第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0354-07 **文献标识码**: A

集值优化问题强有效解的 Kuhn Tucker 最优性条件

徐义红
(南昌大学数学系, 江西 南昌 330047)
(E-mail: xyhxy3946@sina.com.cn)

摘 要: 在局部凸空间中考虑集值优化问题 (VP) 在强有效解意义下的 Kuhn-Tucker 最优性条件. 在近似锥 - 次类凸假设下利用择一性定理得到了 (VP) 取得强有效解的必要条件, 利用基泛函的性质给出了 (VP) 取得强有效解的充分条件, 最后给出了一种与 (VP) 等价的无约束规划.

关键词: 强有效性; 近似锥 - 次类凸性; 集值优化; 锥.
MSC(2000): 30D60
中图分类: O174.5, O174.52

1 引 言

向量集值优化理论在微分包含 [1] 、逼近论 [2] 、变分 [3] 等领域均有广泛的应用, 而集值优化问题在各种解意义下的最优性条件是其中的重要组成部分, 是建立现代优化算法的重要基础. [4] 借助上图导数给出了约束集值优化问题在 Benson 真有效解意义下的 Fritz John 最优性条件. [5] 用广义梯度给出了 (VP) 在 Benson 真有效解意义下的一种无约束刻画. [6] 在近似锥 - 次类凸假设下借助 Lagrange 乘子给出了 (VP) 取得 Benson 真有效解的必要条件. 对于多目标优化问题, [7] 借助 Ben-Tal 广义代数运算得到了 (弱) 有效解意义下的充分条件和 Lagrange 对偶定理.

另一方面, 有效性理论一直是人们所热切关注的课题. [8] 引进了强有效性概念, 它推广了超有效性和严有效性, 且具有很好的性质, 即强有效点能用基泛函来标量化 [8], 因此研究强有效性理论就很有必要了.

本文在强有效解意义下给出 (VP) 的 Kuhn-Tucker 最优性条件, 籍此建立与 (VP) 等价的无约束优化问题.

2 基本概念及有关结论

以下总是假设 X 为拓扑线性空间, Y,Z 为 Hausdorff 局部凸拓扑线性空间, C 和 D 分别是 Y 和 Z 中的闭凸点锥, Y^* 和 Z^* 分别为 Y 和 Z 的拓扑对偶空间. 设 M 为 Y 的任一子集, 我们以 $\mathrm{cl}M$ 、 $\mathrm{int}M$ 和 $\mathrm{cone}M$ 分别表示 M 的闭包、内部和生成锥. 凸集 D 的对偶锥定义为 $D^*=\{f\in Z^*: f(d)\geq 0,\forall d\in D\}$. 一个凸子集 $B\subset C$ 为锥 C 的基, 如果 $0\overline{\in}\mathrm{cl}B$ 且 $C=\mathrm{cone}B=\bigcup\limits_{\lambda\geq 0}\lambda B=\{\lambda x: x\in B,\lambda\geq 0\}$. 令 $C^*=\{f\in Y^*: f(x)\geq 0,\forall x\in C\}$, $B^{st}=\{f\in Y^*:$ 存在 $t>0$ 使得 $f(b)\geq t,\forall b\in B\}$, $f\in B^{st}$ 称为基泛函 [8].

收稿日期: 2004-02-20
基金项目: 国家自然科学基金 (10461007)

定义 2.1[8]　设 B 为 C 的基，M 为 Y 的一个非空子集，$N(0)$ 表示 Y 的零点邻域基，元素 $y \in M$ 称为 M 的强有效点，如果对所有 $f \in Y^*$, 存在 $U, V \in N(0)$ 使得

$$f[K \cap (U - \mathrm{cone}(V + B))]$$

有界，其中 $K = \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M - y))$.

我们用 $GE(M, C)$ 表示 M 的所有强有效点集.

注 2.1[8]　在定义 2.1 中，可以根据需要，U, V 可取为凸的对称邻域，且 $y \in GE(M, C)$ 当且仅当对任意 $f \in Y^*$, 存在 $U, V \in N(0)$ 使得

$$f[\mathrm{cone}(M - y) \cap (U - \mathrm{cone}(V + B))]$$

有界.

