列 Z 和一函数 $y^*\in C(0,1)$, 当 $m\to\infty$ 时, y_m $(m\in Z)$ 在 $[0,1]$ 上一致地趋于 y^* . 而且有 $y^*(0)=y^*(1)=0,\ \beta_0 t^p(1-t)^{n-p}\leq y^*(t)<M_0,\quad t\in[0,1]$. 同时，由 $y_m(m\in Z)$ 满足

$$y_m(t)=\frac{1}{m}+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f(s,y_m(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1], \tag{3.14}$$

及

$$|\ \varphi(s)f(s,y_m(s))\ |\leq\left\{1+\frac{h(M_0)}{g(M_0)}\right\}\varphi(s)g(\beta_0 s^p(1-s)^{n-p}),$$

知

$$\begin{aligned}|\ y_m(t)\ |&\leq\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\ |\ \varphi(s)f(s,y_m(s))\ |\ \mathrm{d}s\\&\leq\{1+\frac{h(M_0)}{g(M_0)}\}\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)g(\beta_0 s^p(1-s)^{n-p})\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

上式右端函数属于 $L^1[0,1]$. 根据 Lebesgue 控制收敛定理，在 (3.14) 中，令 $m\to\infty$ $(m\in Z)$, 得

$$y^*(t)=\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f(s,y^*(s))\mathrm{d}s. \tag{3.15}$$

由此易知 y^* 是问题 (1.1) 的一个解，且 $0<|\ y^*\ |_0<M_0$.

4 第二个正解的存在性

我们将利用定理 2.4 来证明第二个正解 y^{**} 的存在性.

设 $E=(C[0,1],|\cdot|_0)$, $K=\{u\in C[0,1]:u(t)\geq 0,t\in[0,1]$ 且 $\min_{t\in[l,1-l]}u(t)\geq\theta\mid u\mid_0\}$; l 如 H3 中所选定， θ 如 (2.11) 中定义．易见 K 为 E 中一锥．对于每个固定的 $m\in Z_0$ ，定义 $A:K\to C[0,1]$ 为

$$Au(t)=\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f_m(s,u(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{m}, \tag{4.1}$$

f_m 如 (3.4) 中定义.

首先证明 A 为全连续算子.

设 U 为 K 中的有界集，记 $A(U)=\{y\in C[0,1];y=Au,u\in U\}$. 则存在常数 $r_0>0$ ，使得对任何 $u\in U$, 有 $\mid u\mid_0\leq r_0$. 由假设易见 $\varphi(t)f_m(t,u)$ 为 L^1-Carathéodory 函数，故存在 $\mu_{r_0}\in L^1[0,1]$, 使得对几乎所有的 $t\in[0,1]$, 当 $\mid u\mid_0\leq r_0$ 时

$$\mid\varphi(t)f_m(t,u)\mid\leq\mu_{r_0}(t).$$

于是对任意 $u\in U$ ：

$$\begin{aligned}\mid Au\mid_0&=\sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f_m(s,u(s))\mathrm{d}s\right\}\\&\leq\sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\mu_{r_0}(s)\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned}$$

因此， $A(U)$ 中的函数在 $[0,1]$ 上一致有界．并且，

$$\mid(Au)'(t)\mid_0\leq\sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1(-1)^{n-p}\mid G_t(t,s)\mid\mu_{r_0}(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

即 $A(U)$ 具有等度连续性.

下面证明 A 的连续性.