定义 2.2[9]　设 $E \subset X$ 为一非空子集，集值映射 $F : E \to 2^Y$ 为近似 C- 次类凸的，如果 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(E) + C))$ 是凸的.

注 2.2[9]　近似 C- 次类凸是 C- 次类凸和 C- 类凸的推广.

记 $L(X, Y)$ 为由 Z 到 Y 的连续线性算子空间，$L^+(Z, Y) = \{T \in L(Z, Y) : T(D) \subset C\}$. 设 $F : X \to 2^Y, G : X \to 2^Z$. $(F, G) : X \to 2^{Y \times Z}$ 定义为 $(F, G)(x) = F(x) \times G(x)$.

考虑下面集值优化问题：

$$\text{(VP)} \qquad \begin{array}{l} \min F(x) \\ \text{s.t.} \quad G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, x \in X. \end{array}$$

(VP) 的可行集用 A 表示，即 $A = \{x \in X : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$.

定义 2.3　$x_0 \in A$ 称为 (VP) 的强有效解，如果 $F(x_0) \cap GE(F(A), C) \neq \emptyset$; (x_0, y_0) 称为 (VP) 的强有效元，如果 $x_0 \in A$ 且 $y_0 \in F(x_0) \cap GE(F(A), C)$.

引理 2.1[8]　B^{st} 具有以下性质：

(a)　$B^{st} \neq \emptyset$.

(b)　$B^{st} \subset C^*$.

(c)　若 B 有界且 $\psi \in B^{st}$, 则对任意 $\varphi \in Y^*$, 存在自然数 n 使 $\psi - \varphi/n \in C^*$.

(d)　若 B 是 C 的有界基，则 $B^{st} = \mathrm{int}C^*$.

引理 2.2[10]　设 C 有有界基，$\emptyset \neq M \subset Y$, 则

$$GE(M, C) = GE(M + C, C).$$

3　Kuhn-Tucker 最优性条件

设 $\emptyset \neq S \subset Y, \bar{y} \in Y, \varphi \in Y^*$, 为了方便起见，用 $\varphi(S) \geq \varphi(\bar{y})$ 表示 $\varphi(y) \geq \varphi(\bar{y}), \forall y \in S$.

引理 3.1[11]　设 $\varphi \in D^* \backslash \{0_{Z^*}\}, d \in \mathrm{int}D$, 则 $\varphi(d) > 0$.

引理 3.2[12]　设 $E \subset X$ 为非空集, 闭凸点锥 K, H 满足 $K \subset H$. 若 W 在 E 上是近似 $K-$ 次类凸的，则 W 在 E 上是近似 $H-$ 次类凸的.

引理 3.3[9]　设 $F : X \to 2^Y$ 在 X 上是近似 $C-$ 次类凸的，则下列陈述有且仅有一个成立：

(i)　存在 $x \in X$ 使 $F(x) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \emptyset$;

(ii) 存在 $\varphi \in C^*\backslash\{0_{Y^*}\}$ 使 $\varphi(y) \geq 0, \forall y \in F(X)$.

定理 3.1 设 C 有有界基, (x_0, y_0) 为 (VP) 的强有效元, $F(x)-y_0$ 在 A 上是近似 C- 次类凸的, $(F(x)-y_0, G(x))$ 在 X 上是近似 $C\times D$- 次类凸的, 存在 $\bar{x}\in X$ 使 $G(\bar{x})\cap(-\mathrm{int}D)\neq\emptyset$, 则存在 $s^*\in \mathrm{int}C^*$, $k^*\in D^*$ 使

$$\inf_{x\in X}(s^*(F(x))+k^*(G(x)))=s^*(y_0), \tag{3.1}$$

且

$$\inf k^*(G(x_0))=0, \tag{3.2}$$

其中 $s^*(F(x))=\bigcup\limits_{y\in F(x)}s^*(y)$, $k^*(G(x))=\bigcup\limits_{z\in G(x)}k^*(z)$.