设 $\{u_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中收敛于 u_0, 则 $\{u_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中有界，因此，存在常数 $r_1>0$, 使得当 $t\in[0,1]$ 时，有

$$\mid u_n(t)\mid\leq r_1,\quad n=0,1,2,\cdots$$

而在 $[0,1]\times[0,r_1]$ 上 f_m 是一致连续的， G 是连续的， φ 是可积的，所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $v_1,v_2\in[0,r_1]$, 且 $\mid v_1-v_2\mid<\delta$ 时，对于 $\forall\ (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ 恒有

$$\mid f_m(s,v_1(s))-f_m(s,v_2(s))\mid<\frac{\varepsilon}{1+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)}.$$

由于 $\{u_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中收敛于 u_0 , 故存在自然数 N , 使当 $n\geq N$ 时，恒有 $\mid u_n-u_0\mid<\delta$, 于是

$$\begin{aligned}&\mid Au_n(t)-Au_0(t)\mid\\&\leq\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)\mid f_m(s,u_n(s))-f_m(s,u_0(s))\mid\mathrm{d}s\\&<\frac{\varepsilon}{1+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)}\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 Ascoli-Arzela 定理知 A 为全连续算子.

接下来证明 $A: K \to K$.

已知 $Au(t) \geq \frac{1}{m} > 0, \quad t \in [0,1]$. 再由 (2.9) 知

$$| Au |_0 \leq \int_0^1 | G(v(s), s) | \varphi(s) f_m(s, u(s)) \mathrm{d}s + \frac{1}{m}. \tag{4.2}$$

于是知,

$$\begin{aligned}
&\min_{t\in[l,1-l]} Au(t) \\
&= \min_{t\in[l,1-l]} \int_0^1 (-1)^{n-p} G(t,s)\varphi(s) f_m(s,u(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{m} \\
&\geq \theta \int_0^1 | G(v(s),s) | \varphi(s) f_m(s,u(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{m} \\
&\geq \theta \mid Au \mid_0 .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

因此 $A: K \to K$ 是全连续算子.

仍是对于每个固定的 $m \in Z_0$, 令:

$$\Omega_1 = \left\{ u \in C[0,1], | u |_0 < M_0 + \frac{1}{m} \right\}, \quad \Omega_2 = \{ u \in C[0,1], | u |_0 < N_0 \} .$$

我们首先证明，当 $u \in K \cap \partial\Omega_2$ 时， $| Au | \geq | u |_0$.

令 $u \in K \cap \partial\Omega_2$, 则 $| u |_0 = N_0$, 且 $\min_{t\in[l,1-l]} u(t) \geq \theta \mid u \mid_0$, 即 $u \in [\theta N_0, N_0]$, $t \in [l, 1-l]$. 由 (1.3), (1.8) (σ 如 (1.10) 所定义),

$$\begin{aligned}
Au(\sigma) &= \int_0^1 (-1)^{n-p} G(\sigma,s)\varphi(s) f_m(s,u(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{m} \\
&\geq \int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(\sigma,s)\tau(s) \left[g(u(s)) + h(u(s)) \right] \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

再根据 (1.11) 知,

$$\begin{aligned}
Au(\sigma) &\geq \frac{1}{\theta \int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(\sigma,s)\tau(s)\mathrm{d}s} \int_l^{1-l} (-1)^{n-p} G(\sigma,s)\tau(s)u(s)\mathrm{d}s \\
&= N_0 = | u |_0 .
\end{aligned}$$

其次我们证明，当 $u \in K \cap \partial\Omega_1$ 时， $| Au |_0 \leq | u |_0$.

根据 (3.11) 知 $\frac{M_0}{a_0 K_0 [g(M_0)+h(M_0)]} > 1$, 再根据 g, h 的连续性知，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\frac{M}{a_0 K_0 \left[g(M) + h(M) \right]} > 1, \quad M \in [M_0 - \delta, M_0 + \delta]$$

成立. 且存在 $\xi > 0$ 使得

$$\frac{M}{a_0 K_0 \left[g(M) + h(M) \right]} > 1 + \xi, \quad M \in [M_0 - \delta, M_0 + \delta].$$

注意到 $a_0K_0\left[g(M)+h(M)\right]$ 在 $[M_0-\delta, M_0+\delta]$ 上有界，不妨设

$$K_1 < a_0K_0\left[g(M)+h(M)\right] < K_2, \qquad M\in[M_0-\delta, M_0+\delta].$$