证明 设 B 是 C 的有界基, 由引理 2.1(a) 知存在 $t>0$ 使 $B^{st}\neq\emptyset$. 设 $f_0\in B^{st}$. 由 $y_0\in GE(F(A), C)$ 及引理 2.2 得 $y_0\in GE(F(A)+C, C)$. 于是存在 $U_0, V_0\in N(0)$(这里 U_0, V_0 取为凸的对称邻域) 使 f_0 在

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))\cap(U_0-\mathrm{cone}(B+V_0))$$

上有界, 由假设 $F(x)-y_0$ 在 A 上是近似 $C-$ 次类凸的知 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))$ 是凸锥, 于是由 [8, Theorem 2.2] 知存在 $\psi\in(\mathrm{cone}(V_0+B))^*$ 及

$$\varphi\in(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)))^*, \tag{3.3}$$

使 $f_0=\varphi-\psi$. 于是 $\varphi=f_0+\psi$. 显然 $\psi(B)\geq 0$. 因此 $\varphi(B)=f_0(B)+\psi(B)\geq t$. 令 $U=\{z\in Y:|\varphi(z)|<t/2\}$. 则

$$\varphi(U-B)\leq -t/2<0,$$

再由 (3.3) 得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))\cap(U-B)=\emptyset.$$

由 $U-B$ 是开集得

$$\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)\cap(U-B)=\emptyset. \tag{3.4}$$

(i) 先证明

$$(F(A)+C-y_0)\cap\mathrm{cone}(U-B)=\{0\}. \tag{3.5}$$

由于 $0\in(F(A)+C-y_0)\cap\mathrm{cone}(U-B)$, 故只需证

$$(F(A)+C-y_0)\cap\mathrm{cone}(U-B)\subset\{0\}.$$

反证法, 若存在 $y\in(F(A)+C-y_0)\cap\mathrm{cone}(U-B)$ 且 $y\neq 0$, 则存在 $\lambda>0, t\in U-B$ 使 $y=\lambda t$. 于是 $t=\frac{1}{\lambda}y\in(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))\cap(U-B)$, 与 (3.4) 矛盾.
由 (3.5) 得

$$(F(A)+C-y_0)\cap(-\mathrm{cone}(B-U))=\{0\}.$$

由 $U=-U$ 得

$$(F(A)+C-y_0)\cap(-\mathrm{cone}(B+U))=\{0\}.$$

另一方面，

$$0 \in (F(A) - y_0) \cap (-\mathrm{cone}(B+U)) \subset (F(A) + C - y_0) \cap (-\mathrm{cone}(B+U)).$$

于是

$$(F(A) - y_0) \cap (-\mathrm{cone}(B+U)) = \{0\}.$$

令 $K_U(B) = \mathrm{cone}(B+U), C_U(B) = \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(B+U))$, 于是

$$(F(A) - y_0) \cap (-K_U(B)) = \{0\}.$$

因此

$$(F(A) - y_0) \cap (-\mathrm{int}K_U(B)) = \emptyset.$$

由 $K_U(B)$ 是凸集得

$$\mathrm{int}K_U(B) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}K_U(B)) = \mathrm{int}C_U(B),$$

于是

$$(F(A) - y_0) \cap (-\mathrm{int}C_U(B)) = \emptyset. \tag{3.6}$$

令 $H(x) = (F(x) - y_0, G(x))$, 于是 $H(x) = \bigcup\limits_{x \in X}(F(x) - y_0, G(x))$.

(ii) 接着证明 $H(X) \cap (-\mathrm{int}C_U(B), -\mathrm{int}D) = \emptyset$.