那么只要选取 $0<\eta<K_1\xi$ 就有

$$\frac{M-\eta}{a_0K_0\left[g(M)+h(M)\right]} > 1, \qquad M\in[M_0-\delta, M_0+\delta], \quad \eta\in(0, K_1\xi).$$

选定 $m_1\in\{1,2,\cdots\}$, 使得 $\frac{1}{m_1}<\min\{\delta,\ K_1\xi,\ \varepsilon\}$. 且令 $Z_1=\{m_1, m_1+1,\cdots\}$, 我们就有: 若 $u\in K\cap\partial\Omega_1$, 则 $\mid u\mid_0=\sup_{t\in[0,1]}u(t)=M_0+\frac{1}{m},\ m\in Z_1\subset Z_0$. 而且

$$\begin{aligned}Au(t) &\le \int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)g(u(s))\left[1+\frac{h(u(s))}{g(u(s))}\right]\mathrm{d}s+\frac{1}{m}\\ &\le \left[1+\frac{h(M_0+\frac{1}{m})}{g(M_0+\frac{1}{m})}\right]\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)g(u(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

由 $m\in Z_1$ 的选取知,

$$\frac{M_0}{a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})} > 1+\frac{h(M_0+\frac{1}{m})}{g(M_0+\frac{1}{m})}.$$

再根据 (1.7), (1.8) 和 (3.8) 便知,

$$\begin{aligned}Au(t) \le&\frac{M_0}{a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})}\{\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)g(u(s))\mathrm{d}s\}+\frac{1}{m}\\ \le&\frac{M_0}{a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})}\{\int_0^{t_0}\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g(s^p(M_0+\frac{1}{m}))\mathrm{d}s+\\ &\int_{t_0}^1\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g((1-s)^{n-p}(M_0+\frac{1}{m}))\mathrm{d}s\}+\frac{1}{m}\\ \le&\frac{M_0}{a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})}K_0g(M_0+\frac{1}{m})\{\int_0^{t_0}\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g(s^p)\mathrm{d}s+\\ &\int_{t_0}^1\mid G(t_0,s)\mid\varphi(s)g((1-s)^{n-p})\mathrm{d}s\}+\frac{1}{m}\\ \le&\frac{M_0}{a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})}a_0K_0g(M_0+\frac{1}{m})+\frac{1}{m}\\ =&M_0+\frac{1}{m}=\mid u\mid_0 .\end{aligned}$$

由定理 2.4, 我们知道 A 有一不动点 $y_m\in K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$, 且

$$y_m(t)=\frac{1}{m}+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f_m(s,y_m(s))\mathrm{d}s, \quad m\in Z_1.$$

由此可见 $y_m(t)\ge\frac{1}{m}$. 再由 f_m 的定义知

$$y_m(t)=\frac{1}{m}+\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f(s,y_m(s))\mathrm{d}s, \quad m\in Z_1,$$

并且有 $M_0+\frac{1}{m}\le|y_m|_0\le N_0$. 易知此 $y_m(m\in Z_1)$ 是 (3.2) 的解. 类似对 y^* 的讨论，我们仍可证得 y_m $(m\in Z_1)$ 有下界估计，且是 $[0,1]$ 上的有界等度连续族. 由 Arzela-Ascoli 定理和 Lebesgue 控制收敛定理，我们知道存在 Z_1 的子序列 Z' 和一函数 $y^{**}\in C[0,1]$, 当 $m\to\infty$ 时 $y_m(m\in Z')$ 在 $[0,1]$ 上一致地趋于 y^{**} , $y^{**}=\int_0^1(-1)^{n-p}G(t,s)\varphi(s)f(s,y^{**}(s))\mathrm{d}s$. 即 y^{**} 满足 (1.1) 且有 $M_0\le|y^{**}|_0\le N_0$.

定理 1.1 得证.

5 例子

考虑如下的边值问题：

$$\begin{cases} y''+t^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}(y^{-\alpha}+r_0y^{\beta}+r_1)=0, \quad 0<t<1,\\ y(0)=0,\\ y(1)=0,\end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta>1$, $r_1\ge 0$, $r_0\ge 0$, 且

$$\frac{1}{a_0}\sup_{c\in(0,\infty)}\left(\frac{c^{\alpha+1}}{1+r_0c^{\alpha+\beta}+r_1c^{\alpha}}\right)>1,$$

其中

$$a_0=\sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^t(1-t)s^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}\mathrm{d}s+\int_t^1 ts^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}(1-s)^{1-\alpha}\mathrm{d}s\right\}.$$

应用我们的主要定理可知 (5.1) 有两个解 $y_1,y_2\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, 且存在常数 M_0,N_0 使得 $0<|y_1|_0<M_0\le|y_2|_0\le N_0$.

注意，在问题 (5.1) 中，我们设 $f(t,y)=y^{-\alpha}+r_0y^{\beta}+r_1$, $\varphi(t)=t^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}$, $g(y)=y^{-\alpha}$, $h(y)=r_0y^{\beta}+r_1$. 那么 φ 在 $t=0$ 时奇异， f 在 $y=0$ 时奇异. 文 [5], [9] 和 [11] 中的结果均不适用于此问题.

为节省篇幅，我们略去此例证明的细节.

参考文献：

[1] AGARWAL R P, O'REGAN D. *Positive solutions to superlinear singular boundary value problems* [J]. J. Comput. Appl. Math., 1998, **88**: 129–147.

[2] AGARWAL R P, O'REGAN D. *Positive solutions for $(p,n-p)$ conjugate boundary value problems* [J]. J. Differential Equations, 1998, **150**: 462–473.

[3] AGARWAL R P, O'REGAN D, WONG P J Y. *Positive solutions of Differential, Difference and Integral Equations* [M]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[4] AGARWAL R P, WONG P J Y. *Extension of continuous and discrete inequalities due to Eloe and Henderson* [J]. Nonlinear Anal., 1998, **34**: 479–487.

[5] AGARWAL R P, O'REGAN D, LAKSHMIKANTHAM V. *Twin nonnegative solutions for higher-order boundary value problems* [J]. Nonlinear Anal., 2001, **43**: 61–73.

[6] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Springer, New York, 1985.

[7] ELOE P W, HENDERSON J. *Singular nonlinear $(k,\ n-k)$ conjugate boundary value problems* [J]. J. Differential Equations, 1997, **133**: 136–151.

[8] ELOE P W, HENDERSON J. *Inequalities based on a generalization of concavity* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, **125**: 2103–2107.

[9] GUSTAFSON G B. *A Green's function convergence principle, with applications to computation and norm estimates* [J]. Roky Mountain J. Math., 1976, **6**: 457–492.

[10] KRASNOSEL'SKII M A. *Positive Solutions of Operator Equations* [M]. Noordhoff, Groningen, 1964.
[11] LUNING C D, PERRY W L. *Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler boundary value problems* [J]. SIMA J. Appl. Math., 1981, **12**: 874–879.
[12] O'REGAN D. *Singular differential equations with linear and nonlinear boundary conditions* [J]. Comput. Math. Appl., 1998, **35**(3): 81–97.

Twin Nonnegative Solutions For $(p, n-p)$ Conjugate Boundary Value Problems

LI Yan-jie, GAO Wen-jie
(Dept. of Math., Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: The following $(p, n-p)$ conjugate boundary value problems are studied in this paper.

$$\begin{cases} (-1)^{(n-p)}y^{(n)} = \varphi(t)f(t,y), & 0 < t < 1, \\ y^{(i)}(0) = 0, & 0 \le i \le p-1, \\ y^{(i)}(1) = 0, & 0 \le i \le n-p-1, \end{cases}$$

where $n \ge 2, 1 \le p \le n-1$, φ may be singular at $t = 0$ and/or $t = 1$, and f may be singular at $y = 0$. Based on the results obtained by R. P. Agarwal et. al., the existence of twin nonnegative solutions to the problem is proved under suitable conditions. A simple example is also given.

Key words: conjugate boundary value problems; singularity; nonnegative solutions; twin solutions.