否则，存在 $\hat{x} \in X$ 使 $H(\hat{x}) \cap (-\mathrm{int}C_U(B), -\mathrm{int}D) \neq \emptyset$. 即

$$(F(\hat{x}) - y_0, G(\hat{x})) \cap (-\mathrm{int}C_U(B), -\mathrm{int}D) \neq \emptyset.$$

于是存在 $\hat{y} \in F(\hat{x}), \hat{z} \in G(\hat{x})$ 使得

$$\hat{y} - y_0 \in -\mathrm{int}C_U(B) \text{ 且 } \hat{z} \in -\mathrm{intD}.$$

因此 $\hat{x} \in A$ 且 $(F(\hat{x}) - y_0) \cap (-\mathrm{int}C_U(B)) \neq \emptyset$. 这与 (3.6) 矛盾．于是

$$H(X) \cap (-\mathrm{int}C_U(B), -\mathrm{int}D) = \emptyset. \tag{3.7}$$

(iii) 然后证明 (3.2) 成立.

由 $\inf\{\varphi(y) : y \in B+U\} \geq t/2 > 0$ 知 $0 \overline{\in} \mathrm{cl}(B+U)$. 类似 [13] 中定理 1.1 可证 $C_U(B)$ 是闭凸点锥.

于是由引理 3.2 知 $H(x)$ 在 X 上是近似 $(C_U(B) \times D)-$ 次类凸的．由 (3.7) 及引理 3.3 知存在 $(s^*, k^*) \in (C_U(B) \times D)^* \setminus \{(0_{Y^*}, 0_{Z^*})\} = C_U^*(B) \times D^* \setminus \{(0_{Y^*}, 0_{Z^*})\}$ 使得

$$s^*(F(x) - y_0) + k^*(G(x)) \geq 0, \forall x \in X. \tag{3.8}$$

即

$$s^*(y) + k^*(z) \geq s^*(y_0), \forall y \in F(x), z \in G(x), \forall x \in X. \tag{3.9}$$

在 (3.8) 中令 $x = x_0$, 由 $y_0 \in F(x_0)$ 得

$$k^*(G(x_0)) \geq 0. \tag{3.10}$$

另一方面, 由 $x_0 \in A$ 知存在 $p \in G(x_0) \cap (-D)$, 由 $k^* \in D^*$ 得 $k^*(p) \leq 0$. 由 (3.10) 得 $k^*(p) = 0$. 因而

$$0 \in k^*(G(x_0)). \tag{3.11}$$

由 (3.10) 及 (3.11) 得 (3.2).

(4°) 最后证明 (3.1) 成立.

先证 $s^* \neq 0_{Y^*}$. 否则 $k^* \in D^* \setminus \{0_{Z^*}\}$. 由假设 $G(\bar{x}) \cap (-\text{int}D) \neq \emptyset$ 知存在 $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap (-\text{int}D)$. 由引理 3.1 得 $k^*(\bar{z}) < 0$. 另一方面, 将 $s^* = 0_{Y^*}$, $x = \bar{x}$, $z = \bar{z}$ 代入 (3.9) 得 $k^*(\bar{z}) \geq 0$, 矛盾. 于是 $s^* \in C_U^*(B) \setminus \{0_{Y^*}\}$, 由 $C_U^*(B) = K_U^*(B)$ 及 [14, 引理 2.1] 得 $s^* \in \text{int}C^*$. 由 (3.8) 得

$$\inf_{x \in X} (s^*(F(x)) + k^*(G(x))) \geq s^*(y_0). \tag{3.12}$$

另一方面, 由 $y_0 \in F(x_0)$ 及 (3.11) 得

$$s^*(y_0) \in s^*(F(x_0)) + k^*(G(x_0)).$$

再由 (3.12) 得 (3.1).

定理 3.2 设 C 有有界基, 且 (VP) 满足以下条件:

(i) $F(x) - y_0$ 在 A 上是近似 C- 次类凸的;

(ii) $x_0 \in A$;

(iii) $y_0 \in F(x_0)$, 存在 $s^* \in \text{int}C^*$, $k^* \in D^*$ 使

$$\inf_{x \in X} (s^*(F(x)) + k^*(G(x))) = s^*(y_0),$$

则 (x_0, y_0) 为 (VP) 的强有效元.

证明 设 B 是 C 的有界基, 由引理 2.1(d) 得 $s^* \in B^{st}$. 因而对任意 $f \in Y^*$, 由引理 2.1(c) 知存在自然数 n, 使 $s^* - \frac{f}{n} \in C^*$, 因而 $ns^* - f \in C^*$. 于是

$$(n+1)s^* - f = ns^* - f + s^* \in C^* + B^{st} \subset B^{st}.$$

令 $\psi = (n+1)s^* - f$, 则 $\psi \in B^{st}$ 且

$$f = (n+1)s^* - \psi. \tag{3.13}$$

令 $V_1 = \{y \in Y : |\psi(y)| < t\}$, 则 $\psi(V_1 - B) \leq 0$, 即 $\psi(B - V_1) \geq 0$, 由 V_1 的对称性得 $\psi(B + V_1) \geq 0$, 于是 $\psi(\text{cone}(B + V_1)) \geq 0$, 因此

$$\psi \in (\text{cone}(B + V_1))^*. \tag{3.14}$$

另一方面, 由已知得

$$\begin{aligned} s^*(y_0) = \inf_{x \in X} (s^*(F(x)) + k^*(G(x))) &\leq \inf_{x \in A} (s^*(F(x)) + k^*(G(x))) \\ &\leq \inf_{x \in A} (s^*(F(x)) + k^*(G(x) \cap (-D))), \end{aligned}$$

再由当 $x \in A$ 时， $k^*(G(x) \cap (-D)) \leq 0$ 得 $s^*(y_0) \leq \inf\limits_{x \in A} s^*(F(x))$, 于是

$$s^*(y_0) = \min\{s^*(y) : y \in F(A)\}.$$

由 $s^* \in B^{st} \subset C^*$ 可得 $s^*(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))) \geq 0$, 即 $s^* \in (\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)))^*$. 因此

$$(n+1)s^* \in (\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)))^*. \tag{3.15}$$

由 (3.13),(3.14) 及 (3.15) 得

$$f \in (\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)))^* - (\mathrm{cone}(B+V_1))^*.$$

由 $F(x)-y_0$ 在 A 上是近似 $C \times D$- 次类凸的可知 $(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0))$ 是凸锥，由 [8, 定理 2.2] 知存在 $U_1 \subset Y$, $\alpha > 0$ 使

$$f(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)) \cap (U_1 - \mathrm{cone}(B+V_1))) \geq -\alpha. \tag{3.16}$$

另一方面，对上述 f, 有 $-f \in Y^*$, 类似地存在一个对称的、凸的零的邻域 V_2, 使得

$$-f \in (\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)))^* - (\mathrm{cone}(B+V_2))^*,$$

于是存在 $U_2 \in N(0)$, $\beta > 0$ 使

$$(-f)(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)) \cap (U_2 - \mathrm{cone}(B+V_1))) \geq -\beta. \tag{3.17}$$

令 $U = U_1 \cap U_2$, $V = V_1 \cap V_2$, 由 (3.16) 及 (3.17) 可知 f 在

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)+C-y_0)) \cap (U - \mathrm{cone}(B+V))$$

上有界. 于是 $y_0 \in GE(F(A)+C, C)$, 由引理 2.2 得 $y_0 \in GE(F(A), C)$.

由定理 3.1 和定理 3.2 易得下面推论.

推论 3.1 设 C 有有界基，$x_0 \in A$, $y_0 \in F(x_0)$, 存在 $\bar{x} \in X$ 使 $G(\bar{x}) \cap (-\mathrm{int}D) \neq \emptyset$,$F(x)-y_0$ 在 A 上是近似 $C-$ 次类凸的，$(F(x)-y_0, G(x))$ 在 X 上是近似 $C \times D-$ 次类凸的. 则 (x_0, y_0) 为 (VP) 的强有效元的充要条件是存在 $s^* \in \mathrm{int}C^*$, $k^* \in D^*$ 使

$$\inf_{x \in X}(s^*(F(x)) + k^*(G(x))) = s^*(y_0).$$

注 3.1 推论 3.1 将约束最优化 (VP) 转化成了无约束优化，且形式很优美.

参考文献:

[1] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. *Set-Valued Analysis* [M]. Birkhauser, Basel, Switzerland, 1990.

[2] KEINED K, WORTH A. *Korovkin type approximation theorem for set-valued functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, **104**: 819–824.

[3] NOOR M A, NOOR K L, RASSIAS T M. *Set-valued resolvent equations and mixed variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **220**: 741–759.

[4] 盛宝怀，刘三阳. Benson 真有效意义下向量集值优化的广义 Fritz John 条件 [J]. 应用数学和力学， 2002, **23**(12): 1289–1295.

SHENG Bao-huai, LIU San-yang. *On the generalized Fritz John optimality conditions of vector optimization with set-valued maps under Benson proper efficiency* [J]. Appl. Math. Mech., 2002, **23**(12): 1289–1295. (in Chinese)

[5] 盛宝怀，刘三阳．用广义梯度刻画集值优化 Benson 真有效解 [J]. 应用数学学报， 2002, **25**(1): 22–28.
SHENG Bao-huai, LIU San-yang. *The characterizations of Benson proper solutions of set-valued vector optimization with generalized gradient* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 2002, **25**(1): 22–28. (in Chinese)

[6] XU Yi-hong, LIU San-yang. *Benson proper efficiency in the nearly cone-subconvexlike vector optimization with set-valued functions* [J]. Appl. Math.–JCU, 2003, **18**(1): 95–102.

[7] 徐义红，刘三阳． (h,φ)- 不变广义凸函数的若干性质与 (h,φ)- 不变广义凸多目标规划的最优性和对偶性 [J]. 应用数学学报， 2003, **26**(4): 726–736.
XU Yi-hong, LIU San-yang. *Some properties for (h,φ)-generalized invex functions and optimality duality of (h,φ)-generalized invex multiobjective programming* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 2003, **26**(4): 726–736. (in Chinese)

[8] CHENG Yong-hong, FU Wan-tao. *Strong efficiency in a locally convex space* [J]. Math. Methods Oper. Res., 1999, **50**(3): 373–384.

[9] YANG Xin-min, LI Duan, WANG Shou-yang. *Nearly-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions* [J]. J. Optim. Theory Appl., 2001, **110**(2): 413–427.

[10] 武育楠，戎卫东．集值映射向量优化问题的强有效性 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1999, **30**(4): 415–421.
WU Yu-nan, RONG Wei-dong. *Strong efficiency in vector optimization problems with set-valued maps* [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis NeiMongol, 1999, **30**(4): 415–421. (in Chinese)

[11] 胡毓达．多目标规划有效性理论 [M]. 上海：上海科学技术出版社， 1994.
HU Yu-da. *Efficiency Theory of Multiobjective Programming* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1994.

[12] LING Cheng. *ε-super saddle points and ε-duality theorems of vector optimization problems with set-valued maps* [J]. OR Transactions, 2002, **6**(1): 53–60. 2002, **22**(1): 107–114.

[13] BORWEIN J M, ZHUANG D M. *Super efficiency in vector optimization* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1993, **338**: 105–122.

[14] HU Yu-da, LING Cheng. *Connectedness of cone super efficient point sets in locally convex topological spaces* [J]. J. Optim. Theory Appl., 2000, **107**(2): 433–446.

Kuhn-Tucker Optimality Conditions for Set-Valued Optimization Problem in the Sense of Strongly Efficient Solutions

XU Yi-hong

(Dept. of Math., Nanchang University, Jiangxi 330047, China)

Abstract: Kuhn-Tucker optimality conditions for the set-valued optimization problem (VP) with constraints are considered in the sense of strongly efficient solutions in locally convex spaces. Under the assumption of nearly cone-subconvexlikeness, by applying alternative theorem, a Kuhn-Tucker optimality necessary condition for (VP) is derived. By using the properties of base functionals, a sufficient condition is also obtained. Finally, a kind of unconstrained program equivalent to (VP) is established.

Key words: strong efficiency; nearly cone-subconvexlikeness; set-valued optimization; cone.